

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Перлатов, Некоторые вопросы аксиоматики геометрии, относящиеся к независимости аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности, II,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 68–74

<https://www.mathnet.ru/ivm3289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

27 апреля 2025 г., 10:12:25



УДК 513.01

Г. Н. Перлатов

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ ГЕОМЕТРИИ,
ОТНОСЯЩИЕСЯ К НЕЗАВИСИМОСТИ АКСИОМ
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ, ПОРЯДКА И КОНГРУЭНТНОСТИ, II**

Работа является продолжением статьи [1].

Переходим к доказательству выполнимости аксиомы Π_4^* в модели R . Так как все треугольники ABC , плоскости которых не проходят через точку O , являются регулярными, то для доказательства Π_4^* достаточно показать, что у любого треугольника ABC , плоскость которого проходит через O , два угла нерегулярны. Возможны два случая: 1) все три вершины треугольника ABC лежат на разных центральных идеальных отрезках; 2) две вершины треугольника ABC лежат на одном и том же центральном идеальном отрезке.

Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B , и C расположены соответственно на центральных идеальных отрезках OO_M, OO_P, OO_N (рис. 1), причем отрезок OO_N проходит в плоскости треугольника ABC пространства R_2 между отрезками OO_M и OO_P . Возможны два варианта: 1) либо точка C , расположенная на OO_N , и точка O находятся по разные стороны от AB ; 2) либо точки C и O находятся по одну сторону от AB .

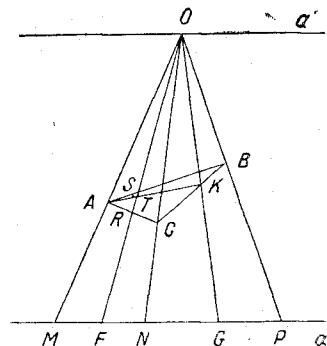


Рис. 1

Рассмотрим первый вариант первого случая (рис. 1). Докажем нерегулярность угла A . Пусть F — произвольная реальная точка на отрезке MN реальной прямой α . OF пересекает AC и AB в точках R и S (по аксиоме Π_4^*). На отрезке NP прямой α возьмем произвольную идеальную точку G , что всегда можно сделать на основании свойств идеальных элементов [2]. OG пересекает BC в точке K , и AK пересекает RS в точке T по Π_4 , примененной в плоскости пространства R_2 . Точки R, S и T , как точки центрального идеального отрезка OO_F , принадлежат плоскости модели $\tilde{\alpha}$, точки B и C принадлежат $\tilde{\alpha}$ по условию, а K не принадлежит $\tilde{\alpha}$ по построению, так как проектируется из O в идеальную точку реальной плоскости α .

Следовательно, Π'_4 для угла A не имеет места. Аналогично доказывается нерегулярность угла B .

Рассмотрим второй вариант первого случая. Пусть (рис. 2) точка C расположена по одну сторону с точкой O относительно AB . Пусть OC пересекает a в точке N . По аксиоме Π_4 в плоскости простран-

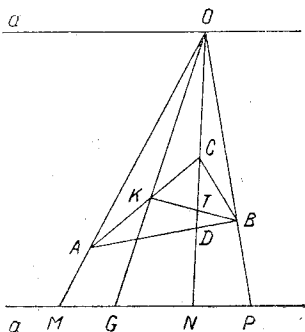


Рис. 2

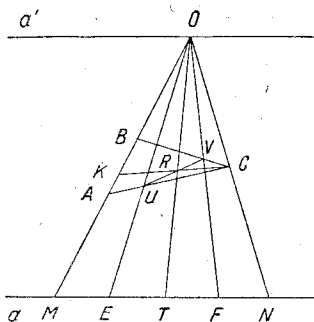


Рис. 3

ства R_2 ON пересекает AB в точке D . Докажем нерегулярность угла B . Возьмем идеальную точку G на отрезке MN . OG пересекает AC в точке K , и BK пересекает CD в точке T на основании Π'_4 . Точки C, D, T и A принадлежат плоскости модели $\tilde{\alpha}$, а точка K , по построению, не принадлежит $\tilde{\alpha}$, чем доказывается нерегулярность угла B . Аналогично доказывается и нерегулярность угла A .

