А. В. Шутов, Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 4, 264–271

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 519.21

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ДВУМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе получено новое бесконечное семейство множеств ограниченного остатка в проблеме равномерного распределения дробных долей линейной функции на двумерном торе. Также получена явная оценка остатка на найденных множествах.

1 Введение

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $X \subset [0;1)^m$ -множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией. Согластно теореме Вейля о равномерном распределении [10], если числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, справедлива асимптотическая формула

$$N(\alpha, n, X) = n|X| + o(n), \tag{1}$$

где

$$N(\alpha, n, X) = \sharp\{k : 1 \leq k \leq n, \{k\alpha\} \in X\}.$$

Пусть $r(\alpha, n, X) = N(\alpha, n, X) - n|X|$ – остаточный член формулы (1). Множество X называется множеством ограниченного остатка, если

$$r(\alpha, n, X) = O(1).$$

Первые примеры таких множеств были построены в работе [5], а полное описание одномерных интервалов ограниченного остатка было найдено в [6]. Точные по порядку оценки $r(\alpha, n, X)$ для одномерных интервалов ограниченного остатка найдены в [2].

Значительно более сложной оказывается задача о множествах ограниченного остатка в двумерном случае. Фактически известно только небольшре число примеров таких множеств [1], [7], [9]. Большинство известных примеров строятся на основе результатов эргодической теории, что не позволяет получить явных оценок остаточного члена.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 11-01-00578-а.

Целью данной работы является построение для каждого вектора α, удовлетворяющего условиям теоремы Вейля, несчетного семейства множеств ограниченного остатка, а также получение явной оценки остатка на всех построенных множествах.

Автор выражает благодарность Владимиру Георгиевичу Журавлеву за многолетнее внимание к работе и многочисленные стимулирующие обсуждения, а также Владимиру Николаевичу Чубарикову, привлекшему внимание владимирский теоретико-числовиков к проблеме множеств ограниченного остатка.

2 Основной пример.

Вначале перепишем исходные определения более удобным для нас способом. Пусть L – m-мерная решетка. Пусть T – фундаментальная область решетки L. Напомним, что множество T называется фундаментальной областью решетки L, если выполняются два условия:

1) Для любых $x, y \in T$ разность $x - y$ не принадлежит решетке L.

2) Для любого z существует $x \in T$ такой, что $x - z \in L$ (Соответствующее значение x мы будем обозначать через $z \bmod T$).

Отметим, что из условия 1) следует, что $z \bmod T$ определено единственным образом.

Пусть теперь v – вектор, иррациональный относительно решетки L и $R : x \to x + v \bmod T$ – сдвиг на этот вектор. Тогда теорема Вейля о равномерном распределении означает, что для $X \subset T$ и

$$N(v, n, X) = \sharp\{k : 1 \le k \le n, R^k(0) \in X\}$$

выполняется формула

$$N(v, n, X) = \frac{|X|}{|T|} n + o(n).$$

Рассмотрим теперь модельный пример, который будет лежать в основе дальнейшей конструкции. Отложим от начала координат O три вектора $v_i = OA_i$. На парах векторов OA_1 и OA_2, OA_2 и OA_3, OA_3 и OA_1 построим параллелограммы $OA_1B_3A_2$, $OA_2B_1A_3$ и $OA_3B_2A_1$ соответственно. Будем обозначать их через T_3, T_1 и T_2. В результате получим шестиугольник $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ стороны которого попарно равны и попарно параллельны (рис. 1). Обозначим его через T. Легко видеть, что построенный шестиугольник является фундаментальной областью решетки L, натянутой на векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Будем предполагать, что векторы v_i иррациональны отностительно решетки L. Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что множества T_i являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига $R : x \to x + v_1 \bmod T$.

Рисунок 1

Стандартный прием доказательства ограниченности остатка для сдвигов тора состоит в проверке критерия Рози о том, что отображение первого возвращения для данного множества должно быть изоморфно некоторому сдвигу тора [8]. Для данного примера выполнимость критерия Рози фактически была проверена в работе [3], авторы которой не знали о работе Рози и не сделали вывод об ограниченности остатка. Однако использование критерия Рози не позволяет получить какую-либо явную оценку остаточного члена. Поэтому мы приведем новое элементарное доказательство ограниченности остатка на множествах T_i, которое позволит нам получить такую оценку.

Вначале рассмотрим преобразование

$$R^* : x \to \begin{cases} x + v_1, & x \in T_1 \\ x + v_2, & x \in T_2 \\ x + v_3, & x \in T_3 \end{cases}. \tag{2}$$

Преобразование (2) представляет собой перекладывание 3 областей на двумерном торе (рис. 2).

