Г. Л. Хатламаджиян, Об устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, том 47, номер 1, 96–109

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2007, том 47, № 1, с. 96–109

УДК 517.924

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1)]

© 2007 г. Г. Л. Хатламаджиян

(344006 Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105, Ростовский гос. ун-т)

e-mail: gaspard@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.06.2006 г.

Рассматривается задача об устойчивости для некоторых классов систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Спецификой этих систем является наличие в них быстро осциллирующих слагаемых с большими амплитудами. Для каждого класса уравнений описана процедура исследования устойчивости решений в критическом случае, которая базируется на методе Штокало–Колесова. Указана схема обоснования. Изложенная теория проиллюстрирована на примере линеаризованной задачи об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса. Библ. 15.

Ключевые слова: линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, большие высокочастотные почти периодические коэффициенты, критический случай устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется устойчивость решений некоторых классов линейных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае. Дифференциальным уравнениям с большими высокочастотными слагаемыми посвящены, например, работы [1]–[7], в которых можно найти сведения об истории вопроса.

В разд. 1 настоящей статьи рассматривается уравнение вида

$$\dot{\mathbf{x}} = [A(t, \omega t) + \sqrt{\omega}B(t, \omega t)]\mathbf{x}, \tag{1}$$

в разд. 2 речь идет о системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A(t, \omega t)\mathbf{x} + B(t, \omega t)\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= F(t, \omega t)\mathbf{x} + G(t, \omega t)\mathbf{y} + \omega H(t, \omega t)\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{2}$$

в разд. 3 исследуется уравнение n-го порядка вида

$$\mathbf{x}^{(n)} = \sum_{\alpha = n-p+1}^{n-1} A_\alpha \mathbf{x}^{(\alpha)} + \sum_{q=0}^{p} \sum_{\alpha=0}^{n-p-q} \omega^q A_{q,\alpha}(t, \omega t)\mathbf{x}^{(\alpha)}, \quad p \le \frac{n}{2}, \tag{3}$$

и полученный результат применяется к линеаризованной задаче об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса. Отметим, что все рассматриваемые уравнения являются векторными (т.е. представляют собой системы уравнений). В уравнениях (1)–(3) элементы всех матриц-функций являются тригонометрическими многочленами относительно обеих переменных. Кроме того, матрицы-функции в больших слагаемых (т.е. $B(t, \omega t)$ в (1), $H(t, \omega t)$ в (2), а также все $A_{q,\alpha}(t, \omega t)$ с положительными q в (3)) имеют нулевое среднее по второй переменной.

Методы данной работы базируются на алгоритме Штокало–Колесова (см. [8]), используемом при исследовании устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами, в сочетании с приемами теории усреднения (см. [9]–[11]).

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00287-а).

Отметим, что в [6] обоснована модификация алгоритма Штокало–Колесова для линейных абстрактных параболических уравнений вида (1). Таким образом, результат разд. 1 данной работы является следствием работы [6, теорема 2.1]. Для полноты изложения отдельно рассмотрим уравнения вида (1). Кроме того, мы считаем, что непосредственное изложение алгоритма и его обоснование для обыкновенных дифференциальных уравнений представляет самостоятельный интерес.

Содержание данной статьи более подробно изложено в депонированных работах [12], [13]. Здесь лишь добавлено замечание 1, а также предлагается менее громоздкий, чем в [12], способ обоснования в случае уравнений (1), (2).

1. УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

1.1. Формулировка результата

Пусть $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{|k| \le k_0} A_k(t)e^{i\lambda_k\omega t}\mathbf{x} + \sqrt{\omega} \sum_{1 \le |k| \le k_0} B_k(t)e^{i\lambda_k\omega t}\mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Здесь $A_k(t)$ и $B_k(t)$ – квадратные матрицы порядка n, элементами которых являются комплексные тригонометрические многочлены, ω – большой положительный параметр, λ_k – вещественные числа. При этом $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k \ne 0$ для $k = 1, 2, \ldots, k_0$. Предполагается, что λ_k попарно различны.

Пусть матрица A составлена из чисел a_{jk}. Через $\bar{A}$ обозначим матрицу, элементами которой являются $\bar{a}_{jk}$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Будем считать, что коэффициент при $\mathbf{x}$ в правой части (1.1) – вещественная матрица-функция, т.е. $A_k(t) = \bar{A}_{-k}(t)$, $B_k(t) = \bar{B}_{-k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, k_0)$, а $A_0(t)$ – вещественная матрица-функция.

Введем в рассмотрение матрицу

$$C = A_0(t) + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{i}{\lambda_k} B_k(t)B_{-k}(t)$$

и потребуем, чтобы она не зависела от t (заметим, что если все матрицы-функции $B_k(t)$ вещественны или $n = 1$, то $C = A_0$).

Предположим, что спектр $\sigma(C)$ содержится в замкнутой левой полуплоскости, причем хотя бы одна его точка принадлежит мнимой оси:

$$\sigma(C) \cap \{z|\mathrm{Re}z > 0\} = \varnothing, \quad \sigma(C) \cap \{z|\mathrm{Re}z = 0\} \ne \varnothing.$$

Пусть R_-^0 – корневое подпространство матрицы C, отвечающее ее собственным значениям с нулевыми действительными частями, а m – его размерность.

Рассмотрим усредненное уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = C\mathbf{y}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $X_0(t)$ матрицу порядка $n \times m$, вектор-столбцами которой является некоторый набор из линейно независимых решений уравнения (1.2) с начальными условиями из R_-^0.

Представим $X_0(t)$ следующим образом:

$$X_0(t) = U_0(t)e^{D_0 t}.$$

Столбцы $\mathbf{e}_1(t), \ldots, \mathbf{e}_m(t)$ матрицы $U_0(t)$ принадлежат к классу вектор-функций, имеющих вид

$$\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}e^{i\mu t} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}e^{-i\mu t}, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – постоянный комплексный вектор, а μ – некоторое вещественное число, D_0 – жорданова матрица порядка m с единственным собственным значением, равным нулю, причем кратности его элементарных делителей совпадают с кратностями элементарных делителей тех собственных значений матрицы C, которые лежат на мнимой оси.