Рассмотрим второй случай. Пусть вершины A и B треугольника ABC лежат на одном центральном идеальном отрезке (рис. 3). Докажем нерегулярность угла C . На сторонах угла AC и BC возьмем произвольные точки U и V плоскости $\tilde{\alpha}$, которые проектируются в реальные точки E и F прямой a на плоскости α . На отрезке EF возьмем произвольную идеальную точку T [2]. По аксиоме Π'_4 , OT пересекает UV в R , и CR пересекает AB в некоторой точке K . По условию и построению, точки A, B, K, U, V принадлежат $\tilde{\alpha}$, а точка R не принадлежит $\tilde{\alpha}$, чем доказывается нерегулярность угла C .

Докажем теперь нерегулярность угла B . Пусть вершины A и B треугольника ABC лежат на центральном идеальном отрезке OO_M (рис. 4), а вершина C — на отрезке OO_P . Пусть точка K стороны AC принадлежит $\tilde{\alpha}$, т. е. проектируется из O в реальную точку U .

На отрезке MU возьмем произвольную идеальную точку N . Тогда ON , по аксиоме Π'_4 , пересекает BK в точке T , и AT пересекает BC в точке R , OR пересекает a в точке U . На отрезке UP прямой a возьмем произвольную реальную

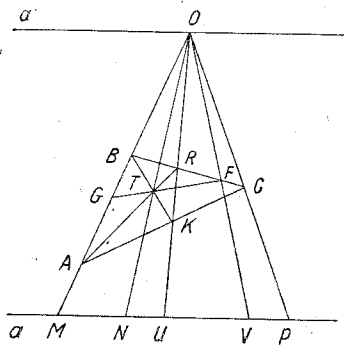


Рис. 4

точку V . По аксиоме Π_4 , OV пересекает RC в точке F . По Π_4 , примененной к треугольнику BRA , FT пересекает отрезок AB в точке G . По условию и построению, точки A, C, K, G и F принадлежат

$\tilde{\alpha}$, а точка T не принадлежит $\tilde{\alpha}$, чем доказывается нерегулярность угла B .

Таким образом, при всех вариантах расположения треугольника ABC относительно точки O , лежащей в плоскости этого треугольника, по крайней мере два угла этого треугольника являются нерегулярными, чем доказывается аксиома Π_4^* .

Так как треугольник ABC является регулярным тогда и только тогда, когда точки A , B и C лежат на трех различных центральных идеальных отрезках, не принадлежащих одной плоскости пространства R_2 , то выполняется аксиома I_5^* . Так как треугольник $A_1B_1C_1$, достижимый относительно треугольника ABC , является регулярным тогда и только тогда, когда регулярен треугольник ABC , то выполняется аксиома Π_4^{**} .

Перейдем к рассмотрению аксиом конгруентности в R . Определим сначала длину отрезка AB . Если AB расположен в реальной плоскости α или на прямой, параллельной некоторой реальной плоскости, то в качестве длины отрезка AB примем ту длину, которую имеет AB как отрезок евклидова пространства R_2 . Пусть отрезок AB не параллелен никакой реальной плоскости. Если A и B лежат на различных центральных идеальных отрезках OO_C и OO_D , $OM \parallel OO_C$ и P_2 и P_1 — соответственно точки пересечения AB с OM и OO_D , то длину AB определим, как в мероопределении Кэли — Клейна с вырожденным абсолютном, распавшимся на пару параллельных

прямых, по формуле $AB = \frac{k}{2} \ln(P_1P_2BA)$ [3]. Если точки A и B расположены на одном центральном идеальном отрезке OO_C , то положим $AB = \frac{k}{2} \ln(O_C OBA)$. Два отрезка AB и CD будем называть

конгруентными, если они имеют одинаковую длину. Выполнимость линейных аксиом конгруентности Π_{2-3} доказывается в R так же, как выполнимость этих аксиом в интерпретации гиперболической геометрии Кэли — Клейна [3].

Аксиома IV_1^* выполняется потому, что реальные треугольники ABC , лежащие в реальных плоскостях пространства R_2 , т. е. треугольники пространства R_2 , будут особыми треугольниками в модели R , ибо в R_2 выполняется аксиома IV^* . Докажем выполнимость IV_2^* . Треугольники, компланарные особым треугольникам в модели R , будут треугольниками, расположенными в параллельных плоскостях в пространстве R_2 . Если прямая a_1 и точка вне ее K_1 достижимы относительно треугольника $A_1B_1C_1$, компланарного особому треугольнику ABC , то из точки O прямая a_1 и точка K_1 проектируются в R_2 на плоскость треугольника ABC в прямую a и точку K , принадлежащие также модели R , а потому аксиома IV^* выполняется одновременно в плоскостях R_2 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. выполняется аксиома IV_2^* . Теорема 1 доказана.