Рисунок 2

Предложение 4. *Преобразования R и R^* совпадают.*

Отметим, что преобразование R^* отображает шестиугольник T на себя. Поэтому для доказательства предложения достаточно доказать, что для любого $x \in T$ точки $R^*(x)$ и $x+v_1$ различаются на вектор решетки L. Непосредственным вычислением находим, что

$$R^*(x) - (x+v_1) = \begin{cases} 0, & x \in T_1 \\ v_2 - v_1, & x \in T_2 \\ v_3 - v_1, & x \in T_3 \end{cases}.$$

Учитывая, что $v_2 - v_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $v_3 - v_1 = \overrightarrow{A_1A_3}$, а также то, что решетка L натянута на векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, получим требуемый результат.

Замечание **1.** *Аналогично можно проверить, что преобразования $x \to x + v_2 \bmod T$ и $x \to x + v_3 \bmod T$ совпадают с R^*.*

Далее определим для каждой точки $x \in T$ три проекции π_i, полагая $\pi_i(x)$ равным расстоянию от точки x до прямой OA_i. При этом расстояние $\pi_i(x)$ берется со знаком минус, если точка x находится слева от прямой OA_i и знак плюс в противном случае.

Предложение 5. *Отображение π_i проектируют орбиту сдвига R в орбиты одномерных поворотов окружности.*

Доказательство проведем на примере отображения π_1. Учитывая (2), имеем

$$\pi_1(R(x)) = \begin{cases} \pi_1(x), & x \in T_1 \\ \pi_1(x) - \theta_1, & x \in T_2 \\ \pi_1(x) + \theta_1', & x \in T_3 \end{cases}. \qquad (3)$$

Здесь θ_1 и θ_1' – высоты параллелограммов $OA_1B_3A_2$ и $OA_3B_2A_1$, опущенные на сторону OA_1. Формула (3) означает, что множество $\{\pi_1(R^n(0))\}$ совпадает с множеством $\{(R_1^n(0))\}$, где $R_1 : [-\theta_1; \theta_1') \to [-\theta_1; \theta_1')$ и

$$R_1 : y \to \begin{cases} y + \theta_1', & y \in [-\theta_1; 0) \\ y - \theta_1, & y \in [0; \theta_1') \end{cases}. \qquad (4)$$

Легко видеть, что отображение (4) изоморфно повороту окружности.

Пусть теперь

$$n_i = \sharp\{k : 1 \le k \le n, R^k(0) \in T_i\}.$$

Ясно, что

$$n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Обозначим через S_i и S площади параллелограммов T_i и шестиугольника T соответственно.

Теорема 1. *Все множества T_i, $i = 1, 2, 3$ являются множествами ограниченного остатка для сдвига R. Более того, справедливы оценки*

$$\begin{array}{c} -2\frac{S_1}{S} \leq n_1 - n\frac{S_1}{S} \leq \frac{S_2+S_3}{S} \\ -2\frac{S_2}{S} \leq n_2 - n\frac{S_2}{S} \leq \frac{S_1+S_3}{S} \\ -2\frac{S_3}{S} \leq n_3 - n\frac{S_3}{S} \leq \frac{S_1+S_2}{S} \end{array}. \tag{5}$$

Заметим, что из (3) и (4) вытекает, что $\pi_i(R^n(0)) \in [-\theta_i; \theta_i')$. Учитывая (3) перепишем данное условие для в виде

$$-\theta_1 \leq n_3\theta_1' - n_2\theta_1 \leq \theta_1'$$

для $i = 1$ и

$$-\theta_2 \leq n_1\theta_2' - n_3\theta_2 \leq \theta_2'$$

для $i = 2$. Далее подставим в первое из полученных неравенств значение $n_2 = n - n_1 - n_3$, умножим полученное неравенство на θ_2', а второе – на θ_1 и сложим полученные в результате неравенства. Получим, что

$$-2\theta_1\theta_2' \leq n_3(\theta_1\theta_2' + \theta_1'\theta_2' + \theta_1\theta_2) - n\theta_1\theta_2' \leq \theta_1\theta_2 + \theta_1'\theta_2'. \tag{6}$$

Далее, пусть a, b и c — длины векторов v_1, v_2 и v_3 соответственно, $\alpha = \angle(v_2, v_3)$, $\beta = \angle(v_3, v_1)$ и $\gamma = \angle(v_1, v_2)$. Выразим числа θ_i, θ_i' и S_i через $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

Находим, что

$$\begin{array}{c} \theta_1 = b\sin\gamma, \quad \theta_1' = c\sin\beta \\ \theta_2 = c\sin\alpha, \quad \theta_2' = a\sin\gamma \\ \theta_3 = a\sin\beta, \quad \theta_3' = b\sin\alpha \end{array},$$

$$\begin{array}{c} S_1 = bc\sin\alpha \\ S_2 = ac\sin\beta \\ S_3 = ab\sin\gamma \end{array}.$$

Подставляя полученные выражения в (6) после простых преобразований получаем требуемое неравенство относительно n_3. Неравенства для n_1 и n_2 доказываются аналогично.

Теорема 1 может быть обобщена и для начальной точки, отличной от начала координат.