"Критическую часть" формального матричного решения уравнения (1.1) будем искать в виде

$$X(t,\tau;\omega) = \left\{U_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-j/2}[U_j(t) + V_j(t,\omega t)]\right\}\exp\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-j/2}D_j\right)(t-\tau)\right]. \tag{1.4}$$

Неизвестные матрицы U_j, V_j, D_j ($j = 1, 2, \ldots$) подчиним следующим требованиям. Элементами матриц U_j, V_j являются некоторые тригонометрические многочлены, причем средние всех матриц-функций V_j по второй переменной равняются нулю:

$$\langle V_j(t,\cdot)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T V_j(t,s)ds = 0, \quad j\in\mathbb{N}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Пусть нулевые строки матрицы D_0 имеют номера $k_1 < \ldots < k_p$ ($1 \le p \le m$). Обозначим через $K(D_0)$ совокупность квадратных матриц порядка m, у которых ненулевые элементы могут находиться только в строках с номерами $k_1, \ldots, k_p$, и будем считать, что $D_j \in K(D_0)$ ($j = 1, 2, \ldots$).

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначения

$$\begin{gathered} D_j(\omega) = \sum_{k=0}^{j}\omega^{-k/2}D_k, \\ U_j(t,\omega) = U_0(t) + \sum_{k=1}^{j}\omega^{-k/2}[U_k(t) + V_k(t,\omega t)] + \omega^{-\frac{j+1}{2}}V_{j+1}(t,\omega t). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Дадим следующие определения (см. [8]).

Определение 1. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D_j(\omega)\boldsymbol{\eta}, \tag{1.6}$$

рассматриваемое в $\mathbb{R}^m$, будем называть сильно устойчивым (неустойчивым), если по каждому $r > 0$ можно указать такое $\omega(r) > 0$, что при любом $\omega \ge \omega(r)$ решения каждого из дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D_j(\omega)\boldsymbol{\eta} + \omega^{-\frac{j+1}{2}}D\boldsymbol{\eta}$$

устойчивы (неустойчивы), какова бы ни была матрица D, норма которой не превосходит r.

Матрицу $D_j(\omega)$ будем называть сильно устойчивой (неустойчивой), если таковым является соответствующее дифференциальное уравнение.

В [14] установлено, что при проверке сильной устойчивости (неусточивости) матрицы $D_j(\omega)$, когда $D_1, \ldots, D_j$ принадлежат $K(D_0)$, можно ограничиться возмущающими матрицами D из класса $K(D_0)$. (На этот факт автору указал С.А. Гуда, которому он выражает искреннюю благодарность за это.)

Определение 2. Будем говорить, что построение алгоритма может быть завершено, если существует такой номер j, для которого дифференциальное уравнение (1.6) является либо сильно устойчивым, либо неустойчивым.

Справедлива

Теорема 1. *Для любого целого неотрицательного j эффективно находятся частичные суммы $U_j(t,\omega)$ и $D_j(\omega)$.*

Пусть построение алгоритма может быть завершено и j_0 – первый номер, при котором дифференциальное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D_{j_0}(\omega)\boldsymbol{\eta} \equiv \sum_{k=0}^{j_0}\omega^{-k/2}D_k\boldsymbol{\eta} \tag{1.7}$$

сильно устойчиво или неустойчиво. Тогда существует такое положительное число ω_1, *что при* $\omega \geq \omega_1$ *решения дифференциального уравнения* (1.1) *равномерно экспоненциально устойчивы или неустойчивы в зависимости от аналогичных свойств решений дифференциального уравнения* (1.7).

Эффективное нахождение частичных сумм $U_j(t, \omega)$ и $D_j(\omega)$ сводится к решению mj задач о почти периодических решениях неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

где $\mathbf{f}(t)$ – известный векторный тригонометрический многочлен такой, что указанная задача разрешима.

1.2. Доказательство результата

Подставим правую часть равенства (1.4) в уравнение (1.1) вместо $\mathbf{x}$ и приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ω в правой и левой части. При этом для краткости будем использовать обозначения $s = \omega t$, $\dot{U}_j = \frac{d}{dt}U_j(t)$, $V'_j(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}V_j(t, s)$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Приравнивая коэффициенты при $\omega^{1/2}$, получаем

$$V'_1(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} B_k(t)e^{i\lambda_k s}U_0(t),$$

откуда находим

$$V_1(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k}B_k(t)e^{i\lambda_k s}U_0(t). \tag{1.8}$$

Если рассмотреть коэффициенты при ω^0 и взять среднее по s от обеих частей, то, с учетом (1.8), получится равенство

$$\dot{X}_0(t) = CX_0(t),$$

объясняющее вид усредненного уравнения (1.2).

Предположим теперь, что нам известны матрицы $U_k(t)$, $V_{k+1}(t, \omega t)$ и D_k при $k = 0, 1, \ldots, j - 1$. Из (1.8) следует справедливость этих предположений при $j = 1$.

Покажем, как найти группу матриц $U_j(t)$, $V_{j+1}(t, \omega t)$ и D_j.

Рассмотрим слагаемые, стоящие при $\omega^{-(j-1)/2}$, и вычтем из этих слагаемых их средние по переменной s, оставив, таким образом, члены с нулевым средним по s. Таким образом, выводим соотношение

$$V_{j+1}(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k}B_k(t)e^{i\lambda_k s}U_j(t) + F_j(t, s), \tag{1.9}$$

где в $F_j(t, s)$ собраны известные слагаемые.

Рассмотрим коэффициенты при $\omega^{-j/2}$, используем последнее равенство, а также применим операцию усреднения по переменной s. В результате получим

$$\dot{U}_j(t) + U_0(t)D_j + U_j(t)D_0 = \Phi_j(t) + CU_j(t), \tag{1.10}$$

где $\Phi_j(t)$ – известная матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены.

Отсюда, поступая так же, как в п. 2 работы [8], находим $U_j(t)$ в классе матриц, составленных из тригонометрических многочленов и $D_j \in K(D_0)$, после чего из равенства (1.9) определяем $V_{j+1}(t, s)$. Первая часть теоремы 1, таким образом, доказана.

