Е. В. Соколов, Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 1083–1093

https://www.mathnet.ru/smj7816

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ГРАФОВ ГРУПП. I

Е. В. Соколов

Аннотация. Доказана теорема о структуре конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп. Приводятся также некоторые вспомогательные результаты, необходимые для описания подгрупп указанного типа, отделимых корневым классом групп.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.514

Ключевые слова: фундаментальная группа графа групп, обобщенное свободное произведение, HNN-расширение, структурная теорема для абелевых подгрупп.

§ 1. Введение

Настоящая статья служит первой частью работы, посвященной изучению отделимости корневыми классами групп конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. Непосредственно об отделимости и корневых классах речь пойдет во второй части. Задача данной статьи состоит в описании внутреннего устройства конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп. Кроме того, следует отметить, что бо́льшая часть доказанных в ней вспомогательных утверждений используется также и во второй части работы.

Насколько известно автору, результатов, из которых можно было бы легко вывести описание абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп, не публиковалось. Полностью вопрос о строении подгрупп (не только абелевых) решен лишь для трех свободных конструкций: обычного свободного произведения семейства групп [1], обобщенного свободного произведения двух групп [2] и HNN-расширения с семейством проходных букв [3]. Незадолго до выхода работ [2, 3] Д. И. Молдаванский [4] дал прямое доказательство утверждений, описывающих абелевы подгруппы обобщенного свободного произведения двух групп и HNN-расширения с одной проходной буквой (см. предложение 4 ниже). Именно это описание используется в настоящей статье для получения основного результата. Чтобы сформулировать последний, приведем ряд определений и обозначений, действующих до конца изложения.

Пусть Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин $\mathscr{V}$ и множеством ребер $\mathscr{E}$ (допускаются петли и кратные ребра). Выбирая произвольным образом направления для всех ребер графа Γ, обозначая вершины, являющиеся концами ребра $e \in \mathscr{E}$, через $e(1)$, $e(-1)$ и сопоставляя каждой вершине $v \in \mathscr{V}$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in \mathscr{E}$ — группу H_e

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, `https://rscf.ru/project/22-21-00166/`.

и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$, получим ориентированный *граф групп*

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathscr{V}),\ H_e\ (e \in \mathscr{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1)).$$

Будем называть группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ и подгруппы $H_e\varphi_{+e}$, $H_e\varphi_{-e}$ $(e \in \mathscr{E})$ соответственно *вершинными* и *реберными*. Последние для краткости будем обозначать через H_{+e} и H_{-e}.

Выберем некоторое максимальное дерево $\mathscr{T}$ в графе Γ, обозначим через $\mathscr{E}_{\mathscr{T}}$ множество его ребер и рассмотрим представление

$$\left\langle \begin{matrix} G_v\ (v \in \mathscr{V}), \\ t_e\ (e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}}) \end{matrix} \ \middle|\ \begin{matrix} H_{+e} = H_{-e}\ (e \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}), \\ t_e^{-1}H_{+e}t_e = H_{-e}\ (e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}}) \end{matrix} \right\rangle,$$

образующими в котором являются образующие групп G_v $(v \in \mathscr{V})$ и символы t_e $(e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}})$, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v $(v \in \mathscr{V})$ и всевозможные соотношения вида

$$\begin{aligned} h_e\varphi_{+e} &= h_e\varphi_{-e} \quad (e \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}},\ h_e \in H_e), \\ t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e &= h_e\varphi_{-e} \quad (e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}},\ h_e \in H_e), \end{aligned}$$

где $h_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h_e относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$. Известно, что все представления описанного вида, соответствующие различным максимальным деревьям в графе Γ, определяют одну и ту же группу, которая называется *фундаментальной группой графа групп* $\mathscr{G}(\Gamma)$ и обычно обозначается через $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ [5, § 5.1]. Далее будем считать выбранное дерево $\mathscr{T}$ фиксированным и использовать для группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ более короткое обозначение $\mathfrak{G}$.

Пусть (X, Y) — пара подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим следующий набор условий:

(λ) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы G_v $(v \in \mathscr{V})$, $Y = 1$;

(μ) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathscr{E}, \varepsilon = \pm 1)$, Y — бесконечная циклическая подгруппа и $[X, Y] = 1$;

(μ_1) справедливо условие (μ) и $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$;

(μ_2) справедливо условие (μ) и $g^{-1}Yg \cap G_v = 1$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $v \in \mathscr{V}$;

(μ_3) справедливо условие (μ) и $g^{-1}xyg \notin G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $v \in \mathscr{V}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})$ $(1 \le k \le 3)$ семейство всех пар подгрупп группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию (λ) или (μ_k), и положим

$$\mathfrak{A}_k(\mathfrak{G}) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})\}.$$

Теорема. *Для произвольной подгруппы A группы $\mathfrak{G}$ следующие четыре утверждения равносильны.*

k. *Подгруппа A сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{G})$.* $(1 \le k \le 3)$

4. *A — конечно порожденная абелева подгруппа.*

Из условий (μ_1)–(μ_3) наиболее естественно выглядит второе. Появление условия (μ_3) объясняется желанием доказать несколько большее теми же средствами. Условие (μ_1) используется во второй части работы для описания конечно порожденных абелевых подгрупп, отделимых корневым классом групп. Оставшаяся часть данной статьи посвящена доказательству сформулированной теоремы.