Следствие. Аксиома Π_4^* независима от аксиом I_{1-4} , I_5^* , I_5^{**} , I_{6-8} , Π_{1-3} , Π_4'' , Π_4^* , Π_4^{**} , Π_{5-7} , Π_{2-3} , IV_1^* , IV_2^* .

Доказательство. В модели R_1 , построенной при доказательстве теоремы 1, выполняются аксиомы I_{1-4} , I_5^* , I_5^{**} , I_{6-8} , Π_{1-3} , Π_4'' , IV_1^* , Π_4^{**} , IV_2^* , Π_{5-7} , Π_{2-3} и не выполняется аксиома Π_4^* , так как существуют нерегулярные углы.

§ 2. Независимость аксиомы Π'_4 от аксиом принадлежности, линейных аксиом порядка и линейных аксиом конгруэнтности Π_{2-3}

В следствии из теоремы 1 была установлена независимость ослабленной аксиомы Паша Π'_4 от аксиом принадлежности, линейных аксиом порядка, линейных аксиом конгруэнтности Π_{2-3} при условии ослабления одной из аксиом принадлежности (при замене аксиомы I_3 аксиомой I'_5). Сходный результат может быть установлен без ослабления аксиом принадлежности, при дополнительном выполнении ослабленной аксиомы Π_1 и некотором ослаблении аксиомы IV_2^* . Ослабления аксиом Π_1 и IV_2^* формулируются следующим образом.

Аксиома Π'_1 . Если A, B — точки на прямой b и A' — точка на той же прямой или на другой прямой b' , то всегда можно найти по крайней мере одну сторону прямой b' от точки A' и на этой стороне точку B' такую, что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$.

Аксиома IV_3^* . Из двух любых треугольников, компланарных особому треугольнику и некомпланарных между собой, по крайней мере один является особым.

Выполняется следующая

Теорема 2. Аксиомы Π_4^* и Π_4^{**} невыводимы из аксиом I_{1-8} , Π_{1-3} , Π_{5-7} , Π_4'' , Π'_1 , Π_{2-3} , IV_1^* , IV_3^* .

Доказательство. Для доказательства теоремы построим следующую модель. Рассмотрим произвольное неполное координатное поле Ω и трехмерное пространство R_Ω с координатами из Ω . Пусть Σ — произвольное расширение координатного поля Ω и R_Σ — соответствующее ему трехмерное пространство. Будем предполагать, что для пространств R_Ω и R_Σ выполняются аксиомы I_{1-8} , Π_{1-4} , Π_{5-7} и V_1 . При этих условиях можно доказать, что в пространстве R_Σ существуют идеальные прямые, не содержащие ни одной реальной точки, т. е. не содержащие точек R_Ω [2]. Возьмем в пространстве R_Σ произвольную прямую a , не содержащую точек R_Ω , и удалим эту прямую со всеми ее точками из R_Σ . Все оставшиеся точки R_Σ будем считать точками модели R_1 . Прямыми пространства R_1 будем считать все прямые пространства R_Σ , кроме прямой a , удалив из этих прямых те же точки, что и из прямой a . Плоскостями модели R_1 будем считать плоскости пространства R_Σ , выбросив из них точки, удаленные из прямой a . Отношения принадлежности, порядка и конгруэнтности будем понимать в модели R_1 в обычном смысле.

Докажем выполнимость аксиом принадлежности в модели R_1 . Аксиомы I_{1-2} выполняются для модели R_1 потому, что точки, участвующие в формулировках этих аксиом, являются, вместе с тем, и точками пространства R_Σ , для которого выполняются I_{1-2} . Аксиома I_3 выполняется, ибо среди точек произвольной прямой модели R_1 содержатся все точки некоторой прямой пространства R_Σ . Аксиомы I_{4-5} выполняются, так как три точки A, B, C модели R_1 , не лежащие на одной прямой, являются, вместе с тем, тремя точками пространства R_Σ , не лежащими на одной прямой, а в R_Σ выполняются I_{4-5} . Аксиома I_6 выполняется потому, что все точки прямой модели R_1 принадлежат некоторой прямой из R_Σ . Докажем выполнимость I_7 в

модели R_1 . Пусть две плоскости α и β модели R_1 имеют общую точку A . Докажем, что α и β имеют, по крайней мере, еще одну общую точку, принадлежащую R_1 . Рассматривая α и β как плоскости из R_2 , на основании I_7 в R_2 заключаем, что α и β имеют общую прямую в R_2 , которая не может быть исключительной прямой a , так как содержит точку A из R_2 , а потому α и β содержат общую прямую и в R_1 . I_8 выполняется в R_1 , так как I_8 выполняется в R_2 и R_2 содержится в R_1 .