Справедливость второй части теоремы 1, представляющей собой обоснование изложенного алгоритма, устанавливается аналогично доказательству теоремы из [8]. При этом в качестве матрицы $\Pi_0(t, \omega)$, фигурирующей в замене переменных, в данном случае выступает блочная матрица

$$\Pi(t, \omega) = (U_{n_0}(t, \omega)Y(t, \omega)),$$

где $U_{n_0}(t, \omega)$ определяется равенством (1.5),

$$Y(t, \omega) = \left(E + \omega^{-\frac{1}{2}} \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} B_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} + \omega^{-1} \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} - \right.$$

$$\left. - \omega^{-1} \sum_{\substack{1 \le |k|, |l| \le k_0 \\ k \ne -l}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} B_k(t) B_l(t) e^{i(\lambda_k + \lambda_l)\omega t} \right) R,$$

а матрица R размера $n \times (n - m)$ составлена из произвольных базисных векторов из корневого подпространства матрицы C, отвечающего ее собственным значением с отрицательными действительными частями. Здесь через E обозначена единичная матрица.

Замечание 1. В скалярном случае ($n = 1$) данный алгоритм неприменим: все D_j получаются равными нулю. Сказанное остается в силе, если рассматривать уравнение (1.1) в $\mathbb{C}$ и, соответственно, не считать коэффициенты в правой части вещественными.

Наметим доказательство этого факта. Если $n = 1$, то $C = A_0$ и критический случай возможен, только если $A_0 = i\mu$ чисто мнимое. Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения: $A_{2,k}(t) = A_k(t)$, $|k| \le k_0$; $A_{1,k}(t) = B_k(t)$, $1 \le |k| \le k_0$.

Возьмем $U_0(t) = e^{i\mu t}$, $D_0 = 0$. Тогда, согласно (1.8), имеем

$$V_1(t, s) = \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_{1,k}(t) e^{i\lambda_k s} e^{i\mu t}.$$

Теперь предположим, что для некоторого $j \ge 0$ мы получили

$$U_l(t) = e^{i\mu t}, \quad D_l = 0, \tag{1.11}$$

$$V_{l+1}(t, s) = \sum_{q=1}^{l} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q = 1, 2 \\ j_1 + \dots + j_q \le l}} \sum_{\substack{\delta_{1 j_r} \le |l_r| \le k_0 \\ \lambda_{l_r} + \lambda_{l_{r+1}} + \dots + \lambda_{l_q} \ne 0 \\ r = q, q-1, \dots, 1}} \frac{(-i)^q}{\lambda_{l_q}(\lambda_{l_{q-1}} + \lambda_{l_q}) \dots (\lambda_{l_1} + \lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})} \times \tag{1.12}$$

$$\times A_{j_1, l_1}(t) A_{j_2, l_2}(t) \dots A_{j_q, l_q}(t) e^{i(\lambda_{l_1} + \lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})s} e^{i\mu t}, \quad l = 1, 2, \dots, j-1,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Если $j = 1$, то это предположение справедливо. Докажем формулы (1.11), (1.12) для $l = j$.

Формула (1.9) переписывается в виде

$$V_{j+1}(t, s) = \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_{1,k}(t) e^{i\lambda_k s} U_j(t) + F_j(t, s),$$

где $F_j(t, s)$ таково, что последнее равенство перейдет в (1.12) при $l = j$, если $U_j(t) = e^{i\mu t}$.

Соотношение (1.10) можно представить в данном случае в виде

$$\dot{U}_j(t) + D_j e^{i\mu t} - i\mu U_j(t) = \sum_{q=2}^{j+2} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q = 1, 2 \\ j_1 + \dots + j_q \le j+2}} \sum_{\substack{\delta_{1 j_r} \le |l_r| \le k_0 \\ \lambda_{l_r} + \lambda_{l_{r+1}} + \dots + \lambda_{l_q} \ne 0 \\ r = q, q-1, \dots, 2}} \sum_{l_1 \in \{-(l_2 + \dots + l_q)\} \cap ([-k_0, k_0] \setminus \{0\})} (-i)^{q-1} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda_{l_q}(\lambda_{l_{q-1}} + \lambda_{l_q}) \dots (\lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})} A_{j_1, l_1}(t) A_{j_2, l_2}(t) \dots A_{j_q, l_q}(t) e^{i\mu t}.$$

Нам фактически осталось показать, что правая часть последнего равенства обращается в нуль. Для этого рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Если $j_{q-1} = j_q$ и $l_{q-1} = l_q$, то соответствующее слагаемое можно переписать в виде

$$\frac{(-i)^{q-1}}{2\lambda_{l_q}\lambda_{l_{q-1}}(\lambda_{l_{q-2}} + \lambda_{l_{q-1}} + \lambda_{l_q})\ldots(\lambda_{l_2} + \ldots + \lambda_{l_q})} A_{j_1, l_1}(t)\ldots A_{j_{q-1}, l_{q-1}}(t) A_{j_q, l_q}(t) e^{i\mu t}. \qquad (1.13)$$

В противном случае соответствующее слагаемое объединим со слагаемым вида

$$\frac{(-i)^{q-1}}{\lambda_{l_{q-1}}(\lambda_{l_q} + \lambda_{l_{q-1}})\ldots(\lambda_{l_2} + \ldots + \lambda_{l_q})} A_{j_1, l_1}(t)\ldots A_{j_{q-2}, l_{q-2}}(t) A_{j_q, l_q}(t) A_{j_{q-1}, l_{q-1}}(t) e^{i\mu t},$$

чтобы в сумме получить удвоенное выражение (1.13).

Продолжая аналогично, мы придем к слагаемым типа

$$\frac{(-i)^{q-1}(\lambda_{l_1} + \ldots + \lambda_{l_q})}{c\lambda_{l_q}\lambda_{l_{q-1}}\ldots\lambda_{l_2}} A_{j_1, l_1}(t)\ldots A_{j_q, l_q}(t) e^{i\mu t},$$

которые обращаются в нуль. Здесь c – константа, зависящая от l_r и j_r, $1 \le r \le q$.