§ 2. Об обобщенных свободных произведениях и HNN-расширениях

Напомним, что если граф Γ состоит из двух вершин и соединяющего их ребра e, то группа $\mathfrak{G}$ называется *обобщенным свободным произведением групп* $G_{e(1)}$ *и* $G_{e(-1)}$ *с объединенными подгруппами* H_{+e} *и* H_{-e}. Если же граф Γ имеет только одну вершину v и петлю e в ней, то группу $\mathfrak{G}$ называют *HNN-расширением группы* G_v *с проходной буквой* t_e *и связанными подгруппами* H_{+e} *и* H_{-e}, а группу G_v — *базовой группой* данного HNN-расширения (используемая в данной статье терминология, касающаяся обобщенных свободных произведений и HNN-расширений, следует монографии [6]). Далее будем считать, что

$$P = \langle B_1 * B_{-1};\ H_1 = H_{-1}\rangle \quad \text{и} \quad E = \langle B_1 = B_{-1},\ t;\ t^{-1}H_1t = H_{-1}\rangle$$

— соответственно обобщенное свободное произведение групп B_1, B_{-1} и HNN-расширение группы $B_1 = B_{-1}$ с объединенными/связанными подгруппами H_1 и H_{-1} (двойное обозначение базовой группы упрощает проведение доказательств одновременно для групп P и E). Представление элемента

$\mathfrak{p}$) $x \in P$,

$\mathfrak{e}$) $x \in E$

в виде произведения

$\mathfrak{p}$) $b_1 \dots b_n$ $(n \geq 1)$,

$\mathfrak{e}$) $b_0t^{\varepsilon_1}b_1 \dots t^{\varepsilon_n}b_n$ $(n \geq 0)$

называется *приведенной записью* этого элемента *длины* n, если

$\mathfrak{p}$) $b_1, \dots, b_n \in B_1 \cup B_{-1}$ и никакие два соседних сомножителя b_i, b_{i+1} не лежат одновременно в группе B_1 или в группе B_{-1};

$\mathfrak{e}$) $b_0, b_1, \dots, b_n \in B_1 = B_{-1}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и для каждого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ из равенства $\varepsilon_k = -\varepsilon_{k+1}$ следует, что $b_k \notin H_{-\varepsilon_k}$.

Уточним, что здесь и далее произведение $t^{\varepsilon_i}b_i \dots t^{\varepsilon_j}b_j$ принимается равным 1 при $i > j$. В частности, $b_0t^{\varepsilon_1}b_1 \dots t^{\varepsilon_n}b_n = b_0$ при $n = 0$. Легко видеть, что, каким бы ни был элемент x, он обладает хотя бы одной записью указанного выше вида. Данную запись называют *циклически приведенной*, если

$\mathfrak{p}$) n четно или равно 1;

$\mathfrak{e}$) либо $n = 0$, либо $n > 0$, $b_0 = 1$ и из равенства $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$ следует, что $b_n \notin H_{-\varepsilon_n}$.

Элемент x будем называть

– *циклически приведенным*, если он обладает хотя бы одной циклически приведенной записью;

– *примитивным*, если $x \in B_1 \cup B_{-1}$.

Из теорем о нормальной форме для обобщенных свободных произведений и HNN-расширений [6, гл. IV, теоремы 2.1, 2.6] вытекает, что все приведенные записи элемента x имеют одну и ту же длину (называемую далее *длиной данного элемента*) и потому элемент x непримитивен тогда и только тогда, когда его длина больше 1 (если $x \in P$) или 0 (если $x \in E$). Отсюда легко следует, что в группе P справедливо равенство $H_1 = B_1 \cap B_{-1} = H_{-1}$.

Всюду далее если X — некоторая группа, Y_1, Y_2 — ее подгруппы, то запись $Y_1 \times Y_2$ означает, что подгруппа $\mathrm{sgp}\{Y_1, Y_2\}$ раскладывается в прямое произведение подгрупп Y_1 и Y_2. Также через $\sim_X$ будем обозначать отношение сопряженности в группе X, через $\langle x\rangle$ — циклическую подгруппу, порожденную элементом $x \in X$, и через $\ell(x)$ — длину элемента x (если $X = P$ или $X = E$).

Предложение 1 [6, гл. IV, теоремы 2.5, 2.8]. *Пусть $X = P$ или $X = E$. Если $x, y \in X$ — сопряженные циклически приведенные элементы, хотя бы один из которых непримитивен, то $\ell(x) = \ell(y)$.*

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения.*

I. *Пусть $x \in P$ — непримитивный, не являющийся циклически приведенным элемент и $b_1 b_2 \dots b_n$ $(n \geq 3)$ — некоторая его приведенная запись. Тогда существуют элемент $a \in B_1 \cup B_{-1}$ и число m $(1 \leq m \leq \frac{n-1}{2})$ такие, что*

а) *элемент $u = b_{m+1} \dots b_{n-m} a$ не лежит в подгруппе $H_1 = H_{-1}$;*

б) *если $\ell(u) = 1$, то $a \in H_1 = H_{-1}$;*

в) *если $\ell(u) > 1$, то $a \notin H_1 = H_{-1}$ и произведение $b_{m+1} \dots b_{n-m} a$ является циклически приведенной записью элемента u;*

г) *произведение*

$$b_1 \dots b_m b_{m+1} \dots b_{n-m} d b_{m-1}^{-1} \dots b_1^{-1},$$

где $d = a b_m^{-1}$, служит приведенной записью элемента x.