Теорема 2. *Пусть $x_0 \in T$ и*

$$n_i(x_0) = \sharp\{k : 1 \leq k \leq n, R^k(x_0) \in T_i\}$$

Тогда справедливы оценки

$$\begin{array}{c} -4\frac{S_1}{S} \leq n_1(x_0) - n\frac{S_1}{S} \leq 2\frac{S_2+S_3}{S} \\ -4\frac{S_2}{S} \leq n_2(x_0) - n\frac{S_2}{S} \leq 2\frac{S_1+S_3}{S} \\ -4\frac{S_3}{S} \leq n_3(x_0) - n\frac{S_3}{S} \leq 2\frac{S_1+S_2}{S} \end{array}. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 2 фактически повторяет доказательство теоремы 1, но дополнительно испльзует оценку $-\theta_i \leq \pi_i(x_0) \leq \theta_i'$, позволяющую сразу после проектирования орбиты избавиться от $\pi_i(x_0)$.

3 Деформация основного примера.

Рассмотрим следующий критерий того, что множество T' является фундаментальной областью некоторой решетки [4].

Теорема 3. *Множество T' является фундаментальной областью некоторой решетки L' тогда и только тогда, когда границу $\partial T'$ удается разбить на шесть неперекрывающихся участков a – f такие, что участки каждой пары a и d, b и e, c и f совмещаются трансляциями (одна из указанных пар может быть пустой).*

Рассмотрим множество T' удовлетворяющее условиям теоремы 3. При этом будем предполагать, что все участки границы a – f непусты. Отметим, что такое множество T' можно рассматривать как деформированный шестиугольник $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$, вершины которого являются общими точками участков границы a – f. Данный "шестиугольник"можно разбить на три деформированных параллелограмма T_1', T_2' и T_3' (рис. 3). Для этого необходимо построить параллельные копии a', b' и c' участков a, b и c. Копия c' выходит из общей точки участков a и b, копия b' выходит из общей точки участков c и d, а копия a' выходит из общей точки участков e и f. Участки a', b' и c' имеют общую точку O. Пусть v – вектор из точки O в общую точку участков a и b. Тогда мы можем определить сдвиг $R' : x \to x + v \pmod{L}'$.

Рисунок 3

Теорема 4. *Множества T_i', $i = 1, 2, 3$ являются множествами ограниченного остатка для сдвига R'. Более того, для чисел попадания $n_i(x_0)$ в области T_i' выполняются неравенства (5) и (7).*

Доказательство теоремы 4 проходит в точности по той же схеме, что и доказательство теорем 1 и 2. При этом необходимо корректно определить проекции π_i. Рассморим определение проекции π_1. Отложим от точки O параллельную копию b'. Затем от конца полученной копии построим еще одну копию b' и т.д.

Процесс будем повторять до тех пор, пока очередная копия не выйдет за пределы T'. Обозначим через b'' часть полученной линии, составленную из всех копий b', лежащую внутри T'. Тогда $\pi_1(x)$ равно расстоянию от x до b''. При этом расстояние $\pi_i(x)$ берется со знаком минус, если точка x находится слева от b'' и знак плюс в противном случае. Две оставшиеся проекции определяются аналогично. Далее необходимо заметить, что перекладывание областей T_i' вновь изоморфно сдвигу R', а значения S_i, θ_i и θ_i' в точности такие же, как и для шестиугольника $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$.

Возникает вопрос, действительно ли построенные множества являются новыми примерами множеств ограниченного остатка. Рассмотрим понятие эквивалентности для множеств ограниченного остатка. Пусть $R : x \to x+v \pmod L$ некоторый сдвиг тора, T' и T'' – две фундаментальные области решетки L, $X' \subset T'$ и $X'' \subset T''$ – множества ограниченного остатка для сдвига R. Определим множества $\widehat{X'} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y \equiv x \pmod L), x \in X'\}$ и $\widehat{X''} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y \equiv x \pmod L), x \in X''\}$. Множества X' и X'' естественно считать эквивалентными, если множества $\widehat{X'}$ и $\widehat{X''}$ переводятся друг в друга параллельными переносами. Легко видеть, что для различных фундаментальных областей T' соответствующие множества T_i' не являются эквивалентными относительно введенного отношения эквивалентности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Журавлев В.Г. Разбиения Рози имножества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. -2005. -Т. 322. -С. 83-106.

[2] Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. -2007. -Вып. 7(57) -С. 168-175.

[3] Baladi V., Rockmore D., Tongring N., Tresser C. Renor malization on the n-dimensional torus //Nonlinearity -1992 -V.5 -P. 1111-1136.

[4] Beaquier D., Nivat M. On translating one polyomino to tile the plane // Discrete Comput. Geom. -1991. -V. 6. -P. 575-592.

[5] Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. -1921. -V. 5. -P. 54-76.

[6] Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. -1966. -V. 12. P. 193-212.

[7] Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. -1987. -V. 61. -P. 267-293.

[8] Rauzy G. Ensembles a restes bornes // Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984, -Bordo. -1984. -Expose 24.

[9] Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 147-178.

[10] Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. -1910. -V. 30. -P. 377-407.

Владимирский Государственный Университет
Поступило 11.11.2011