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

2.1. Формулировка результата

Пусть $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n_1 + n_2}$ переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{|k| \le k_0} e^{i\lambda_k \omega t}(A_k(t)\mathbf{x} + B_k(t)\mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \sum_{|k| \le k_0} e^{i\lambda_k \omega t}(F_k(t)\mathbf{x} + G_k(t)\mathbf{y}) + \omega \sum_{1 \le |k| \le k_0} e^{i\lambda_k \omega t} H_k(t)\mathbf{x}. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Здесь $A_k(t)$, $B_k(t)$, $F_k(t)$, $G_k(t)$, $H_k(t)$ – матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены. Размерности этих матриц видны из системы уравнений (2.1) и не указываются, ω – большой положительный параметр. Также будем считать, что $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = -\lambda_{-k} \ne 0$ ($k = 1, 2, \ldots, k_0$), $\lambda_j \ne \lambda_k$ ($j \ne k$). Снова потребуем вещественности коэффициентов при $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в правых частях (2.1).

В усредненной системе будет фигурировать блочная матрица

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$C_{11} = A_0(t) + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{i}{\lambda_k} B_k(t) H_{-k}(t), \quad C_{12} = B_0,$$

$$C_{21} = F_0(t) + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{i}{\lambda_k}(G_k(t)H_{-k}(t) + H_k(t)A_{-k}(t)) - \sum_{\substack{1 \le |j|,\, |l| \le k_0,\, |k| \le k_0 \\ \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l = 0}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} H_j(t) B_k(t) H_l(t),$$

$$C_{22} = G_0(t) + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{i}{\lambda_k} H_k(t) B_{-k}(t).$$

Потребуем, чтобы матрица C не зависела от t, и будем интересоваться критическим случаем устойчивости

$$\sigma(C) \cap \{z|\mathrm{Re}z > 0\} = \varnothing, \quad \sigma(C) \cap \{z|\mathrm{Re}z = 0\} \neq \varnothing.$$

Пусть R_-^0 – корневое подпространство матрицы C, отвечающее ее собственным значениям с нулевыми действительными частями, а m – его размерность.

Рассмотрим усредненную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix},$$

введем матрицу $X_0(t)$ порядка $(n_1 + n_2) \times m$ и представим ее в виде

$$X_0(t) = V_0(t)e^{D_0 t}$$

аналогично тому, как это было сделано в разд. 1. Обозначим через $U_0(t)$ матрицу размера $n_1 \times m$, составленную из первых n_1 строк матрицы $V_0(t)$, а $(n_2 \times m)$-матрицу, составленную из n_2 последних строк, – через $P_0(t)$.

Критическую часть формального матричного решения системы (2.1) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k}(U_k(t) + V_k(t, \omega t)) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k}(P_k(t) + Q_k(t, \omega t)) \end{pmatrix} e^{\sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k} D_k(t-\tau)}. \tag{2.2}$$

При этом будем считать, что элементами матриц U_k, V_k, P_k, Q_0 и $Q_k(k \in \mathbb{N})$ являются тригонометрические многочлены, причем все $V_k(t, s)$ и $Q_k(t, s)$ имеют нулевые средние по второй переменной:

$$\langle V_k(t, \cdot)\rangle = \langle Q_0(t, \cdot)\rangle = \langle Q_k(t, \cdot)\rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Матрицы $D_k(k \in \mathbb{N})$ ищутся в классе $K(D_0)$.

Справедлива

Теорема 2. *Для любого $j \geq 0$ эффективно находятся частичные суммы*

$$U_j(t, \omega) \equiv \sum_{k=0}^{j} [\omega^{-k} U_k(t) + \omega^{-(k+1)} V_{k+1}(t, \omega t)], \tag{2.3}$$

$$P_j(t, \omega) \equiv \sum_{k=0}^{j} \omega^{-k}(P_k(t) + Q_k(t, \omega t)),$$
$$D_j(\omega) \equiv \sum_{k=0}^{j} \omega^{-k} D_k. \tag{2.4}$$

Пусть построение алгоритма может быть завершено и j_0 – первый номер, при котором дифференциальное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D_{j_0}(\omega)\boldsymbol{\eta} \tag{2.5}$$

сильно устойчиво или неустойчиво. Тогда существует такое положительное число ω_1, что при $\omega \geq \omega_1$ решения дифференциального уравнения (2.1) *равномерно экспоненциально устойчивы или неустойчивы в зависимости от аналогичных свойств решений дифференциального уравнения* (2.5).

Эффективность здесь понимается аналогично разд. 1.

2.2. Доказательство результата

Подставим правую часть равенства (2.2) в систему уравнений (2.1) и приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ω в обеих частях.

Пусть нам известны матрицы $U_k(t)$, $V_{k+1}(t, \omega t)$, $P_k(t)$, $Q_k(t, \omega t)$, D_k ($k = 0, 1, \ldots, j-1$). При $j = 0$ это предположение ничего не требует, а следовательно, выполняется. Покажем теперь, что мы сможем определить матрицы $U_j(t)$, $V_{j+1}(t, \omega t)$, $P_j(t)$, $Q_j(t, \omega t)$ и D_j.

Собирая коэффициенты при $\omega^{-(j-1)}$ во втором уравнении (2.1) и оставляя лишь слагаемые с нулевым средним по s, находим

$$Q_j(t, s) = \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} H_k(t) U_j(t) e^{i\lambda_k s} + \Gamma_{j1}(t, s), \tag{2.6}$$

где в $\Gamma_{j1}(t, s)$ собраны известные слагаемые.

Рассматриваем далее коэффициенты при ω^{-j} в первом уравнении (2.1) и полученное равенство разбиваем на два. Учитывая (2.6), получаем

$$\dot{U}_j(t) + U_j(t)D_0 + U_0(t)D_j = C_{11}U_j(t) + C_{12}P_j(t) + \Gamma_{j2}(t), \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} V_{j+1}(t, s) = \left(\sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_k(t) e^{i\lambda_k s} - \sum_{|k| \le k_0} \sum_{\substack{1 \le |l| \le k_0 \\ l \ne -k}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} B_k(t) H_l(t) e^{i(\lambda_k + \lambda_l)s} \right) \times \\ \times U_j(t) + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} B_k(t) e^{i\lambda_k s} P_j(t) + \Gamma_{j3}(t, s). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь через $\Gamma_{j2}(t)$ и $\Gamma_{j3}(t, s)$ обозначены известные слагаемые.