Как следствие:

1) *$x = vuv^{-1}$, где $v = b_1 \dots b_m$;*

2) *если элемент u примитивен, то $u = b_{m+1} a$ и $b_1 \dots b_m u b_m^{-1} \dots b_1^{-1}$ — приведенная запись элемента x;*

3) *если элемент u непримитивен, то для любого $q > 0$*

$$b_1 \dots b_m \big(b_{m+1} \dots b_{n-m} a\big)^{q-1} b_{m+1} \dots b_{n-m} d b_{m-1}^{-1} \dots b_1^{-1}$$

— приведенная запись элемента $x^q = vu^q v^{-1}$ длины $q\ell(u) + 2\ell(v) - 1$.

II. *Пусть $x \in E$ — непримитивный элемент и $b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_n} b_n$ $(n \geq 1)$ — некоторая его приведенная запись. Тогда существуют элемент $a \in B_1 = B_{-1}$ и число m $(0 \leq m \leq \frac{n}{2})$ такие, что произведение $[t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}]a$ является циклически приведенной записью определяемого им элемента u и произведение*

$$b_0[t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m][t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}]a\big[b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}\big] b_0^{-1}$$

служит приведенной записью элемента x (здесь и далее в этом предложении квадратные скобки напоминают о том, что их содержимое может быть равно 1).

Как следствие:

1) *$x = vuv^{-1}$, где $v = b_0[t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m]$;*

2) *если элемент u примитивен, то $u = a$ и*

$$b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m u b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента x;

3) *если элемент u непримитивен, то для любого $q > 0$*

$$b_0[t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m]\big(t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m} a\big)^q \big[b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}\big] b_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента $x^q = vu^q v^{-1}$ длины $q\ell(u) + 2\ell(v)$.

Доказательство. I. Воспользуемся индукцией по n. Так как элемент x непримитивен и не является циклически приведенным, то n — нечетное число, не меньшее 3, и существует такое $\varepsilon = \pm 1$, что $b_1, b_n \in B_\varepsilon \setminus H_\varepsilon$. Если $b_n b_1 \notin H_\varepsilon$, то произведение $b_2 \dots b_{n-1} b_n'$ (где $b_n' = b_n b_1$) — циклически приведенная запись элемента $u = b_1^{-1} x b_1$ длины $n - 1 \geq 2$. Следовательно, можно положить $a = b_n b_1$ и $m = 1$. Те же элемент и число являются искомыми, если $n = 3$ и $b_3 b_1 \in H_\varepsilon = H_{-\varepsilon}$. В этом случае $u = b_2(b_3 b_1) \in B_{-\varepsilon} \setminus H_{-\varepsilon}$.

Пусть $b_n b_1 \in H_\varepsilon = H_{-\varepsilon}$ и $n > 3$. Тогда произведение $b'_1 b'_2 \dots b'_{n-2}$, где $b'_i = b_{i+1}$ $(1 \le i \le n-3)$ и $b'_{n-2} = b_{n-1} b_n b_1$, служит приведенной записью элемента $x' = b_1^{-1} x b_1$ длины $n - 2 \ge 3$ и по индуктивному предположению существуют элемент $a' \in B_1 \cup B_{-1}$ и число m' $(1 \le m' \le \frac{n-3}{2})$ такие, что

а$'$) элемент $u' = b'_{m'+1} \dots b'_{n-2-m'} a'$ не лежит в подгруппе $H_1 = H_{-1}$;

б$'$) если $\ell(u') = 1$, то $a' \in H_1 = H_{-1}$;

в$'$) если $\ell(u') > 1$, то $a' \notin H_1 = H_{-1}$ и произведение $b'_{m'+1} \dots b'_{n-2-m'} a'$ является циклически приведенной записью элемента u';

г$'$) произведение

$$b'_1 \dots b'_{m'} b'_{m'+1} \dots b'_{n-2-m'} d' (b'_{m'-1})^{-1} \dots (b'_1)^{-1},$$

где $d' = a'(b'_{m'})^{-1}$, служит приведенной записью элемента x'.

Положим $a = a'$ и $m = m' + 1$. Тогда указанные в пп. в$'$, г$'$ произведения приобретают вид

$$b_{m+1} \dots b_{n-m} a, \quad b_2 \dots b_m b_{m+1} \dots b_{n-m} d b_{m-1}^{-1} \dots b_2^{-1},$$

где $d = a b_m^{-1}$. Отсюда и из равенств $x = b_1 x' b_1^{-1}$, $\ell(x') = n - 2$, $\ell(x) = n$ следует, что элемент a и число m являются искомыми.

