$T_s$ использовались следующие аппроксимации, полученные для воды:

$$i_1=4{,}32T_s-1180,\quad T_s=-4640/(\ln p-12{,}56),\quad l=-0{,}0007075p^3+0{,}1522p^2-17{,}06p+2{,}199,$$

$$V_1=0{,}38888\cdot10^{-9}p^3-0{,}77632\cdot10^{-7}p^2+0{,}78929\cdot10^{-5}p+0{,}0010456,$$

$$V_2=V_1+T_s'l/T_s([T_s]=K,\quad [i_1],\quad [l]=\text{кДж/кг},\quad [V_i]=\text{м}^3/\text{кг}. \tag{10}$$

Отметим, что эти выражения приближают табличные значения [7] с относительной ошибкой менее одного процента.

Если пренебречь переменностью $V_1$, $V_2$, $l$, $i_1$ от давления, что можно сделать при небольших перепадах давления $p_0-p_e\ll p_0$, то для $x_e$ имеем приближенное выражение

$$x_e=x_0\exp[(p_0-p_e)(l'+V_1-V_2)/l]+(V_1-i_1')\{1-\exp[(p_0-p_e)(l'+V_1-V_2)/l]\}/ /(l'+V_1-V_2). \tag{11}$$

На рис. 2 представлены характеристики истечения при различных паросодержаниях внутри емкости для $p_0=50$ бар.

Башкирский государственный университет

Поступило в редакцию 12 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. И. Нигматулин.* Основы механики гетерогенных сред. «Наука», 1978.
2. *Л. Прандтль.* Гидроаэромеханика. ИЛ, 1951.
3. *М. Д. Вайсман.* Термодинамика парожидкостных потоков. «Энергия», Л., 1967.
4. *Ю. А. Калайда, В. В. Арсентьев, В. В. Дисенко, Б. М. Цизин.* Истечение теплоносителя при потере герметичности реакторного контура. Атомиздат, 1977.
5. *А. А. Губайдуллин, А. И. Ивандаев.* ТВТ, *16*, № 3, 1978.
6. *И. Г. Рассохин, В. С. Кузеванов, Г. В. Циклаури, З. Маринчек, Ж. Селла.* ТВТ, *15*, № 3, 1977.
7. *М. Г. Вукалович, С. Л. Ривкин, А. А. Александров.* Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара. Изд. стандартов, 1969.

---

УДК 536.2

# ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

***Абрамович Б. Г., Трофимов В. С.***

При решении линейных граничных обратных задач теплопроводности (ОЗТ) широкое применение получили методы, основанные на использовании интегральных форм (уравнений), которые конкретизируются применительно к телам различной геометрии [1]. В данной статье предлагается интегральная форма ОЗТ нетеплоизолированного полого цилиндра, имеющая прикладное значение для исследования как внутренних, так и внешних процессов нестационарного теплообмена, в частности, для описания теплообмена между формой и стекломассой при формовании стеклянных изделий механизированным способом [2, 3].

Исходное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{\partial^2\theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\xi}. \tag{1}$$

Начальное и граничные условия для него следующие:

$$\theta(\xi,0)=0, \tag{2}$$

$$\theta(1,\eta)=\text{var}, \tag{3}$$

$$Q(1,\eta)=\text{var}, \tag{4}$$

где $Q(\xi,\eta)=\partial\theta(\xi,\eta)/\partial\xi$; $\xi=r/r_1$, $\eta=at/r_1^2$, если в качестве регистрируемых функций используются $\theta(r_1,t)$ и $Q(r_1,t)$; или $\xi=r/r_2$, $\eta=at/r_2^2$, если регистрируются $\theta(r_2,t)$ и $Q(r_2,t)$.

Здесь $t$ – время; $r$ – радиальная координата; $\theta$ – температура; $a$ – коэффициент температуропроводности; $r_1$, $r_2$ – внутренний и внешний радиусы цилиндра ($0<r_1\leqslant r\leqslant r_2$).