Теперь соберем коэффициенты при ω^{-j} во втором уравнении системы (2.1), усредним полученное соотношение по s и учтем формулу (2.8). Имеем

$$\dot{P}_j(t) + P_j(t)D_0 + P_0(t)D_j = C_{21}U_j(t) + C_{22}P_j(t) + \Gamma_{j4}(t), \tag{2.9}$$

где $\Gamma_{j4}(t)$ – известная матрица-функция. Объединим равенства (2.7) и (2.9) в одно уравнение

$$\dot{\Psi}_j(t) + \Psi_j(t)D_0 + V_0(t)D_j = C\Psi_j(t) + \Gamma_j(t),$$

и также, как в п. 2 из [8], найдем матрицы $\Psi_j(t)$ (а значит, $U_j(t)$ и $P_j(t)$) и D_j в интересующих нас классах. Наконец, подставляя найденные выражения для $U_j(t)$ и $P_j(t)$ в (2.6), (2.8), находим $Q_j(t, s)$ и $V_{j+1}(t, s)$. Тем самым завершено доказательство первой части теоремы 2.

Обоснование изложенного алгоритма проводится аналогично доказательству теоремы из [8]. В качестве матрицы, фигурирующей в замене переменных, здесь выступает блочная матрица

$$\Pi(t, \omega) = \begin{pmatrix} U_{n_0}(t, \omega) & W(t, \omega) \\ P_{n_0}(t, \omega) & Z(t, \omega) \end{pmatrix},$$

где $U_{n_0}(t, \omega)$ и $P_{n_0}(t, \omega)$ определяются равенствами (2.3) и (2.4) соответственно:

$$\begin{gathered} W(t, \omega) = R_1 + \omega^{-1} \left(\sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} (A_k(t)R_1 + B_k(t)R_2) e^{i\lambda_k \omega t} - \right. \\ \left. - \sum_{|k| \le k_0} \sum_{\substack{1 \le |l| \le k_0 \\ l \ne -k}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} B_k(t) H_l(t) e^{i(\lambda_k + \lambda_l)\omega t} R_1 \right), \end{gathered}$$

$$Z(t, \omega) = R_2 + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} H_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} R_1 + \omega^{-1} \left(\sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{\lambda_k^2} H_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} R_1 C_0 + \right.$$

$$+ \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{\lambda_k^2} \dot{H}_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} R_1 + \sum_{1 \le |k| \le k_0} \frac{1}{i\lambda_k} (F_k(t) R_1 + G_k(t) R_2) e^{i\lambda_k \omega t} -$$

$$- \sum_{\substack{1 \le |k|, |l| \le k_0 \\ k \ne -l}} \frac{1}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda_l)} H_k(t)(A_k(t) R_1 + B_k(t) R_2) e^{i(\lambda_k + \lambda_l)\omega t} -$$

$$\left. - \sum_{\substack{1 \le |j| \le k_0, |k| \le k_0, 1 \le |l| \le k_0 \\ l \ne -k, \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l \ne 0}} \frac{H_j(t) B_k(t) H_l(t)}{i\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)} e^{i(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)\omega t} R_1 \right),$$

причем столбцами матрицы $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ размера $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2 - m)$ являются произвольные базисные векторы из корневого подпространства матрицы C, отвечающего ее собственным значениям с отрицательными действительными частями, а C_0 – квадратная матрица размерности $n_1 + n_2 - m$ такая, что справедливо равенство $CR = RC_0$.

3. УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

3.1. Формулировка результата

Пусть k, m, n, p и l_0 – натуральные числа такие, что $k + p = n$, и $2p \le n$.

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{x}^{(n)} = L(t, \omega)\mathbf{x} \equiv \sum_{\alpha=0}^{n-1} L_\alpha(t, \omega)\mathbf{x}^{(\alpha)} \equiv \sum_{\alpha=k+1}^{n-1} A_{0,\alpha,0}\mathbf{x}^{(\alpha)} + \sum_{\alpha=0}^{k} \sum_{|l| \le l_0} A_{0,\alpha,l}(t) e^{i\lambda_l \omega t}\mathbf{x}^{(\alpha)} + $$
$$+ \sum_{q=1}^{p} \sum_{\alpha=0}^{k-q} \sum_{1 \le |l| \le l_0} \omega^q A_{q,\alpha,l}(t) e^{i\lambda_l \omega t}\mathbf{x}^{(\alpha)}. \tag{3.1}$$

Здесь все $A_{q,\alpha,l}(t)$, в том числе при $q = 0$, – квадратные матрицы порядка m, элементами которых являются тригонометрические многочлены, ω – большой положительный параметр, λ_l – такие попарно различные вещественные числа, что $\lambda_{-l} = -\lambda_l \ne 0$, $l = 1, 2, \ldots, l_0$, а $\lambda_0 = 0$.

Будем считать, что коэффициенты при неизвестной вектор-функции $\mathbf{x}$ и ее производных любого порядка в уравнении (3.1) вещественны.

Для $\alpha \in \mathbb{Z} \cap [0, n-1]$ введем матрицы

$$B_\alpha = \begin{cases} A_{0,\alpha,0}(t) + \sum\limits_{q=0}^{p} \sum\limits_{1 \le |l| \le l_0} \dfrac{1}{(-i\lambda_l)^{p+q}} A_{q,k-q,l}(t) A_{p,\alpha,-l}(t), & \alpha \in [0, k-p], \\ A_{0,\alpha,0}, \quad \alpha \in (k-p, n), \end{cases}$$

и потребуем, чтобы они не зависели от t. Рассмотрим теперь блочную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица, и предположим, что спектр $\sigma(B)$ содержится в замкнутой левой полуплоскости, причем хотя бы одна его точка лежит на мнимой оси:

$$\sigma(B) \cap \{z | \mathrm{Re} z > 0\} = \varnothing, \quad \sigma_0(B) \equiv \sigma(B) \cap \{z | \mathrm{Re} z = 0\} \neq \varnothing.$$

Пусть $\boldsymbol{\eta}$ – вектор размерности $m \times n$. Вектор, составленный из его первых m компонент, договоримся обозначать через $\boldsymbol{\eta}^1$; вектор, элементами которого являются следующие m компонент, – через $\boldsymbol{\eta}^2$, и т.д. Таким образом, $\boldsymbol{\eta}^n$ включает в себя последние m компонент вектора $\boldsymbol{\eta}$.