II. Вновь воспользуемся индукцией по n. Если либо $\varepsilon_1 + \varepsilon_n \ne 0$ (это верно, в частности, при $n = 1$), либо $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$ и $b_n b_0 \notin H_{-\varepsilon_n}$, то произведение $t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_n} b_n b_0$ является циклически приведенной записью определяемого им элемента $u = b_0^{-1} x b_0$ и можно положить $a = b_0$, $m = 0$. Поэтому далее будем считать, что $n \ge 2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$, $b_n b_0 \in H_{-\varepsilon_n}$ и, следовательно, $t^{\varepsilon_n} b_n b_0 t^{\varepsilon_1} \in B_1 = B_{-1}$.

Если $n = 2$ и $a = t^{\varepsilon_2} b_2 b_0 t^{\varepsilon_1} b_1$, то $x = b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 a b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}$ и, так как $\ell(x) = 2$, то $b_1 a b_1^{-1} \notin H_{-\varepsilon_1}$; значит, элемент a и число $m = 1$ оказываются искомыми. Если $n > 2$ и $b'_{n-2} = b_{n-1} t^{\varepsilon_n} b_n b_0 t^{\varepsilon_1}$, то $b'_{n-2} \in B_1 = B_{-1}$ и потому произведение

$$b'_0 t^{\varepsilon'_1} b'_1 \dots t^{\varepsilon'_{n-3}} b'_{n-3} t^{\varepsilon'_{n-2}} b'_{n-2},$$

где $b'_i = b_{i+1}$ $(0 \le i \le n-3)$, $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i+1}$ $(1 \le i \le n-2)$, служит приведенной записью элемента $x' = (b_0 t^{\varepsilon_1})^{-1} x (b_0 t^{\varepsilon_1})$ длины $n - 2 > 0$.

По индуктивному предположению существуют элемент $a' \in B_1 = B_{-1}$ и число m' $(0 \le m' \le \frac{n-2}{2})$ такие, что произведение

$$[t^{\varepsilon'_{m'+1}} b'_{m'+1} \dots t^{\varepsilon'_{n-2-m'}} b'_{n-2-m'}] a'$$

является циклически приведенной записью определяемого им элемента u' и произведение

$$b'_0 [t^{\varepsilon'_1} b'_1 \dots t^{\varepsilon'_{m'}} b'_{m'}] [t^{\varepsilon'_{m'+1}} b'_{m'+1} \dots t^{\varepsilon'_{n-2-m'}} b'_{n-2-m'}] a' \\ \times [(b'_{m'})^{-1} t^{-\varepsilon'_{m'}} \dots (b'_1)^{-1} t^{-\varepsilon'_1}] (b'_0)^{-1}$$

служит приведенной записью элемента x'. Положим $a = a'$, если $m' > 0$, $a = t^{\varepsilon_n} b_n b_0 t^{\varepsilon_1} a'$, если $m' = 0$, и $m = m' + 1$. Тогда указанные выше произведения приобретают вид

$$[t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}] a,$$
$$b_1 [t^{\varepsilon_2} b_2 \dots t^{\varepsilon_m} b_m] [t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}] a \big[b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} \big] b_1^{-1}.$$

Поскольку $x = b_0 t^{\varepsilon_1} x' t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}$, $\ell(x') = n - 2$ и $\ell(x) = n$, отсюда следует, что элемент a и число m являются искомыми.

Предложение 3. *Пусть $X = P$ или $X = E$, $x, y \in X$ и $y = x^q$ для некоторого $q > 0$. Если один из элементов x, y циклически приведен и непримитивен, то другой элемент также циклически приведен и непримитивен, а числа $\ell(x)$ и $\ell(y)$ связаны соотношением $\ell(y) = q\ell(x)$.*

Доказательство. Если циклически приведенным и непримитивным является элемент x, то элемент x^q тоже циклически приведен и ввиду соотношений $\ell(x^q) = q\ell(x) \geq \ell(x)$ непримитивен. Поэтому рассмотрим случай, когда указанными свойствами обладает элемент y.

Очевидно, что элемент x не может быть примитивным. Предположим, что он не является циклически приведенным. Тогда согласно предложению 2 его можно записать в виде $x = vuv^{-1}$, где u — циклически приведенный элемент. Поскольку элемент u^q снова циклически приведен и $y = vu^qv^{-1}$, из предложения 1 вытекает, что $\ell(u^q) = \ell(y)$ и, в частности, элемент u не является примитивным.

Если $X = P$, то элементы u и $y = x^q$ имеют четную длину. Но в силу утверждения I.3 предложения 2 длина элемента x^q нечетна, и мы получаем противоречие.

