$$\partial_{m+j} v^i = 0, \qquad D_v h^{m+i}_j = \partial_j v^i - \partial_{m+j} v^{m+i} = 0,$$

откуда $v^i = v^i(x^k)$, $v^{m+i} = x^{m+j}\partial_j v^i + c^i(x^k)$, что определяет v как линейное поле. Заметим, что приведенные соотношения есть условия Коши-Римана для функций $v^i + \varepsilon v^{m+i}$ для случая алгебры дуальных чисел. Добавочное условие однородности приводит к известным координатам естественного лифта в $T(M)$: $v(v^i, x^{m+j}\partial_j v^i)$.

Литература

1. Шапуков Б. Н. Производная Ли в расслоенных пространствах. - Труды геом.семин., вып.13. Изд-во Казанск.ун- та, 1981, с.90-101.

2. Лаптев Б. Л. Производная Ли в пространстве опорных элементов. - Труды семин.по векторн. и тензорн.анализу, т.10. 1956, с.227-248.

3. Шапуков Б. Н. Структура тензорных расслоений, I. - Изв.вузов, Математика, 5. 1979, с.63-73.

4. Шапуков Б. Н. Структура тензорных расслоений, II. - Изв.вузов, Математика, 9. 1981, с.56-63.

Широков А.П.

ОБ ОДНОЙ СВЯЗНОСТИ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНО НЕВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Если в евклидовом трехмерном пространстве задать тангенциально невырожденную поверхность $\vec{r} = \vec{r}\,(x^1, x^2)$ оснащенную ортом нормали $\vec{n}$, то с помощью элемента ($\vec{r}$, $\vec{v}$) касательного расслоения этой поверхности можно задать ориентированную прямую, проходящую через точку с радиусом-вектором $\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{v}$ и параллельную орту $\vec{n}$. Используя вектор момента $\vec{m} = [\vec{\rho}\,\vec{n}]$, построим в многообразии прямых хорошо известный линейный элемент инвариантной римановой метрики

$$ds^2 = d\vec{m}\,d\vec{n}. \tag{I}$$

Записывая основные деривационные уравнения поверхности в виде

$$\overset{\circ}{\nabla}_j \vec{r}_i = b_{ij}\vec{n}, \qquad \vec{n}_i = -b^{\,s}_{i}\vec{r}_s,$$

получим для линейного элемента (I) выражение

$$ds^2 = \varepsilon_{is} b^{\,s}_{j}(dx^i dx^j + \delta v^i dx^j),$$

где ε_{ij}-дискриминантный бивектор, а δv^i – координаты абсолютного дифференциала вектора $\vec{v} = v^i \vec{r}_i$ $(i, j, k, \ldots = 1,2)$. Обозначая $v^i = x^{2+i}$, можно записать этот линейный элемент в виде

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

(α, β, ... = 1,2,3,4), и для метрического тензора $a_{\alpha\beta}$ получаются следующие отличные от нуля координаты :

$$a_{ij} = b^{\,s}_{i}\varepsilon_{js} + b^{\,s}_{j}\varepsilon_{is} + (b^{\,s}_{i}\varepsilon_{ms}\Gamma^m_{\ell j} + b^{\,s}_{j}\varepsilon_{ms}\Gamma^s_{\ell i})x^{2+\ell},$$

$$a_{i,2+j} = b^{\,s}_{i}\varepsilon_{js}.$$

Соответствующая риманова связность $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ имеет следующие отличные от нуля компоненты

$$\gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \tilde{b}^{\,i}_{s}\overset{\circ}{\nabla}_j b^{\,s}_{k}, \qquad \gamma^{n+i}_{j,n+k} = \Gamma^i_{jk},$$

$$\gamma^{n+i}_{jk} = x^{n+s}\partial_s\Gamma^i_{jk} + x^{n+s}(b_{sk}b^{\,i}_{j} + b_{sj}b^{\,i}_{k} - b_{jk}b^{\,i}_{s}) - \tag{2}$$

$$- x^{n+s}\Gamma^i_{sp}\tilde{b}^{\,p}_{q}\overset{\circ}{\nabla}_j b_k{}^q - \tilde{b}^{\,i}_{m}\overset{\circ}{\nabla}_j b^{\,m}_{k}.$$