Рассмотрим усредненное уравнение

$$\mathbf{y}^{(n)} = L_0\mathbf{y} \equiv \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha \mathbf{y}^{(\alpha)}$$

и соответствующую систему

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}. \tag{3.2}$$

Пусть R_-^0 – корневое подпространство матрицы B, отвечающее ее собственным значениям с нулевыми действительными частями, а ν – его размерность. Обозначим через $Z_1(t)$ матрицу порядка $mn \times \nu$, вектор-столбцами которой является некоторый набор из линейно независимых решений этой системы с начальными условиями из R_-^0.

Запишем $Z_1(t)$ в виде

$$Z_1(t) = Z_0(t)e^{D_0 t},$$

где вектор-столбцы $\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_\nu(t)$ матрицы $Z_0(t)$ имеют вид (1.3), а D_0 – жорданова матрица порядка ν с единственным собственным значением, равным нулю. При этом кратности его элементарных делителей совпадают с кратностями элементарных делителей тех собственных значений матрицы B, которые лежат на мнимой оси.

Обозначим через $U_0(t)$ матрицу, образованную из первых m строк $Z_0(t)$. Критическую часть формального матричного решения уравнения (3.1) будем искать в виде

$$X(t, \tau; \omega) = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-j} U_j(t) + \sum_{j=k}^{\infty} \omega^{-j} V_j(t, \omega t)\right\} \exp\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-j} D_j\right)(t-\tau)\right]. \tag{3.3}$$

Неизвестные матрицы $U_j, D_j, j = 1, 2, \dots$, и $V_j, j = k, k+1, \dots$, подчиним следующим требованиям. Матрицы D_j находятся в классе $K(D_0)$ ($j = 1, 2, \dots$), а элементами матриц U_j и V_j являются некоторые тригонометрические многочлены, причем средние всех матриц-функций V_j по второй переменной равняются нулю:

$$\langle V_j(t, \cdot)\rangle = 0, \quad j = k, k+1, \dots.$$

Теорема 3. *Для любого целого неотрицательного j эффективно находятся частичные суммы*

$$\mathcal{U}_j(t, \omega) \equiv \sum_{l=0}^{j} [\omega^{-l} U_l(t) + \omega^{-(l+k)} V_{l+k}(t, \omega t)], \quad \mathcal{D}_j(\omega) \equiv \sum_{l=0}^{j} \omega^{-l} D_l.$$

Пусть построение алгоритма может быть завершено и j_0 – *первый номер, при котором дифференциальное уравнение*

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D_{j_0}(\omega)\boldsymbol{\eta} \equiv \sum_{k=0}^{j_0} \omega^{-k} D_k \boldsymbol{\eta} \tag{3.4}$$

сильно устойчиво или неустойчиво. Тогда существует такое положительное число ω_1, *что при* $\omega \geq \omega_1$ *решения дифференциального уравнения* (3.1) *равномерно экспоненциально устойчивы или неустойчивы в зависимости от аналогичных свойств решений дифференциального уравнения* (3.4).

Эффективное нахождение частичных сумм $U_j(t, \omega)$ и $D_j(\omega)$ сводится к решению νj задач о почти периодических решениях неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\mathbf{x}^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha \mathbf{x}^{(\alpha)} + \mathbf{f}(t)$$

с единой линейной частью. Здесь $\mathbf{f}(t)$ – известный векторный тригонометрический многочлен такой, что указанная задача разрешима.

3.2. Доказательство результата

Подставим правую часть равенства (3.3) в (3.1) вместо $\mathbf{x}$ и приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ω в правой и левой части.

Предположим, что нам известны матрицы $U_r(t)$, $V_{k+r}(t, s)$ и D_r, $r = 0, 1, \ldots, j-1$, где $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что при $j = 0$ эти предположения справедливы. Покажем, что можно найти следующую группу матриц $U_j(t)$, $V_{k+j}(t, s)$ и D_j в указанных выше классах.

Вычтем из коэффициентов, стоящих при ω^{p-j}, их среднее по s. В результате получим

$$V_{k+j}(t, s) = \sum_{\alpha=0}^{k-p} \sum_{1 \leq |l| \leq l_0} \frac{1}{(i\lambda_l)^n} A_{p,\alpha,l}(t) e^{i\lambda_l s} W_{j,\alpha}(t) + F_j(t, s), \tag{3.5}$$

где $F_j(t, s)$ – известная матрица, составленная из тригонометрических многочленов с нулевыми средними по s. Здесь также использовано обозначение

$$W_{j,\alpha}(t) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} C_\alpha^\beta U_j^{(\beta)}(t) D_0^{\alpha-\beta} + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta U_0^{(\beta)} \sum_{\rho=0}^{\alpha-\beta-1} D_0^\rho D_j D_0^{\alpha-\beta-1-\rho},$$

$$j = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n.$$

Теперь применим к коэффициентам, стоящим при ω^{-j}, операцию усреднения по s. Учитывая (3.5), получаем уравнение

$$W_{j,n} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha W_{j,\alpha} + \Phi_j(t), \tag{3.6}$$

где $\Phi_j(t)$ – известная матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены. Это уравнение является дифференциальным относительно U_j, так как агрегаты $W_{j,\alpha}$ содержат производные U_j до порядка α включительно.