Если $X = E$, то ввиду того же предложения $\ell(y) = q\ell(u) + 2\ell(v) = \ell(u^q) + 2\ell(v)$. С учетом установленного ранее равенства $\ell(u^q) = \ell(y)$ отсюда следует, что $\ell(v) = 0$. Пусть t^ε — первый символ циклически приведенной записи элемента y и $t^{\delta_1}u_1 \ldots t^{\delta_n}u_n$ — циклически приведенная запись элемента u. Тогда $x^q = v(t^{\delta_1}u_1 \ldots t^{\delta_n}u_n)^q v^{-1}$ и из равенства $y^{-1}x^q = 1$ вытекает, что $\varepsilon = \delta_1$ и $v \in H_{\delta_1}$. Следовательно, $t^{-\delta_1}vt^{\delta_1} \in H_{-\delta_1}$ и $x = t^{\delta_1}u_1't^{\delta_2}u_2 \ldots t^{\delta_n}u_nv^{-1}$, где $u_1' = t^{-\delta_1}vt^{\delta_1}u_1 \in B_1 = B_{-1}$. Ввиду сделанного предположения указанная запись элемента x не является циклически приведенной и потому данный элемент (а вместе с ним и элемент u) оказывается сопряжен с некоторым элементом x' длины, меньшей $n = \ell(u)$. Согласно предложению 2 x', в свою очередь, сопряжен с циклически приведенным элементом длины, не большей $\ell(x')$, что невозможно в силу уже упоминавшегося предложения 1.

Таким образом, элемент x циклически приведен и $\ell(y) = q\ell(x)$.

Предложение 4 [4, § 2, теорема 2, следствие 2]. *Пусть $X = P$ или $X = E$. Если A — абелева подгруппа группы X, то выполняется хотя бы одно из следующих утверждений.*

1. *Подгруппа A сопряжена с подгруппой группы B_ε для некоторого $\varepsilon = \pm 1$.*
2. *Подгруппа A сопряжена с подгруппой вида $\langle x \rangle \times C$, где x — элемент бесконечного порядка, $C \leq H_1$ или $C \leq H_{-1}$.*
3. *Подгруппа A является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из H_1 или H_{-1}.*

Предложение 5. *Пусть $X = P$ или $X = E$. Если A — конечно порожденная абелева подгруппа группы X, то она сопряжена либо с подгруппой группы B_ε для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, либо с подгруппой вида $\langle x \rangle \times C$, где x — непримитивный циклически приведенный элемент, $C \leq H_1$ или $C \leq H_{-1}$.*

Доказательство. Так как подгруппа A конечно порождена, в силу предложения 4 она сопряжена с подгруппой группы B_ε для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ или с подгруппой вида $\langle x \rangle \times C$, где $x \in X$, $C \leq H_1$ или $C \leq H_{-1}$. Пусть реализуется вторая возможность. Если элемент x примитивен, то $\langle x \rangle \times C \leq B_1$ или $\langle x \rangle \times C \leq B_{-1}$. Если x — непримитивный циклически приведенный элемент, то доказывать нечего. Поэтому далее будем считать, что элемент x не является ни примитивным, ни циклически приведенным.

Согласно предложению 2 $x = vuv^{-1}$, где u — циклически приведенный элемент и $v \neq 1$. Поскольку подгруппа A абелева, для любого элемента $c \in C$ справедливо равенство $c = x^{-1}cx$, означающее, что $x^{-1}cx$ — примитивный элемент. Понятно, что если элемент x задан приведенной записью из предложения 2, началом которой служит приведенная запись элемента v, то сокращения в произведении $x^{-1}cx = vu^{-1}v^{-1}cvuv^{-1}$ могут происходить только при сопряжении элемента c и элементов, последовательно получающихся в результате таких сопряжений. Отсюда, в частности, следует, что $v^{-1}cv \in B_1 \cup B_{-1}$ для любого $c \in C$. Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. $X = P$.

Пусть $u_1u_2 \ldots u_n$ — циклически приведенная запись элемента u из предложения 2. Согласно утверждению I.a указанного предложения $u \notin H_1 = H_{-1}$ даже если $n = 1$. Поэтому $u_1 \in B_\delta \setminus H_\delta$ для некоторого $\delta = \pm 1$ и из установленного выше включения $v^{-1}Cv \subseteq B_1 \cup B_{-1}$ вытекает, что $v^{-1}Cv \leq B_\delta$ и $u_1^{-1}v^{-1}Cvu_1 \leq B_\delta$.

Если $n = 1$, то $u = u_1 \in B_\delta \setminus H_\delta$ и

$$A \sim_X u^{-1}v^{-1}(\langle x\rangle \times C)vu = \langle u\rangle \times (u^{-1}v^{-1}Cvu) \leq B_\delta.$$

Если $n > 1$, то $u_2 \in B_{-\delta} \setminus H_{-\delta}$ и потому $u_1^{-1}v^{-1}Cvu_1 \leq H_\delta$. Поскольку элемент $u_1^{-1}uu_1 = u_2 \ldots u_nu_1$ циклически приведен и непримитивен, отсюда следует, что подгруппа A сопряжена с подгруппой

$$u_1^{-1}v^{-1}(\langle x\rangle \times C)vu_1 = \langle u_1^{-1}uu_1\rangle \times (u_1^{-1}v^{-1}Cvu_1),$$

имеющей требуемый вид.

Случай 2. $X = E$.

Если $\ell(u) = 0$, то из установленного выше включения $v^{-1}Cv \leq B_1 = B_{-1}$ следует, что

$$A \sim_X v^{-1}(\langle x\rangle \times C)v = \langle u\rangle \times v^{-1}Cv \leq B_1 = B_{-1}.$$

Если же $\ell(u) > 0$ и t^δ — первый символ циклически приведенной записи элемента u, то $v^{-1}Cv \leq H_\delta$ и подгруппа $v^{-1}(\langle x\rangle \times C)v = \langle u\rangle \times (v^{-1}Cv)$ вновь имеет требуемый вид.

