С. А. Гриценко, Приближенное функциональное уравнение для $L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$,
Докл. РАН, 1995, том 344, номер 4, 442–443

https://www.mathnet.ru/dan4322

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 344, № 4, с. 442 - 443

МАТЕМАТИКА

УДК 511

ПРИБЛИЖЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$

© 1995 г. С. А. Гриценко

Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 05.04.94 г.

Поступило 12.04.94 г.

Определение. Пусть χ_1 и χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2, $s = \sigma + it$, x и y – произвольные положительные вещественные числа такие, что $xy = (t/2\pi)^2 k_1 k_2$. Тогда

$$R(s, x, \chi_1, \chi_2) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2) - \sum_{mn \le x} \chi_1(m)\chi_2(n)\,(mn)^{-s} - \rho(s, \chi_1)\rho(s, \chi_2) \times \sum_{mn \le y} \chi_1(m)\chi_2(n)\,(mn)^{s-1},$$

где $\rho(s, \chi_j)$ – функции из функциональных уравнений для $L(s, \chi_j)$ ($L(s, \chi_j) = \rho(s, \chi_j)L(1 - s, \bar{\chi}_j)$), $j = 1, 2$.

Представление $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$ в виде

$$L(s, \chi_1)L(s, \chi_2) = \sum_{mn \le x} \chi_1(m)\chi_2(n)\,(mn)^{-s} + \rho(s, \chi_1)\rho(s, \chi_2) \sum_{mn \le y} \bar{\chi}_1(m)\bar{\chi}_2(n)\,(mn)^{s-1} + R(s, x, \chi_1, \chi_2)$$

называется приближенным функциональным уравнением для $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$.

В связи с занятиями вопросами распределения нулей дзета-функции Эпштейна и других рядов Дирихле автору потребовалось приближенное функциональное уравнение для $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$ с остатком $R(s, x, \chi_1, \chi_2)$, убывающим на критической прямой (при $s = 1/2 + it$) с ростом $|t|$ по крайней мере как $O((\log|t|)^{-\alpha})$, $\alpha > 2$.

В литературе известны многочисленные варианты приближенных функциональных уравнений для различных рядов Дирихле (см. [1 - 4]), однако воспользоваться ими для указанных целей не удается, так как остатки этих формул в одних случаях не удовлетворяют условию $O((\log|t|)^{-\alpha})$, а в других – являются аналитическими выражениями столь сложного вида, что оценка их порядка представляется весьма трудной задачей.

В 1987 г. Y. Motohashi [5] получил для $\zeta^2(s)$ формулу

$$\zeta^2(s) = \sum_{mn \le x} (mn)^{-s} + \chi^2(s) \sum_{mn \le y} (mn)^{s-1} + R(s, x), \quad (1)$$

где $s = \sigma + it$, $0 \le \sigma \le 1$, $0 < t_0 < |t|$, x и y – вещественные числа такие, что $xy = (t/2\pi)^2$, $\chi(s)$ – функция из функционального уравнения для $\zeta(s)$, $R(s, x)$ – остаток, представленный в виде асимптотического ряда.

Если $s = 1/2 + it$, $x = y = |t|/2\pi$, то для $R(s, x)$ установлена оценка $R(s, x) = O(|t|^{-1/6}\log^2|t|)$.

Параметры x и y в (1) имеют специальный вид.

Теорема 1 настоящей статьи представляет собой приближенное функциональное уравнение для $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$, где χ_1, χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2.

При $k_1 k_2 \le |t|^{1/9 - 2\varepsilon}$ остаточный член на критической прямой есть $O(|t|^{-\varepsilon})$, $|t| \to \infty$, $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число.

Как и в (1), параметры x и y в теореме 1 имеют специальный вид.

Далее, в работе определяется функция $F(t, \chi_1, \chi_2)$, являющаяся аналогом функции Харди–Сельберга, а также функции $F(t, \chi)$ из статей А.А. Карацубы [6, 7].

Для функции $F(t, \chi_1, \chi_2)$ в теореме 2 установлено приближенное уравнение.

Перейдем к формулировкам результатов статьи.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, A, B – натуральные взаимно простые числа, χ_1 и χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2, $s = \sigma + it$, $0 \le \sigma \le 1$, $0 < t_1 < t$. Пусть A, B, k_1, k_2 удовлетворяют неравенствам*

$$A \le t^{\varepsilon}, \quad B \le t^{\varepsilon}, \quad k_1 k_2 \le t^{1/9 - 2\varepsilon}.$$

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

Тогда

$$R\left(s, \frac{tk_1}{2\pi}\frac{A}{B}, \chi_1, \chi_2\right) =$$

$$= O(t^{1/3-\sigma+2\varepsilon}((k_1k_2)^{2-\sigma} + (k_1k_2)^{1+\sigma}));$$

постоянная в знаке O зависит лишь от ε.