Здесь Γ^i_{jk} – риманова связность рассматриваемой поверхности с метрическим тензором $g_{ij} = \vec{r}_i \vec{r}_j$, ∇_i – символ ковариантного дифференцирования в связности Γ^i_{jk}, $b^i_j = g^{is} b_{sj}$, $\tilde{b}^i_j = \tilde{b}^{is} g_{sj}$, а $\tilde{b}^{ij}$ – тензор, взаимный для b_{ij}. Номеру n пока следует придавать значение $n = 2$. Заметим, что компоненты γ^i_{jk} совпадают с компонентами римановой связности

$$\mathcal{G}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \tilde{b}^i_s \overset{\circ}{\nabla}_j b^s_k \tag{3}$$

сферического изображения исходной поверхности, а метрический тензор этого сферического изображения имеет строение

$$\mathcal{G}_{ij} = b^s_i b_{sj}. \tag{4}$$

Обращает на себя внимание тот факт, что хотя координаты метрического тензора $a_{\alpha\beta}$ зависели от дискриминантного бивектора ε_{ij}, но в состав компонент связности $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ этот бивектор не вошел. Поэтому связность (2) можно определить в касательном расслоении тангенциально невырожденной гиперповерхности евклидова пространства E_{n+1} любой размерности n +I, если считать, что индексы i, j, k, ... пробегают теперь значения от I до n. Легко проверить, что в связности (2) ковариантно постоянен аффинор h^α_β (α, β, γ, ... = I, ..., $2n$), у которого в индуцированных координатах (x^i ; x^{n+1}) отличны от нуля компоненты

$$h^{n+i}_j = b^i_j.$$

В связности (2) ковариантно постоянен также вертикальный лифт метрического тензора $\mathcal{G}_{ij}$ сферического изображения гиперповерхности в ее касательное расслоение. Что же касается аффинора естественной почти касательной структуры касательного расслоения, то он в общем случае не является ковариантно постоянным в связности (2); кроме того, при $n > 2$ эта связность перестает быть римановой.

Геометрический смысл связности (2) весьма прост: она является инвариантной связностью в многообразии прямых евклидова пространства E_{n+1} ([I], [2]). Это становится осо -

бенно ясно, если в качестве исходной гиперповерхности взять единичную гиперсферу; тогда $b_{ij}=-g_{ij}$, а формулы (2) приобретают вид

$$\tau^i_{jk}=\tau^{n+i}_{j,n+k}=\Gamma^i_{jk},$$

$$\tau^{n+i}_{jk}=x^{n+s}\partial_s\Gamma^i_{jk}+x^{n+s}(g_{sk}\delta^i_j+g_{sj}\delta^i_k-g_{jk}\delta^i_s),$$

причем теперь аффинор естественной почти касательной структуры ковариантно постоянен в связности $\tau^\alpha_{\beta\gamma}$.

Понятно, что компоненты связности (2) можно получить простой заменой переменных из компонент инвариантной связности многообразия прямых, построенной с помощью сферического изображения рассматриваемой гиперповерхности. Выясним характер этой замены. Если сферическое изображение исходной гиперповерхности $\vec r=\vec r(x^1,\dots,x^n)$ строить на единичной гиперсфере с центром в начальной точке пространства, то одна и та же прямая изобразится элементами ($\vec r$, $\vec v$) и ($\vec n$, $\vec w$) касательных расслоений гиперповерхности и гиперсферы, причем справедливо соотношение

$$\vec w=w^i\vec n_i=\vec r+v^i\vec r_i+\lambda\vec n,$$

так что

$$-b^i_s w^s=g^{is}(\vec r,\vec r_s)+v^i,\qquad \lambda=-(\vec n,\vec r).$$

В индуцированных координатах $y^i=x^i$, $y^{n+i}=w^i$ касательного расслоения сферического изображения инвариантная связность многообразия прямых имеет отличные от нуля компоненты

$$\tilde\tau^i_{jk}=\tilde\tau^{n+1}_{j,n+k}=\mathcal{G}^i_{jk},\tag{5}$$

$$\tilde\tau^{n+i}_{jk}=y^{n+s}\partial_s\mathcal{G}^i_{jk}+y^{n+s}(\mathcal{G}_{sk}\delta^i_j+\mathcal{G}_{sj}\delta^i_k-\mathcal{G}_{jk}\delta^i_s),$$

где $\mathcal{G}^i_{jk}$ и $\mathcal{G}_{jk}$ определены формулами (3) и (4).