Если $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел, X — некоторая группа и Y — подгруппа группы X, то через $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$ будем обозначать множество элементов группы X, определенное следующим образом: $x \in \mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $x^q \in Y$ для некоторого целого числа q, все простые делители которого принадлежат множеству $\mathfrak{P}$.

Предложение 6. *Пусть $X = P$ или $X = E$, $\delta \in \{1, -1\}$ и A — абелева подгруппа группы B_δ. Если $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(B_\varepsilon, H_\varepsilon) = H_\varepsilon$ для каждого $\varepsilon = \pm 1$, то $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(X, A) \leq B_\delta$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(X, A)$ — произвольный элемент. Тогда $x^q \in A$ для некоторого целого положительного числа q, все простые делители которого принадлежат множеству $\mathfrak{P}$. Если x — непримитивный циклически приведенный элемент, то согласно предложению 3 элемент x^q также непримитивен, что невозможно ввиду включения $A \leq B_\delta$. Предположим, что элемент x непримитивен и не является циклически приведенным. Тогда в силу предложения 2 $x = vuv^{-1}$, где u — циклически приведенный элемент, и выполняются следующие утверждения:

1) если элемент u непримитивен, то элемент x^q также непримитивен;

2) если элемент u примитивен, $X = P$ ($X = E$) и

$$b_1 \dots b_m \quad (b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m)$$

— приведенная запись элемента v, то

$$b_1 \dots b_m u b_m^{-1} \dots b_1^{-1} \quad \left(b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m u b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}\right)$$

— приведенная запись элемента x.

Так как элемент x^q примитивен, а элемент x — нет, то согласно утверждению 1 элемент u примитивен и из утверждения 2 вытекают соотношения:

$\mathfrak{p}$) $u \in B_\gamma \setminus H_\gamma$, $b_m \in B_{-\gamma} \setminus H_{-\gamma}$ и $u^q \in H_\gamma$ для некоторого $\gamma = \pm 1$, если $X = P$;

$\mathfrak{e}$) $b_m u b_m^{-1} \notin H_{-\varepsilon_m}$ и $(b_m u b_m^{-1})^q \in H_{-\varepsilon_m}$, если $X = E$.

Но по условию $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(B_\varepsilon, H_\varepsilon) = H_\varepsilon$ для каждого $\varepsilon = \pm 1$. Следовательно, $u \in H_\gamma$, если $X = P$, и $b_m u b_m^{-1} \in H_{-\varepsilon_m}$, если $X = E$. Полученное противоречие доказывает, что элемент x примитивен. Остается заметить, что если $X = P$ и $x \in B_{-\delta}$, то $x^q \in B_\delta \cap B_{-\delta} = H_{-\delta}$ и ввиду равенства $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(B_{-\delta}, H_{-\delta}) = H_{-\delta}$ справедливы соотношения $x \in H_{-\delta} = H_\delta \leq B_\delta$.

§ 3. Доказательство теоремы

Если Δ — непустой связный подграф графа Γ, то через $\mathscr{G}(\Delta)$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы, направления и гомоморфизмы, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$. Указанный подграф Δ назовем *допустимым*, если граф $\Delta \cap \mathscr{T}$ служит максимальным поддеревом в графе Δ. Всюду далее, говоря о допустимом подграфе Δ, будем предполагать, что представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ соответствует дереву $\Delta \cap \mathscr{T}$.

Предложение 7 [7, предложение 1]. *Если Δ — допустимый подграф графа Γ, то тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ в группу $\mathfrak{G}$ определяет инъективный гомоморфизм и потому группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ можно считать подгруппой группы $\mathfrak{G}$.*

Предложение 8. *Для любых конечных подмножеств $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$, $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$, $S \subseteq \mathfrak{G}$ существует допустимый конечный подграф Δ графа Γ, удовлетворяющий условию $S \subseteq \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и содержащий все вершины из $\mathscr{V}'$ и все ребра из $\mathscr{E}'$.*

Доказательство. Пусть ω — множество всех образующих группы $\mathfrak{G}$, входящих в некоторые фиксированные слова, задающие элементы из S. Определим подмножества $\mathscr{V}_\omega \subseteq \mathscr{V}$ и $\mathscr{E}_\omega \subseteq \mathscr{E}$ следующим образом: $v \in \mathscr{V}_\omega$ тогда и только тогда, когда множество ω содержит некоторый образующий группы G_v; $e \in \mathscr{E}_\omega$ тогда и только тогда, когда в множество ω входит символ t_e. Пусть $\mathscr{Q}$ — конечное поддерево дерева $\mathscr{T}$, содержащее все вершины множества

$$\mathscr{V}_\omega \cup \mathscr{V}' \cup \{e(\varepsilon) \mid e \in \mathscr{E}_\omega \cup \mathscr{E}',\ \varepsilon = \pm 1\}.$$

Тогда искомым является подграф Δ графа Γ, получающийся в результате добавления к дереву $\mathscr{Q}$ всех еще не содержащихся в нем ребер из множества $\mathscr{E}_\omega \cup \mathscr{E}'$.