Используя преобразование Лапласа [4], запишем решение задачи (1)–(4) в виде

$$\theta(\xi,s)=\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}I_0(\xi\sqrt{s})+\frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}K_0(\xi\sqrt{s}), \tag{5}$$

где

$$\Delta(s)=I_0(\sqrt{s})K_1(\sqrt{s})+I_1(\sqrt{s})K_0(\sqrt{s});$$
$$\Delta_1(s)=\theta(1,s)K_1(\sqrt{s})+Q(1,s)K_0(\sqrt{s})/\sqrt{s};$$
$$\Delta_2(s)=\theta(1,s)I_1(\sqrt{s})-Q(1,s)I_0(\sqrt{s})/\sqrt{s}.$$

Здесь $I_\nu(u)$, $K_\nu(u)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка $\nu$.

Для перехода к оригиналу искомой функции $\theta(\xi,\eta)$ соотношение (5) необходимо преобразовать следующим образом:

$$K(1,s)\theta(\xi,s)=K(\xi,s)\theta(1,s)+G(\xi,s)Q(1,s), \tag{6}$$

$$\text{где } K(\xi,s)=\frac{I_0(\xi\sqrt{s})}{\sqrt{s}I_1(\sqrt{s})}\frac{K_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}+\frac{K_0(\xi\sqrt{s})}{s},$$

$$G(\xi,s)=\frac{I_0(\xi\sqrt{s})}{\sqrt{s}I_1(\sqrt{s})}\frac{K_0(\sqrt{s})}{s}-\frac{I_0(\sqrt{s})}{\sqrt{s}I_1(\sqrt{s})}\frac{K_0(\xi\sqrt{s})}{s}.$$

Функции $K(\xi,s)$ и $G(\xi,s)$ имеют аналитические оригиналы, которые определяются с использованием теоремы свертки [4]. При этом формулы перехода являются табличными

$$K_0(\xi\sqrt{s})\rightleftharpoons\exp(-\xi^2/4\eta)/2\eta;\quad K_1(\sqrt{s})/\sqrt{s}\rightleftharpoons\exp(-1/4\eta),\ 1/s\rightleftharpoons 1,$$

а соотношение

$$I_0(\xi\sqrt{s})/\sqrt{s}I_1(\sqrt{s})=2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\xi)\exp(-\mu_n^2\eta)\right]$$

следует из теоремы разложения [4].

Здесь $A_n(\xi)=J_0(\xi\mu_n)/J_0(\mu_n)$, $J_\nu(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\nu$, $\mu_n$ – корни характеристического уравнения

$$W(\mu_n)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\mu_n/2)^{2k}/k!(k+1)!=0.$$

Таким образом,

$$K(\xi,\eta)=2\left[\int_0^\eta\exp\left(-\frac{1}{4\tau}\right)d\tau+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\xi)\exp(-\mu_n^2\eta)\int_0^\eta\exp\left(\mu_n^2\tau-\frac{1}{4\pi}\right)d\tau\right]+F(\xi,\eta),$$

$$G(\xi,\eta)=2\left\{\int_0^\eta F(1,\tau)d\tau-\int_0^\eta F(\xi,\tau)d\tau+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\mu_n^2\eta)\left[A_n(\xi)\int_0^\eta F(1,\tau)\exp(\mu_n^2\tau)d\tau-\int_0^\eta F(\xi,\tau)\exp(\mu_n^2\tau)d\tau\right]\right\},$$

$$\text{где } F(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int_0^\eta\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right)d\tau.$$

Повторное использование теоремы свертки позволяет представить зависимость (6) в виде интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^\eta K(1,\eta-\tau)\theta(\xi,\tau)d\tau=\int_0^\eta K(\xi,\eta-\tau)\theta(1,\tau)d\tau+\int_0^\eta G(\xi,\eta-\tau)Q(1,\tau)d\tau, \tag{7}$$

которое и является интегральной формой ОЗТ полого цилиндра.

Полученная интегральная форма (7) по сравнению с приведенными в [5] рекуррентными соотношениями прямого метода решения ОЗТ для теплоизолированного полого цилиндра имеет следующие преимущества.

1. Она записана в более общем виде для нетеплоизолированного полого цилиндра, при этом важность учета теплового потока определяется сильной чувствительностью искомого поля температуры к изменению регистрируемых функций.