Через $\mathbf{u}_{bj}$, $b = 1, 2, \ldots, \nu$, обозначим столбцы матрицы U_j, а через d_j^{ri} – элементы матрицы D_j. Уравнение (3.6) перепишем в виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_{bj}^{(n)}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1} C_n^\beta \sum_{\rho=n-\beta}^{\nu} \Theta_{\rho,n-1-\beta} d_j^{\gamma b} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \mathbf{e}^1_{\gamma-(n-1-\beta)}(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha \mathbf{u}_{bj}^{(\alpha)}(t) + \\
+ \sum_{\alpha=1}^{n-1} B_\alpha \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta \sum_{\gamma=\alpha-\beta}^{\nu} \Theta_{\gamma,\alpha-1-\beta} d_j^{\gamma b} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \mathbf{e}^1_{\gamma-(\alpha-1-\beta)}(t) + \boldsymbol{\psi}_{bj}(t), \quad b = 1, 2, \ldots, \nu,
\end{gathered} \tag{3.7}$$

где вектор-функции $\boldsymbol{\psi}_{bj}(t)$ зависят только от первых $(b-1)$ столбцов матриц $U_j(t)$ и D_j; $\Theta_{\rho,l}$ равно нулю, если столбец матрицы D_0 с номером ρ находится в числе первых l столбцов своей жордановой клетки, и единице в противном случае.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы будем считать, что индексы суммирования ρ в (3.7) пробегают значения от 1 до ν. Для этого определим функции $\mathbf{e}_\rho(t)$ при $\rho \in \mathbb{Z}_-$ равными, например, нулю.

Критерием разрешимости уравнений (3.7) в классе векторных тригонометрических многочленов является (см. [15, с. 229–231]) выполнение соотношения

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(\sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta \sum_{\rho=1}^{\nu} \Theta_{\rho,\alpha-1-\beta} d_j^{\rho b} \frac{d^\beta}{dt^\beta}\mathbf{e}^1_{\rho-(\alpha-1-\beta)}(t) + \boldsymbol{\psi}_{bj}(t) -\right.\right.\\ &\left.\left.-\sum_{\beta=0}^{n-1} C_n^\beta \sum_{\rho=1}^{\nu} \Theta_{\rho,n-1-\beta} d_j^{\rho b} \frac{d^\beta}{dt^\beta}\mathbf{e}^1_{\rho-(n-1-\beta)}(t), \mathbf{h}^n(t)\right)\right\rangle = 0, \quad b = 1, 2, \ldots, \nu,\end{aligned} \tag{3.8}$$

где вектор-функция $\mathbf{h}(t)$ – произвольное периодическое решение присоединенной к (3.2) системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = -B'\mathbf{y}. \tag{3.9}$$

Количество линейно-независимых периодических решений системы (3.9) равно κ – числу жордановых клеток матрицы D_0. Эти решения можно выбрать так, чтобы для вектор-функций $\mathbf{h}_1(t)$, $\mathbf{h}_2(t)$, …, $\mathbf{h}_\kappa(t)$, составленных из их последних m компонент, выполнялись соотношения

$$-\left\langle\left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} B_\alpha \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta \Theta_{\rho,\alpha-1-\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta}\mathbf{e}^1_{\rho-(\alpha-1-\beta)}(t) - \sum_{\beta=0}^{n-1} C_n^\beta \Theta_{\rho,n-1-\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta}\mathbf{e}^1_{\rho-(n-1-\beta)}(t), \mathbf{h}_l(t)\right)\right\rangle = \delta_{\rho k_l},$$
$$\rho = 1, 2, \ldots, \nu, \quad l = 1, 2, \ldots, \kappa.$$

Заменяя функцию $\mathbf{h}(t)$ по очереди каждой из функций $\mathbf{h}_l(t)$, $1 \le l \le \kappa$, в (3.8) при $b = 1$, получаем значения $d_j^{\rho 1}$, $\rho = k_1, k_2, \ldots, k_p$ (остальные $d_j^{\rho 1}$ – нулевые, поскольку матрица D_j ищется в классе $K(D_0)$). Далее, подставляя эти значения в (3.7), находим $\mathbf{u}_{1j}(t)$ в классе векторных тригонометрических многочленов. Теперь, когда $\boldsymbol{\psi}_{2j}$ не содержит неизвестных вектор-функций, можно определить d_j^{r2} из уравнения (3.8) при $b = 2$. Продолжая аналогично, мы получаем полностью матрицы $U_j(t)$ и D_j в соответствующих классах. А затем из (3.5) определяется $V_{k+j}(t, s)$.

Таким образом, мы доказали первую часть теоремы 3.

Как и ранее, идея обоснования состоит в проведении замены переменных, позволяющей перейти к системе уравнений, о свойствах устойчивости которой можно судить, применяя методы из [8]. При этом предварительно совершается переход от (3.1) к соответствующей системе уравнений первого порядка.

Замечания. 2. Не меняя по существу этих рассуждений, удается получить аналогичный результат для уравнений вида

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(n)} &= \sum_{\alpha=k}^{n-1} A_{\alpha,0}\mathbf{x}^{(\alpha)} + \theta\sum_{q=0}^{p}\sum_{1\le|l|\le l_0} \omega^q A_{2q,k-q,l}(t)e^{i\lambda_l\omega t}\mathbf{x}^{(k-q)} +\\ &+\sum_{q=0}^{p}\sum_{\alpha=0}^{k-1-q}\sum_{1-\delta_{0q}\le|l|\le l_0}\omega^q\left[A_{2q,\alpha,l}(t) + \omega^{\frac{1}{2}}A_{2q+1,\alpha,l}(t)\right]e^{i\lambda_l\omega t}\mathbf{x}^{(\alpha)},\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{если все } A_{2p+1,\alpha,l} \text{ равны нулю},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Кроме того, в случае $p = n/2$ требуется, чтобы все $A_{2p+1,\alpha,l}$ обращались в нуль.

3. Теория, изложенная в данной работе, без труда переносится на уравнения типа (3.1) и (3.0), содержащие вместо матриц-функций $A_{0,\alpha,l}(t)$ коэффициенты вида $\sum\limits_{0 \le j < +\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} A_{-j,\alpha,l}(t)$, которые представляют собой ряды, сходящиеся равномерно относительно вещественных t и больших значений ω. Аналогичное замечание справедливо для уравнений (1.1) и (2.1).

