Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим конечно-зонным потенциалом,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 3, 319–340

https://www.mathnet.ru/mzm4249

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
16 января 2026 г., 06:49:29

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 3 (1988)

РЕЗОНАНСЫ В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМ КОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. Ю. Доброхотов

1. Постановка задачи. Волновая функция $\psi(x, t)$, описывающая распространение быстроосциллирующего волнового пакета уравнения Шредингера, есть решение задачи Коши (приведем ее в безразмерных переменных $x \in R$, $t \geqslant 0$)

$$L\psi \equiv -ih\psi_t - h^2\psi_{xx} + v\psi = 0,$$
$$\psi|_{t=0} = A^0(x)\exp\left(\frac{iS^0(x)}{h}\right). \tag{1.1}$$

Здесь $h > 0$ — малый параметр, характеризующий частоту осцилляций, начальные фазы S^0 и амплитуда A^0 — гладкие функции, A^0 имеет компактный носитель. Асимптотика решения задачи (1.1) хорошо известна в том случае, когда потенциал v есть гладкая функция, не зависящая от h (или зависящая от h регулярно), т. е. тогда, когда потенциал изменяется медленно по сравнению с осцилляциями в волновом пакете [1].

В этой работе мы рассмотрим задачу взаимодействия волнового пакета с потенциалом, осциллирующим с частотой h^{-1}. Сразу же отметим, что обозримые аналитические результаты для такой задачи можно получить лишь при дополнительных, весьма ограничительных условиях на v и $\psi(x, 0)$. Это легко понять, если учесть, что в основе

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Математические заметки», 1988

квазиклассических асимптотик уравнения Шредингера лежат точные решения $\exp(i\eta\omega + ip\xi)$, этого же уравнения, записанного в «быстрых» переменных $\eta = t/h$, $\xi = x/h$, с замороженной «медленной» переменной $x = \xi h$. Такие решения получаются методом разделения переменных, приводящим к уравнению

$$-\chi_{\xi\xi} + v\chi = \mathscr{E}\chi, \tag{1.2}$$

в котором потенциал v не зависит от «быстрой» переменной ξ. Это же уравнение возникает при исследовании уравнения (1.1) с быстроосциллирующим потенциалом, но в этом случае v уже зависит от ξ. Ясно, что возможность написания эффективных формул для асимптотических решений уравнения (1.1) зависит от того, насколько хорошо изучены точные решения модельного уравнения (1.2). Мы рассмотрим случай, когда по переменной ξ v есть конечнозонный почти периодический потенциал [2—4], с концами зон, зависящими от «медленной» переменной x, и ограничимся в основном двухзонным случаем. Это означает, что v в (1.1) задается вектор-функцией $E(x) = (E_1, \ldots, E_5)$, компоненты которой определяют при каждом фиксированном x концы разрешенных зон $[E_1, E_2]$, $[E_3, E_4]$, $[E_5, \infty)$ спектра (в $L_2(R_\xi)$) оператора Штурма — Лиувилля в (1.2). Функция v в (1.1) выражается через E следующим образом:

$$v = v(\Phi(x)/h, E(x)). \tag{1.3}$$

Здесь

$$v(\tau, E) = C(E) - 2(U(E)\cdot\partial/\partial\tau)^2 \ln\theta(\tau \mid E),$$

$$\theta(\tau \mid E) = \sum_{k\in Z^2} \exp(ik\cdot Bk/2 + ik\cdot\tau), \tag{1.4}$$