Предложение 9. *Пусть Δ — допустимый конечный подграф графа Γ, $\mathscr{V}_\Delta$ — множество его вершин, $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и $x \in \mathfrak{H}$ — произвольный элемент. Если $h^{-1}xh \notin G_u$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, $u \in \mathscr{V}_\Delta$, то $g^{-1}xg \notin G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $v \in \mathscr{V}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим два частных случая.

Случай 1. Граф Γ получается из Δ добавлением вершины w и ребра f, соединяющего ее с некоторой вершиной графа Δ.

Пусть для определенности $w = f(-1)$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой обобщенное свободное произведение групп $\mathfrak{H}$ и G_w с объединенными подгруппами H_{+f} и H_{-f}. Пусть $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный элемент и $g_1 \dots g_n$ — его приведенная запись в указанном обобщенном свободном произведении. Так как $h^{-1}xh \in \mathfrak{H}$ и $h^{-1}xh \notin G_{f(1)} \geq H_{+f}$ для любого $h \in \mathfrak{H}$, то $x \in \mathfrak{H} \setminus H_{+f}$, $\ell(g^{-1}xg) = 2n+1$, если $g_1 \in G_w \setminus H_{-f}$, и $\ell(g^{-1}xg) = 2n-1$, если $g_1 \in \mathfrak{H}$. Стало быть, если $g_1 \in G_w \setminus H_{-f}$ или $n > 1$, то $g^{-1}xg \notin \mathfrak{H} \cup G_w \supseteq \bigcup_{v \in \mathscr{V}} G_v$. Если же $g = g_1 \in \mathfrak{H}$, то по условию предложения $g^{-1}xg \notin \bigcup_{v \in \mathscr{V}_\Delta} G_v$, откуда $g^{-1}xg \in \mathfrak{H} \setminus H_{+f}$ и $g^{-1}xg \notin G_w$ ввиду равенства $G_w \cap \mathfrak{H} = H_{+f}$.

Случай 2. Граф Γ получается из Δ добавлением ребра f, оба конца которого принадлежат графу Δ.

В этом случае группа $\mathfrak{G}$ является HNN-расширением группы $\mathfrak{H}$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами H_{+f} и H_{-f}. Пусть $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный элемент и $g_0 t_f^{\varepsilon_1} g_1 \dots t_f^{\varepsilon_n} g_n$ — его приведенная запись в рассматриваемом HNN-расширении. Согласно условию предложения $g_0^{-1}xg_0 \notin G_v$ для всех $v \in \mathscr{V}$, поэтому $g_0^{-1}xg_0 \notin H_{+f} \cup H_{-f}$ и n далее можно считать большим 0. Отсюда следует, что $\ell(g^{-1}xg) = 2n > 0$ и $g^{-1}xg \notin \mathfrak{H} \supseteq \bigcup_{v \in \mathscr{V}} G_v$.

Рассмотрим теперь случай произвольного графа Γ и предположим, что $g^{-1}xg \in G_v$ для некоторых $g \in \mathfrak{G}$, $v \in \mathscr{V}$. Согласно предложению 8 существует допустимый конечный подграф $\overline{\Delta}$ графа Γ, содержащий граф $\Delta \cup \{v\}$ и удовлетворяющий условию $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\overline{\Delta}))$. Легко видеть, что граф $\overline{\Delta}$ можно получить из Δ, применяя операции, описанные в случаях 1, 2, и притом так, что в возникающей последовательности графов каждый элемент служит допустимым подграфом графа Γ. Ввиду доказанного выше отсюда следует, что вопреки предположению в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\overline{\Delta}))$ не должно выполняться включение $g^{-1}xg \in G_v$.

Предложение 10. *Пусть Γ — конечный граф и A — конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Тогда подгруппа A сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_3(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Предположим сначала, что Γ является деревом, и воспользуемся индукцией по числу вершин в нем. Если Γ содержит только одну вершину v, то $\mathfrak{G} = G_v$ и доказываемое утверждение тривиально. Поэтому будем считать, что в дереве Γ имеется по крайней мере две вершины и, следовательно, $\mathscr{E} \neq \varnothing$.

Зафиксируем некоторое ребро $f \in \mathscr{E}$. При его удалении граф Γ распадается на две компоненты связности. Обозначим через Δ_ε ($\varepsilon = \pm 1$) ту из них, которая содержит вершину $f(\varepsilon)$, и положим $\mathfrak{B}_\varepsilon = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta_\varepsilon))$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой свободное произведение групп $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_{-1}$ с объединенной подгруппой $H_{+f} = H_{-f}$ и в силу предложения 5, заменяя при необходимости подгруппу A на сопряженную, достаточно рассмотреть следующие два случая.

Случай 1. $A \leq \mathfrak{B}_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$.