3.3. Линеаризованная задача об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса

Рассмотрим маятник длины l, который вращается в вертикальной плоскости около точки подвеса, совершающей вертикальные колебания по закону

$$y(t) = l\omega^{-1} \sum_{1 \le |k| \le k_0} a_k(t) e^{i\lambda_k \omega t},$$

где $a_k(t) = \bar{a}_{-k}(t)$ $(1 \le |k| \le k_0)$ – комплексные тригонометрические полиномы, $\lambda_k = -\lambda_{-k} \ne 0$ $(1 \le |k| \le k_0)$, ω – большой положительный параметр. Предполагается, что ось y направлена вверх.

Введем следующие обозначения: $\lambda \ge 0$ – коэффициент затухания, g – ускорение свободного падения, θ – угол отклонения в положительном направлении от нижнего положения равновесия. Тогда уравнение колебаний маятника имеет вид

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \frac{g - \ddot{y}(t)}{l}\sin\theta = 0.$$

Линеаризуя его в точке $\theta = \pi$, переходим к соотношению

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \frac{-g + \ddot{y}(t)}{l}\theta = 0.$$

Полагая $\kappa^2 = g/l$, получаем

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega^{-1} \sum_{1 \le |k| \le k_0} \ddot{a}_k(t) e^{i\lambda_k \omega t}\theta + \left(-\kappa^2 + \sum_{1 \le |k| \le k_0} 2i\lambda_k \dot{a}_k(t) e^{i\lambda_k \omega t}\right)\theta - \omega \sum_{1 \le |k| \le k_0} \lambda_k^2 a_k(t) e^{i\lambda_k \omega t}\theta = 0. \quad (3.11)$$

Эта система не имеет вида (3.1), но, в силу замечания 3, к ней применима теория, изложенная в данном пункте. Выпишем матрицу усреднения

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^2 - \sum\limits_{1 \le |k| \le k_0} \lambda_k^2 |a_k(t)|^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы выражение

$$b_{21} = \kappa^2 - \sum_{1 \le |k| \le k_0} \lambda_k^2 |a_k(t)|^2$$

не зависело от t. (Разумеется, отсюда вовсе не следует, что функции a_k не могут зависеть от t.)

Возможны следующие критические случаи:

1) $b_{21} < 0$, $\lambda = 0$ – случай пары чисто мнимых собственных значений;

2) $b_{21} = 0$, $\lambda > 0$ – случай простого нулевого собственного значения;

3) $b_{21} = 0$, $\lambda = 0$ – случай двукратного нулевого собственного значения, а именно жордановой клетки размера 2.

Для каждого случая приведем вид матрицы D_1. При этом важную роль будет играть функция

$$f(t) = 2 \sum_{1 \le |k| \le k_0} i\lambda_k \dot{a}_k(t) a_{-k}(t) + \sum_{\substack{1 \le |j|, |k|, |l| \le k_0 \\ \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l = 0}} \lambda_k^2 a_j(t) a_k(t) a_l(t).$$

Случай 1: $b_{21} < 0$, $\lambda = 0$. Здесь

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \frac{1}{\beta}\left\langle f(t)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2\beta t) & -\sin^2(\beta t) \\ \cos^2(\beta t) & \frac{1}{2}\sin(2\beta t) \end{pmatrix}\right\rangle,$$

где $\beta = \sqrt{-b_{21}}$.

След матрицы $D_1(\omega)$ равен нулю. Поэтому либо оба собственных значения лежат на мнимой оси, либо они вещественны и имеют разные знаки. В первом случае нужно перейти к поиску D_2. Во втором имеет место неустойчивость нулевого решения уравнения (3.11).

Случай 2: $b_{21} = 0$, $\lambda > 0$. Получаем, что $D_0 = 0$ – одномерная матрица, $D_1 = \langle f(t)\rangle$. Если $D_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (3.11) экспоненциально устойчиво, а если $D_1 > 0$ – неустойчиво.

Случай 3: $b_{21} = 0$, $\lambda = 0$. Здесь

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \langle f(t)\rangle & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^{-1}\langle f(t)\rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

При положительном $\langle f(t)\rangle$ решение $\theta = 0$ уравнения (3.11) неустойчиво, а при неотрицательном $\langle f(t)\rangle$ используемая теория не позволяет сделать никаких выводов об устойчивости. Заметим, что если $d_1^{21} < 0$, то наличие сильной устойчивости (неустойчивости) матрицы $D_2(\omega)$ будет зависеть лишь от d_2^{22}.

Автор выражает глубокую благодарность В.Б. Левенштаму за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юдович В.И.* Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 622–624.
2. *Юдович В.И.* Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями: Деп. в ВИНИТИ. № 1407-В2003 Деп.
3. *Юдович В.И.* Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями. Ч. 2: Деп. в ВИНИТИ. № 1408-В2003 Деп.
4. *Басистая Д.А., Левенштам В.Б.* Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Матем. и механ. сплошной среды. 2004. С. 46–48.
5. *Левенштам В.Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 6. С. 761–770; II // № 8. С. 1084–1091.
6. *Левенштам В.Б.* Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70. № 2. С. 174–205.
7. *Левенштам В.Б., Хатламаджиян Г.Л.* Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях // Изв. вузов. Математика. 2006. № 6. С. 35–47.
8. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
10. *Стрыгин В.В.* Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений // Прикл. матем. и механ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1042–1045.
11. *Стрыгин В.В.* Об асимптотическом интегрировании уравнений движения механических систем, находящихся под воздействием быстро осциллирующих сил // Прикл. матем. и механ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 845–853.
12. *Хатламаджиян Г.Л.* Исследование устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае: Деп. в ВИНИТИ. №15-В2006 Деп.
13. *Хатламаджиян Г.Л.* Об устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Деп. в ВИНИТИ. № 636-В2006 Деп.
14. *Майоров В.В.* К объему понятий сильной устойчивости и неустойчивости // Вестн. Яросл. ун-та. 1975. Вып. 13. С. 146–152.
15. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1956.