2. Форма записи интегрального уравнения не зависит от того, внутренняя или наружная поверхность является нагреваемой, что позволяет получать решения по единому алгоритму. При этом значения $\mu_n$ могут быть определены лишь однажды и весьма точно.

3. Решение полученного интегрального уравнения возможно прямым методом или методом регуляризации в зависимости от величины временного шага [1]. Задача экстраполяции температуры является более устойчивой, чем задача восстановления теплового потока.

ВНИПКИстекломаш

Поступило в редакцию
18 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. М. Алифанов.* ИФЖ, *29*, № 1, 1975.
2. *Б. Г. Абрамович, А. Н. Орлов, Г. Е. Калашников.* В сб. Оборудование для стекольно-ситалловой промышленности, вып. 4. ЦНИИТЭИлегпищемаш, М., 1977.
3. *Б. Г. Абрамович, А. Н. Орлов, Г. Е. Калашников.* В сб. Оборудование для стекольно-ситалловой промышленности, вып. 5. ЦНИИТЭИлегпищемаш, М., 1977.
4. *А. В. Лыков.* Теория теплопроводности. «Высшая школа», 1967.
5. *В. И. Жук, А. С. Голосов.* ИФЖ, *29*, № 1, 1975.

---

УДК 621.396.6–181.48.017.7

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИСКОВ

***Абросимов А. И., Амелин Л. А., Елисеев Б. В., Косоротов М. А., Мордвинов Ю. П.***

В работе [1] рассмотрен теплоперенос в круглом диске, имеющем локальную область нагрева на одном плоском торце и равномерное охлаждение по закону Ньютона на другом. В ней получены расчетные соотношения для определения размеров диска, отвечающих его минимальному термическому сопротивлению. Вместе с тем для практики необходима оптимизация по термическому сопротивлению многослойных систем, состоящих из разнородных материалов (в частности, трехслойных со средним диском-изолятором).

Рассмотрим стационарный перенос тепла в теплопроводе, состоящем из $m$ дисков радиуса $R$ с теплопроводностью $\lambda_j$ и толщиной $\delta_j$ ($j$ – номер диска). Будем считать, что между дисками существует совершенный тепловой контакт. Нумерация дисков ведется с диска № 1, имеющего концентричную его краю зону нагрева радиусом $r$, в которой задана постоянная плотность теплового потока $q$. Свободный плоский торец последнего $m$-диска охлаждается по закону Ньютона хладагентом с температурой $T_\infty$ при коэффициенте теплоотдачи $\alpha$, неизменном по радиусу.

Решение уравнения Лапласа для температуры $T_j$ в $j$-м слое запишем в виде

$$T_j=\Sigma(A_{ij}\,\mathrm{sh}\,k_iz+B_{ij}\,\mathrm{ch}\,k_iz)J_0(k_i\rho)+P_jz+Q_j, \tag{1}$$

где $z$, $\rho$ – цилиндрические координаты; $k_i=x_i/R$, где индекс $i$ нумерует корни уравнения $J_1(x_i)=0$, получаемого в предположении, что боковые поверхности всех дисков теплоизолированы; $J_0$, $J_1$ – функции Бесселя; коэффициенты $A_{ij}$, $B_{ij}$, $P_j$, $Q_j$ от $\rho$ и $z$ не зависят.

Вне зоны нагрева теплообмен на внешнем торце ($j=1$) отсутствует

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z\equiv z_0\equiv 0}=f(\rho)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad R\geqslant\rho>r,\\ -q/\lambda_1 & \text{при} \quad 0\leqslant\rho\leqslant r.\end{cases}$$

На внешнем плоском торце диска с номером $m\,(z=z_m)$ имеем

$$\lambda_m\frac{\partial T_m}{\partial z}=-\alpha(T_m-T_\infty). \tag{2}$$

Следовательно,

$$\beta_m=-\frac{x/\mathrm{Bi}_m+\mathrm{th}\,kz_m}{1+(x/\mathrm{Bi}_m)\,\mathrm{th}\,kz_m}, \tag{3}$$

$$Q_m=T_\infty+\frac{qr^2}{R^2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{z_m}{\lambda_m}\right), \tag{4}$$