Линейные аксиомы порядка Π_{1-3} , Π_{5-7} выполняются в R_1 на том основании, что точки, лежащие на прямой в R_1 , будут точками, лежащими на прямой в R_2 , а в R_2 выполняются аксиомы Π_{1-3} , Π_{5-7} .

Докажем, что в R_1 выполняется аксиома Π_4'' . Возможны три случая: 1) плоскость угла AOB , для которого проверяется выполнимость Π_4'' , не содержит точек R_2 , не принадлежащих модели R_1 ; 2) плоскость угла AOB содержит одну такую точку M (точку пересечения этой плоскости с исключительной прямой a); 3) плоскость угла AOB содержит прямую a . В первом случае все углы плоскости AOB регулярны, т. е. выполняется не только Π_4'' , но и более сильная аксиома Π_4'' . Во втором случае точку D и прямую DK , фигурирующие в определении аксиомы Π_4'' [1], выбираем так, чтобы прямая DK не проходила через точку M . В третьем случае возможны два варианта: 1) угол AOB расположен по одну сторону прямой a ; 2) угол AOB расположен по разные стороны a . В первом варианте угол AOB регулярен, так как отрезки, соединяющие точки, лежащие на сторонах угла, не пересекают прямую a , т. е. не содержат точек, удаленных из R_2 при построении R_1 . Во втором варианте отрезок OF на луче OB угла AOB и точку D на стороне OA угла AOB , фигурирующие в определении Π_4'' [1], можно выбрать так, чтобы при произвольной точке K на отрезке OF отрезок DK не пересекал прямую a . Тогда, в силу Π_4'' , примененной к плоскости угла AOB , рассматриваемой как плоскость R_2 , луч OC пересекает отрезок DK в некоторой точке G из R_2 , которая будет также и точкой R_1 , т. е. выполняется Π_4'' .

Проверим выполнимость в R_1 аксиомы Π_1' . Возможны два случая: 1) прямая b' , о которой идет речь в формулировке Π_1' , рассматриваемая как прямая R_2 , не содержит точек, не принадлежащих R_1 ; 2) прямая b' содержит одну точку M , не принадлежащую R_1 (точку пересечения b' с исключительной прямой a). В первом случае для прямых b и b' выполняется аксиома Π_1' , ибо Π_1' выполняется в R_2 , а потому выполняется и Π_1' . Во втором случае отрезок $A'B'$ на прямой b' , конгруэнтный отрезку AB на прямой b , можно отложить по ту сторону точки A' на прямой b' , которая не содержит точки M . Аксиомы Π_{2-3} выполняются в R_1 , так как они выполняются в R_2 и не содержат никаких требований о существовании точек или отрезков.

Аксиома IV_1^* выполняется потому, что все треугольники модели R_1 , плоскости которых в R_2 параллельны прямой a , являются особыми, так как эти плоскости в R_2 и в R_1 ничем не отличаются друг от друга. Треугольники компланарны в R_1 , если их плоскости параллельны в R_2 . Если плоскость α параллельна прямой a в R_2 и плоскости β и γ параллельны плоскости α в R_2 , то по крайней мере одна

из плоскостей β или γ параллельна прямой a в R_2 . Следовательно, по крайней мере один из двух треугольников, компланарных особому треугольнику, является особым, т. е. выполняется IV_3^* .

Докажем невыполнимость в R_1 аксиомы Π_4^* . Предварительно докажем, что угол AOB , плоскости которого в R_2 принадлежит прямая a , является нерегулярным в R_1 , если стороны угла AO и BO пересекают прямую a в плоскости R_2 . Пусть (рис. 5) AO и BO пересекают a соответственно в точках C и D . Возьмем на отрезке AB произвольную точку K . Тогда, по Π_4' в плоскости R_2 , луч OK пересекает отрезок CD в точке F . Пусть E — произвольная точка отрезка AC . По Π_4 в плоскости R_2 , примененной к треугольнику OKB , EF пересекает отрезок KB или OB в точке G . EF не может пересечь KB , так как E и G расположены по разные стороны от a в плоскости R_2 , а потому G лежит на луче OB . Но в таком случае в модели R_1 луч OK пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла AOB в точке K и не пересекает отрезка EG с концами на сторонах того же угла, т. е. угол AOB не является регулярным.