Итак, замена переменных

$$y^i = x^i, \qquad y^{n+i} = -\tilde{b}^{is}(\vec{r}, \vec{r}_s) - \tilde{b}^i_s x^{n+s}, \tag{6}$$

т.е. фактически сопоставление ориентированной прямой нового элемента ($\vec{r}$, $y^{n+i}\vec{r}_i$) касательного расслоения исходной гиперповерхности вместо первоначального ($\vec{r}$, $x^{n+i}\vec{r}_i$) преобразует коэффициенты связности (2) к виду (5). Назовем использованное вначале соответствие между ориентированными прямыми пространства E_{n+1} и элементами ($\vec{r}$, $\vec{v}$) касательного расслоения гиперповерхности непосредственным. Тогда полученный результат можно оформулировать так :

При непосредственном соответствии между ориентированными прямыми пространства E_{n+1} и элементами касательного расслоения тангенциально невырожденной гиперповерхности инвариантная связность многообразия прямых индуцирует связность (2) в касательном расслоении гиперповерхности, не сохраняющую в общем случае аффинор естественной почти касательной структуры. Если же соответствие между прямыми и элементами касательного расслоения гиперповерхности задать по правилу (6), то индуцированная связность будет сохранять почти касательную структуру, причем эта индуцированная связность фактически сведется к той, которая возникает в касательном расслоении гиперсферы при непосредственном соответствии между ориентированными прямыми и элементами касательного расслоения сферического изображения данной гиперповерхности.

Заметим еще, что связность (2) можно представить в виде

$$\gamma^\alpha_{\beta\gamma} = {}^c\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + (g^\alpha_\sigma - f^\alpha_\sigma)\,{}^c\mathcal{P}^\sigma_{\beta\gamma} + Q^\alpha_{\beta\gamma},$$

где ${}^c\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ – естественный лифт связности Γ^i_{jk} ; f^α_β – аффинор естественной почти касательной структуры; g^α_β – горизонтальный проектор для структуры почти произведения, определяемой связностью Γ^i_{jk} в касательном расслоении; ${}^c\mathcal{P}^\alpha_{\beta\gamma}$ – полный лифт тензорного поля $\mathcal{P}^i_{jk} = \tilde{b}^i_s \nabla_j b^s_k$; $Q^\alpha_{\beta\gamma}$ – слоевой тензор с отличными от нуля компонентами

$$Q^{n+i}_{jk} = x^{n+s}(b_{sk}b^i_j + b_{sj}b^i_k - b_{jk}b^i_s).$$

Вводя полный лифт ${}^{c}b_{\alpha\beta}$ асимптотического тензора b_{ij} , получим

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma} = {}^{c}b_{\beta\sigma}\omega^{\sigma}h^{\alpha}_{\gamma} + {}^{c}b_{\gamma\sigma}\omega^{\sigma}h^{\alpha}_{\beta} - f^{\sigma}_{\beta}\,{}^{c}b_{\sigma\gamma}\,{}^{c}b^{\alpha}_{\tau}\,\omega^{\tau},$$

где ω^{α} - векторное поле слоевой гомотетии.

Неопределенность выбора начала отсчета в формуле (6) согласуется с тем фактом, что векторное поле

$$\vec{\xi} = g^{is}(\vec{a}, \vec{r}_s)\frac{\partial}{\partial x^{n+1}},$$

где $\vec{a}$ - любой постоянный вектор, является инфинитезимальной аффинной коллинеацией связности (2).

Литература

1. Юрьев В. А. Инвариантная связность многообразия прямых n -мерного евклидова пространства. - В кн.: Сборник аспирантских работ. Точные науки. Математика, вып.1. Казань, 1970, с.148-157.

2. Широков А. П. К вопросу о релятивной линейчатой геометрии. Дифференциальная геометрия, вып.3. Межвузовский научный сборник. Изд-во Сарат.ун-та, 1977, с.69-81.

Шурыгин В. В.

РАССЛОЕНИЯ СТРУЙ И МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРАМИ

А.П.Широковым было показано [1] , что q -касательное расслоение $T^{q}(V_n)$ над дифференцируемым многообразием V_n несет на себе структуру дифференцируемого многообразия над алгеброй $R(\varepsilon^{q})$ плюральных чисел. В предлагаемой работе изучаются расслоения q -струй дифференцируемых ростков $(R^{N},0)\to V_n$ ([2] , [3]) и вводятся обобщающие их расслоения $\mathcal{A}$ -струй, где $\mathcal{A}$ - локальная алгебра над полем действительных чисел. Основной целью работы является доказательство того, что указанные расслоения несут на себе структуру дифференцируемых многообразий над локальными алгебрами. Мно-