Пусть χ_1 и χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2. В работе [7] следующим образом определены функции $\theta(t, \chi_j)$ и $Z(t, \chi_j)$:

$$e^{i\theta(t,\chi_j)} = \left(\rho\left(\frac{1}{2}+it, \chi_j\right)\right)^{-1/2}, \quad j = 1, 2,$$

$$Z(t, \chi_j) = e^{i\theta(t,\chi_j)}L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_j\right), \quad j = 1, 2.$$

Определим функцию $F(t, \chi_1, \chi_2)$:

$$F(t, \chi_1, \chi_2) =$$

$$= Z(t, \chi_1)Z(t, \chi_2)\left|\varphi_1\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|\varphi_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2,$$

где $\varphi_j(s) = \sum_{\nu \le x}\beta_j(\nu)\nu^{-s}$, $\beta_j(\nu)$ – вещественные числа, $|\beta_j(\nu)| \le 1$, $j = 1, 2$; здесь числа $\beta_j(\nu)$ и X можно выбирать некоторым специальным образом в зависимости от решаемой задачи.

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– произвольно малое число,* χ_1 *и* χ_2 *– примитивные характеры Дирихле по модулям* k_1 *и* k_2. *Пусть* $k_1k_2 \le t^{1/9-5\varepsilon}$, $T < t \le 2T$, $X = T^{\varepsilon}$. *Тогда для* $F(t, \chi_1, \chi_2)$ *справедлива формула*

$$F(t, \chi_1, \chi_2) = \sqrt{\varepsilon(\chi_1)\varepsilon(\chi_2)}e^{i\psi}\sum_{\lambda \le \frac{tk_1}{2\pi}}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon(\bar{\chi}_1)\varepsilon(\bar{\chi}_2)}e^{-i\psi}\sum_{\lambda \le \frac{tk_2}{2\pi}}\frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O(T^{-\varepsilon}),$$

где

$$a(\lambda) = \sum\frac{\chi_1(m)\chi_2(n)\beta_1(\nu_1)\beta_1(\nu_2)\beta_2(\nu_3)\beta_2(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}$$

(*суммирование ведется по натуральным числам* m, n, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 *таким, что* $\frac{mn\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4} = \lambda$, $1 \le \nu_1, \ldots, \nu_4 \le X$), $\varepsilon(\chi_j) = i^{a_j}\sqrt{k_j}\,(\tau(\chi_j))^{-1}$, a_j *равно* 0, *если* χ_j *– четный характер, и* a_j *равно* 1, *если* χ_j *– нечетный характер,* $\tau(\chi_j)$ *– сумма Гаусса,*

$$\tau(\chi_j) = \sum_{l=1}^{k_j}\chi_j(l)e^{2\pi il/k_j},$$

$$\psi = \frac{t}{2}\ln\left(\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 k_1k_2\right) - t + (a_1+a_2)\frac{\pi}{4}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится по следующей схеме, которая в основных чертах совпадает со схемой работы [5]. Сначала за счет тождественных преобразований, напоминающих преобразования при решении проблемы делителей Дирихле (см., например, [8, с. 12 - 13]), проблема оценки $R\left(s, \frac{tk_1}{2\pi}\frac{A}{B}, \chi_1, \chi_2\right)$ сводится к проблеме получения асимптотических формул для сумм типа

$$\sum_{n \le \sqrt{\frac{Ua}{q}}}\chi'(n)n^{-s}R\left(s, \frac{tk}{2\pi}\frac{a}{qn}, \chi\right), \qquad (2)$$

где a и q – натуральные взаимно простые числа, $U = t\sqrt{k_1k_2}/2\pi$, $\chi' = \chi_1$, $k = k_2$, $\chi = \chi_2$ (или $\chi' = \chi_2$, $k = k_1$, $\chi = \chi_1$), а величины $R\left(s, \frac{tk}{2\pi}\frac{a}{qn}, \chi\right)$ определяются равенствами

$$R\left(s, \frac{tk}{2\pi}\frac{a}{qn}, \chi\right) = L(s, \chi) -$$

$$- \sum_{m \le \frac{tk}{2\pi}\frac{a}{qn}}\chi(m)m^{-s} - \rho(s, \chi)\sum_{m \le qn/a}\bar{\chi}(m)m^{s-1}.$$

Затем для $R\left(s, \frac{tk}{2\pi}\frac{a}{qn}, \chi\right)$ методом контурного интегрирования выводится аналитическая формула.

Наконец после подстановки этой формулы в (2) получается несколько тригонометрических сумм по n, одна из которых – главный член – вычисляется точно, а остальные – остаток – оцениваются по модулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* // Proc. Lond. Math. Soc. 1929. V. 29. P. 81 - 97.
2. *Titchmarsh E.C.* // Quart. J. Math. 1938. V. 9. P. 109 - 114.
3. *Гельфонд А.О.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. № 4. С. 469 - 474.
4. *Лаврик А.Ф.* // Там же. 1968. Т. 32. № 1. С. 134 - 185.
5. *Motohashi Y.* Lectures on the Riemann–Siegel formula. Ulam Seminar. Department of Mathematics. Spring Semester. Boulder: Colorado University, 1987.
6. *Карацуба А.А.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48. № 3. С. 569 - 584.
7. *Карацуба А.А.* // Там же. 1991. Т. 55. № 3. С. 483 - 514.
8. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 238 с.