Обозначим через $\mathscr{V}_\varepsilon$ и $\mathscr{E}_\varepsilon$ множества вершин и ребер графа Δ_ε. Применяя индуктивное предположение к группе $\mathfrak{B}_\varepsilon$ и заменяя, если нужно, подгруппу A сопряженной, можно считать, что либо $A \leq G_v$ для некоторой вершины $v \in \mathscr{V}_\varepsilon$, либо $A = XY$, где $X \leq H_{\delta e}$ для некоторых $e \in \mathscr{E}_\varepsilon$, $\delta = \pm 1$, Y — бесконечная циклическая подгруппа группы $\mathfrak{B}_\varepsilon$ и $b^{-1}xyb \notin G_u$ для всех $b \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, $x \in X$, $y \in$

$Y \setminus \{1\}$, $u \in \mathscr{V}_\varepsilon$. Остается заметить, что Δ_ε является допустимым конечным подграфом графа Γ и потому, если реализуется вторая возможность, то ввиду предложения 9 соотношение $g^{-1}xyg \notin G_v$ имеет место для всех $g \in \mathfrak{G}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$, $v \in \mathscr{V}$.

Случай 2. $A = X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f} = H_{-f}$.

Пусть $x \in X$, $q > 0$. Так как $x \in H_{+f} = H_{-f}$, то по предложению 3 xy^q — непримитивный циклически приведенный элемент и в силу предложения 1 $g^{-1}xy^qg \notin \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_{-1}$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Отсюда легко следует, что $g^{-1}xy^rg \notin \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_{-1} \supseteq \bigcup_{v\in\mathscr{V}} G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $r \neq 0$, как и требуется.

Теперь обратимся к общей ситуации и воспользуемся индукцией по числу ребер, не входящих в максимальное дерево графа Γ. База индукции доказана выше, поэтому будем предполагать, что имеется по крайней мере одно такое ребро f и граф Δ получается из Γ путем его удаления. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой HNN-расширение группы $\mathfrak{B} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами H_{+f}, H_{-f}, и ввиду предложения 5 вновь можно считать, что либо $A \leq \mathfrak{B}$, либо $A = X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f}$ или $X \leq H_{-f}$. Если $A \leq \mathfrak{B}$, то достаточно обозначить группу $\mathfrak{B}$ и граф Δ через $\mathfrak{B}_\varepsilon$ и Δ_ε соответственно, а затем слово в слово повторить рассуждения, использованные выше при рассмотрении случая 1. Поэтому будем предполагать, что реализуется вторая возможность.

Пусть $t_f^{\varepsilon_1}y_1 \dots t_f^{\varepsilon_n}y_n$ $(n > 0)$ — циклически приведенная запись элемента y в рассматриваемом HNN-расширении и $x \in X$ — произвольный элемент. Тогда, если $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$, то $y_n \notin H_{-\varepsilon_n f}$. Так как $[x, y] = 1$, то $yxy^{-1} = x \in \mathfrak{B}$ и потому произведение

$$t_f^{\varepsilon_1}y_1 \dots t_f^{\varepsilon_n}y_nxy_n^{-1}t_f^{-\varepsilon_n} \dots y_1^{-1}t_f^{-\varepsilon_1}$$

не может быть приведено. Значит, $y_nxy_n^{-1} \in H_{-\varepsilon_n f}$ и, если $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$, то $y_nx \notin H_{-\varepsilon_n f}$. Отсюда легко следует, что для любого $q > 0$ y^qx — непримитивный циклически приведенный элемент и в силу предложения 1 $g^{-1}y^qxg \notin \mathfrak{B}$ для каждого $g \in \mathfrak{G}$. Как и выше, последнее означает, что $g^{-1}xy^rg \notin \mathfrak{B} \supseteq \bigcup_{v\in\mathscr{V}} G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $r \neq 0$.

Доказательство теоремы. Импликации $3 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 1$ и $1 \Rightarrow 4$ очевидны. Покажем, что имеет место импликация $4 \Rightarrow 3$.

Так как подгруппа A конечно порождена, то согласно предложению 8 существует допустимый конечный подграф Δ графа Γ, удовлетворяющий условию $A \leq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$. Применяя к нему предложение 10, получаем, что подгруппа A сопряжена (в $\mathfrak{H}$) с некоторой подгруппой вида XY, где $(X, Y) \in \mathfrak{D}_3(\mathfrak{H})$. Если $Y = 1$, то $(X, Y) \in \mathfrak{D}_3(\mathfrak{G})$. Если $Y \neq 1$ и $h^{-1}xyh \notin G_u$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$, $u \in \mathscr{V}_\Delta$ (где $\mathscr{V}_\Delta$ — множество вершин графа Δ), то ввиду предложения 9 $g^{-1}xyg \notin G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$, $v \in \mathscr{V}$ и потому снова $(X, Y) \in \mathfrak{D}_3(\mathfrak{G})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurosch A.* Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen // Math. Ann. 1934. V. 109, N 1. P. 647–660.
2. *Karras A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150, N 1. P. 227–255.
3. *Karras A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Canad. J. Math. 1971. V. 23, N 4. P. 627–643.

4. *Молдаванский Д. И.* О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370–1384.
5. *Serre J.-P.* Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
6. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
7. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

Поступила в редакцию 20 марта 2023 г.
После доработки 20 марта 2023 г.
Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru