Р. М. Минькова, Ю. А. Шашкин, О сходимости линейных операторов класса S_m, *Матем. заметки*, 1969, том 6, выпуск 5, 591–598

https://www.mathnet.ru/mzm6967

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, №5 (1969), 591—598

УДК 517.5

О СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА S_m

Р. М. Минькова, Ю. А. Шашкин

Дано необходимое и достаточное условие сходимости последовательностей операторов класса S_m к единичному оператору. Библ. 5 назв.

В работе [1] П. П. Коровкин ввел понятия линейных функционалов и операторов класса S_m и исследовал условия их сходимости. Напомним соответствующие определения.

Пусть $\psi(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеющая только изолированные нули. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *простым* (*двойным*) *нулем* функции $\psi(x)$, если $\psi(x_0) = 0$ при переходе через x_0 функция $\psi(x)$ меняет знак (не меняет знака). Концы отрезка $[a, b]$, если они являются нулями функции $\psi(x)$, будем считать простыми нулями.

Линейный функционал $\Phi(f)$, определенный на пространстве $C = C[a, b]$ непрерывных функций, по определению *принадлежит классу* S_m, если существует функция $\psi(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеющая на нем не более m нулей (двойные нули считаются за два), такая, что $\Phi(f) \geqslant 0$ для любой функции $f(x) \in C$, у которой

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} \psi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Рассмотрим линейный оператор $L : C \to C$. Его значение на функции $f(x)$ обозначим через $L(f; x)$. Будем говорить, что оператор L принадлежит классу S_m, если $L(f; x_0)$

есть функционал класса S_m при каждом фиксированном значении $x_0 \in [a, b]$.

Ясно, что для классов S_m справедливы включения

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m \subset \dots$$

Определение. Конечная система функций

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x) \tag{1}$$

из пространства C называется *системой Коровкина* (*K-системой*) для операторов класса S_m, если для любой последовательности линейных операторов $L_n \in S_m$, $\| L_n \| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \dots)$ из равномерной сходимости

$$L_n(f_i; x) \to f_i(x) \qquad (i = 0, 1, \dots, s)$$

следует равномерная сходимость

$$L_n(f; x) \to f(x)$$

для любой функции $f(x) \in C$.

Замечание. В дальнейшем, говоря о K-системах, мы будем иногда опускать слова «для операторов класса S_m».

В работе [1] П. П. Коровкин дал достаточное (теорема 1) и необходимое (теорема 2) условия для того, чтобы система функций (1) была K-системой. Как показано Л. М. Зыбиным [2], при $s > m + 3$ это необходимое условие не является достаточным. Мы даем здесь необходимое и достаточное условие, которое содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система функций* (1) *была системой Коровкина операторов для класса* S_m, *необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального числа* r *и любых точек*

$$x_0 < x_1 < \dots < x_r$$

из отрезка $[a, b]$ *никакая строка матрицы*

$$\begin{pmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) \dots f_s(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) \dots f_s(x_1) \\ \dots & \dots \\ f_0(x_r) & f_1(x_r) \dots f_s(x_r) \end{pmatrix}$$

не была линейной комбинацией остальных ее строк с коэффициентами, в ряду которых имеется не более m перемен знака.

Замечание. При $m = 0$ этот результат совпадает с теоремой 2 работы Ю. А. Шашкина [3].

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. *Для того чтобы система функций* (1) *была K-системой, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x_0 \in [a, b]$ конечная проблема моментов*

$$F(f_i) = f_i(x_0) \qquad (i = 0, 1, \dots, s) \tag{2}$$

имела единственное решение F в классе S_m.

Доказательство. Пусть задана K-система функций (1). Рассмотрим непрерывное отображение T отрезка $[a, b]$ на подмножество M евклидова пространства E^{s+1}:

$$q = T(x) = (f_0(x), \ f_1(x), \dots, f_1(x)).$$

Покажем, что отображение T взаимно однозначно. Пусть, наоборот, имеются различные точки $x_0, x_1 \in [a, b]$, которые склеиваются при этом отображении: $T(x_0) = T(x_1)$. Построим последовательность линейных операторов L_n: $C \to C$ следующим образом:

$$L_n(f; x) = \begin{cases} f(x), & |x - x_0| \geqslant 1/n, \\ f(x_1) + n(x - x_0)[f(x_1) - f(x_0 - 1/n)], & \\ \qquad\qquad x_0 - 1/n \leqslant x \leqslant x_0, & \\ f(x_1) + n(x - x_0)[f(x_0 + 1/n) - f(x_1)], & \\ \qquad\qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 1/n. & \end{cases}$$

Операторы L_n положительны и поэтому принадлежат всем классам S_m. Кроме того,

$$\| L_n(f_i; x) - f_i(x) \|_C \to 0 \ (n \to \infty; \ i = 0, 1, \dots, s),$$

а если $g(x) \in C$, $g(x_0) \neq g(x_1)$, то $L_n(g; x)$ не сходится к $g(x)$ в точке x_0. Поэтому отображение T должно быть взаимно однозначным и, следовательно, гомеоморфным.

Ясно, что для любой точки $x_0 \in [a, b]$ решением проблемы моментов (2) является функционал

$$F_0(f) = f(x_0) \ \text{ для всех } \ f(x) \in C$$

(дельта-функция), принадлежащий классу S_m. Пусть в этом классе имеется другой функционал F_1, для которого также справедливы равенства (2). По определению класса S_m функционалу F_1 соответствует функция $\psi(x) \in C$, имеющая не более m нулей: $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, $k \leqslant m$. Пусть M_j — образ интервала (x_j, x_{j+1}) при отображении T. По теореме Ф. Рисса функционал F_1 имеет представление

$$F_1(f) = \int_M f(q)\, d\varphi(q),$$

где функция $\varphi(q)$ имеет ограниченную вариацию на M По лемме 1 работы [1] функция $\varphi(q)$ не убывает на тех дугах M_j, где функция $\psi(x)$ положительна, и не возрастает там, где $\psi(x)$ отрицательна.

Перейдем от кривой $M = T([a, b])$ ко множеству M' следующим образом: оставим на месте множество $N \subset M$, состоящее из тех дуг M_j, где функция $\varphi(q)$ не убывает, и тех концов дуг $q_j = Tx_j$, где $\varphi(q_j + 0) \geqslant \varphi(q_j - 0)$; множество $M \setminus N$ отобразим симметрично относительно начала координат. Условие (2) перепишем в векторной форме

$$\int_M q\, d\varphi(q) = q_0, \tag{3}$$

где $q_0 = T(x_0)$. Введя не убывающую на M' функцию

$$\mu(q) = \begin{cases} \varphi(q), & \text{если } q \in N, \\ -\varphi(-q), & \text{если } q \in M' \setminus N, \end{cases}$$

получим из (3)

$$\int_{M'} q\, d\mu(q) = q_0. \tag{4}$$

Равенство (4) означает, что точка $\frac{q_0}{\operatorname{var} \mu(q)} = \frac{q_0}{\| F_1 \|}$ является барицентром вероятностной меры, которая определяется на M' функцией $\frac{\mu(q)}{\operatorname{var} \mu(q)}$. По теореме Каратеодори [4], [5] на замыкании $\overline{M'}$ множества M' существует вероятностная мера с конечным носителем и тем же барицентром $\frac{q_0}{\| F_1 \|}$, т. е. существуют точки $q_k \in \overline{M'}$ и числа $\mu_k > 0$, $\Sigma \mu_k = 1$ ($k = 1, 2, \ldots, r$; $r \leqslant s + 2$) такие, что

$$\frac{q_0}{\| F_1 \|} = \sum_{k=1}^{r} \mu_k q_k \tag{5}$$

или

$$f_i(x_0)=\sum\nolimits_{k=1}^{r}\gamma_k f_i(x_k) \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ s),$$

где $x_k=T^{-1}(q_k)$, $\gamma_k=\|F_1\|\mu_k\geqslant 0$, если q_k принадлежит тем дугам M_j, где функция $\varphi(q)$ не убывает, и $x_k=$ $=T^{-1}(-q_k)$, $\gamma_k=-\|F_1\|\mu_k\leqslant 0$, если q_k принадлежит тем дугам M_j, где функция $\varphi(q)$ не возрастает. Если сумма (5) имеет одно слагаемое и $q_1=q_0$, то функционалы F_0 и F_1 совпадают вопреки предположению. В остальных случаях, если точки x_k расположены на $[a,\ b]$ в порядке возрастания, в ряду коэффициентов γ_k имеется не более m перемен знака, так как число дуг M_j не превосходит $m+1$.

Построим последовательность линейных операторов $L_n\colon C\to C$ следующим образом:

$$g_n(x)=L_n(f;x)=\begin{cases} f(x), & |x-x_0|\geqslant 1/n,\\ \sum\nolimits_{k=1}^{r}\gamma_k f(x_k), & x=x_0,\\ 0, & x=x_0\pm 1/2n,\\ \text{линейна на каждом из отрезков} & \\ 1/2n\leqslant|x-x_0|\leqslant 1/n,\ 0\leqslant x-x_0\leqslant 1/2n, & \\ \qquad -1/2n\leqslant x-x_0\leqslant 0. & \end{cases}$$

Покажем, что оператор $L_n\in S_m$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть

$$\gamma_1\geqslant 0,\ \ldots,\ \gamma_{j_1}\geqslant 0;\quad \gamma_{j_1+1}<0,\ \ldots,\ \gamma_{j_2}<0;\ \ldots;$$
$$\operatorname{sign}\gamma_{j_p+1}=(-1)^p,\ \ldots,\ \operatorname{sign}\gamma_{j_{p+1}}=(-1)^p$$
$$(p\leqslant m;\ \gamma_{j_{p+1}}=\gamma_r).$$

Возьмем непрерывную функцию

$$\psi(x)=\prod\nolimits_{k=1}^{p+1}(x_{j_k}-x).$$

Ясно, что

$$\sum\nolimits_{k=1}^{r}\gamma_k f(x_k)\geqslant 0$$

для каждой непрерывной функции $f(x)$ такой, что $\operatorname{sign} f(x)=$ $=\operatorname{sing}\psi(x)$, и, следовательно, при фиксированном x

из отрезка $|x - x_0| \leqslant 1/2n$ функционал

$$g_n(x) = L_n(f; x) \in S_m.$$

Для фиксированного x из множества

$$|x - x_0| \geqslant 1/2n$$

функционал $L_n(f; x) \in S_0$. Таким образом, операторы L_n принадлежат классу S_m. Кроме того,

$$\| L_n(f_i; x) - f_i(x) \|_C \to 0 \quad (n \to \infty; \ i = 0, 1, \ldots, s),$$

но для функции

$$g(x) \in C, \ g(x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$
$$g(x_0) = 1,$$

$L_n(g; x)$ не сходится к $g(x)$ в точке x_0. Получили противоречие.

Достаточность леммы 1 доказывается так же, как теорема 1 из [1].

ЛЕММА 2. *Для единственности решения проблемы моментов* (2) *в классе* S_m *необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального числа* r *и любых точек*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_r$$

отрезка $[a, b]$ *никакая строка матрицы*

$$\begin{pmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \ldots & f_s(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots & f_s(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_0(x_r) & f_1(x_r) & \ldots & f_s(x_r) \end{pmatrix}$$

не была линейной комбинацией остальных ее строк с коэффициентами, в ряду которых имеется не более m *перемен знака.*

Необходимость. Пусть

$$f_i(x_0) = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k f_i(x_k) \qquad (i = 0, 1, \ldots, s),$$

где $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$ и в ряду коэффициентов γ_k имеется не более m перемен знака. Как было показано при доказательстве леммы 1, существует такая непрерывная функция $\psi(x)$, имеющая на $[a, b]$ не более m нулей, что значение функционала

$$F_1(f) = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k f(x_k)$$

неотрицательно на всякой функции $f(x) \in C$,

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} \psi(x).$$

Таким образом, $F_1 \in S_m$. Кроме того,

$$F_1(f_i) = f_i(x_0).$$

Итак, проблема моментов (2) имеет не менее двух различных решений в классе S_m.

Достаточность следует из доказательства леммы 1.

Из лемм 1 и 2 непосредственно получается теорема.

Следствие (П. П. Коровкин [1]). *Минимальное число функций, образующих K-систему для операторов класса S_m, равно $m+3$.*

Доказательство. Пусть $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ является K-системой и $s \leqslant m+2$. Возьмем $m+3$ произвольные точки на отрезке $[a, b]$: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+3}$. При отображении T, определенном выше, они переходят в точки $q_1, \ldots, q_{m+3} \in E^s$, которые ввиду неравенства $s \leqslant m+2$ линейно зависимы:

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_{m+3} q_{m+3} = 0,$$

где числа α_i не все равны нулю. Рассмотрим самый «плохой» случай: все коэффициенты α_i отличны от нуля, и знаки их чередуются.

Тогда

$$q_2 = \beta_1 q_1 + \beta_3 q_3 + \ldots + \beta_{m+3} q_{m+3}, \tag{6}$$

где

$$\beta_i = -\alpha_i/\alpha_2 \quad (i = 1, 3, 4, \ldots, m+3)$$

и

$$\beta_1 > 0, \beta_3 > 0.$$

Поэтому коэффициенты β_i меняют знак не более m раз. Расписав равенство (6) по координатам, мы получаем в силу теоремы противоречие.

Замечание. Доказанная теорема и ее следствие переносятся на периодический случай с очевидным ограничением: в определении соответствующего класса S_m число m должно быть четным.

Уральский государственный
университет

Поступило
14.X.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Коровкин П. П., Сходящиеся последовательности линейных операторов, Успехи матем. наук, **17**, № 4 (1962), 147—152.

[2] Зыбин Л. М., К условиям сходимости последовательности линейных операторов класса S_m, Учен. записки Новгородского пед. ин-та, **7** (1966), 37—43.

[3] Шашкин Ю. А., Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., **26**, № 4 (1962), 495—512.

[4] Carathéodory C., Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Circ. mat. Palermo, **32**, № 2 (1911), 193—217.

[5] Danzer L., Grünbaum B., Klee V., Helly's theorem and its relatives, в кн.: «Convexity», Proc. Symposia Pure Math., **7**, (1963), 101—180.