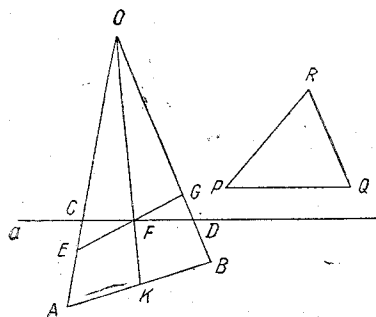


Рис. 5

Рассмотрим теперь в плоскости угла AOB (рис. 5) треугольник PQR , в котором в плоскости R_2 сторона PQ параллельна a и вершина R расположена с прямой a по разные стороны от PQ . В треугольнике PQR углы при вершинах P и Q будут регулярными, так как они расположены по одну сторону от прямой a , а угол при вершине R , по доказанному, будет нерегулярным, т. е. для этого треугольника не будет выполняться Π_4^* .

Докажем невыполнимость в модели R_1 аксиомы Π_4^{**} . С этой целью рассмотрим плоскость α в R_2 , пересекающую прямую a в точке M . В модели R_1 эта плоскость будет содержать все точки плоскости R_2 , кроме точки M . Треугольник ABC в плоскости α , на продолжении одной из сторон которого лежит точка M , является регулярным, а треугольник $A_1B_1C_1$, расположенный в той же плоскости α , т. е. достижимый относительно треугольника ABC и такой, что точка M расположена внутри $A_1B_1C_1$, является нерегулярным, так как углы при всех трех его вершинах нерегулярны. Нерегулярность углов при вершинах треугольника $A_1B_1C_1$ следует из того, что внутри всех этих углов в плоскости R_2 содержится точка M , не принадлежащая R_1 , а при вышеизложенном доказательстве нерегулярности угла AOB было существенным лишь наличие внутри угла AOB в плоскости R_2 точки F , не содержащейся в R_1 . Следовательно, аксиома Π_4^{**} не выполняется в R_1 . Теорема 2 доказана.

Следствие. Аксиома Π_4' независима от аксиом I_{1-8} , Π_{1-3} , Π_{5-7} , Π_4'' , Π_1' , Π_{2-3} , IV_1^* , IV_3^* .

Доказательство. Аксиома Π_4' невыводима из аксиом I_{1-8} , Π_{1-3} , Π_{5-7} , Π_4'' , Π_1' , Π_{2-3} , IV_1^* , IV_3^* , так как из этих аксиом, по теореме 2, невыводима аксиома Π_4^* , являющаяся частью аксиомы Π_4' .

Доказательство теоремы 2 может быть проведено путем удаления из расширения R_2 не идеальной прямой, а идеальной точки или идеальной плоскости. Все эти модели имеют ту общую особенность,

что они строятся путем удаления из расширения R_2 точек с нарушением однородности в отношении прямых и плоскостей.

Некоторая связь, обнаруженная между аксиомами Π'_4 и Π_1 , представляется естественной, так как обе аксиомы выражают свойство однородности прямых пространства в отношении упорядочения точек на этих прямых. Связь между упорядочением с помощью аксиом конгруэнтности и упорядочением с помощью аксиом порядка устанавливается аксиомой Архимеда [4], а потому в неархимедовых пространствах представляется возможным выполнение линейных аксиом конгруэнтности Π_{1-3} в сочетании с нарушением аксиомы Π'_4 .

г. Калуга

Поступило
21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Перлатов Г. Н. Некоторые вопросы аксиоматики геометрии, относящиеся к независимости аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности, I. Изв. вузов, Матем., 1968, № 2, с. 75—84.
2. Перлатов Г. Н. Некоторые вопросы однородности и расширения пространства в связи с аксиоматикой Гильберта, II. Изв. вузов, Матем., 1963, № 4, с. 140—149.
3. Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. II. М., Гостехиздат, 1956.
4. Перлатов Г. Н. Некоторые вопросы аксиоматики, связанные с однородностью и расширением пространства. Автореф. канд. диссерт., М., 1965.