θ — функция Римана, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — переменные на торе $T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Функции (параметры конечнозонного потенциала) $C(E)$, компоненты $U_j(E)$ двумерного вектора U и элементы $B_{mj}(E)$ 2×2-симметрической матрицы B с положительной мнимой частью однозначно восстанавливаются по E с помощью гиперэллиптических интегралов (ввиду громоздкости эти хорошо известные формулы мы не приводим, см. [2—4]). Функция $v(U(E)\xi, E)$ и есть конечнозонный потенциал в (1.2). Относительно фаз $\Phi(x) = (\Phi_1, \Phi_2)$ в (1.3) предполагается, что

$$\Phi_{jx} = U_j(E(x)). \tag{1.5}$$

Кроме того, мы считаем, что $E_m(x)$ — гладкие функции, причем $E_{2j-1}(x) < E_{2j}(x) \leqslant E_{2j+1}(x)$ и неравенства $E_2(x) < E_3(x)$, $E_4(x) < E_5(x)$ выполняются лишь на некотором ограниченном в R_x множестве, которое мы будем называть *носителем осцилляций потенциала* v и обозначать Ω_v. Исходя из явных формул нетрудно установить гладкую зависимость от E, а следовательно и от x, функций C, U, $\exp(iB_{jm}/2)$, $v(\tau, E)$, и, кроме того, равенство

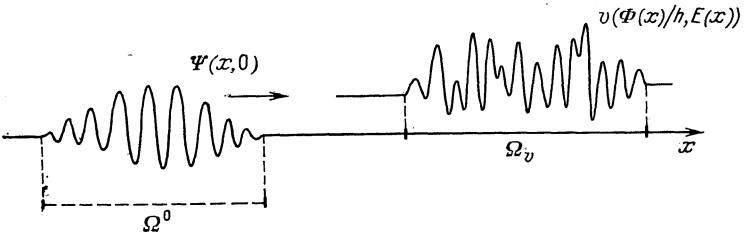

Рис. 1

$v = E_1(x)$ при $x \overline{\in} \Omega_v$, что и объясняет название для Ω_v. Потребуем еще, чтобы Ω_v и носитель $\Omega^0 = \operatorname{supp} A^0(x)$ начальной функции $\psi(x, 0)$ были разнесены:

$$\Omega^0 \cap \Omega_v = \varnothing. \tag{1.6}$$

Таким образом, мы рассматриваем задачу рассеяния волнового пакета, задаваемого $\psi(x, 0)$ на быстроосциллирующем потенциале (1.3), (1.4) (см. рис. 1).

Прежде чем сформулировать результаты, укажем на основные трудности, которые возникают при решении рассматриваемой задачи. Прежде всего отметим, что уравнения вида (1.1), (1.3) относятся [5—7] к классу h-дифференциальных уравнений с операторнозначным символом [1]. Действительно, аналогично [8—9], представим решение ψ в виде

$$\psi = w(\Phi/h, x, t, h), \tag{1.7}$$

считая, что $w(\tau, x, t, h)$ — гладкая при $h > 0$ функция всех своих аргументов, $\tau \in T$ (но не регулярная функция h при $h \to 0$). Тогда, подставляя (1.7) в (1.1), производя соответствующие дифференцирования и считая затем τ и x независимыми переменными, получим для w с учетом

(1.3) уравнение

$$ihw_t - \left[\left(-ih\frac{\partial}{\partial x} - iU(E(x))\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^2 + v(\tau, E(x))\right]w = 0, \tag{1.8}$$

где $U\cdot\partial/\partial\tau = U_1\cdot\partial/\partial\tau_1 + U_2\cdot\partial/\partial\tau_2$. Переменные (x, t) и τ входят в это уравнение не равноправно: производные по τ не содержат параметра h. Поэтому символ оператора, заключенного в квадратные скобки, имеет вид

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(p, E(x)) = (p - iU\cdot\partial/\partial\tau)^2 + v(\tau, E(x))$$

и есть при каждых фиксированных (p, x) (или E) оператор на торе T. Собственные значения $\lambda_\nu(p, x)$ оператора $\mathcal{L}$ — термы (функции от (p, x)), являются гамильтонианами, определяющими квазиклассические асимптотические решения уравнения (1.8), а следовательно и (1.1). Этот факт, относящийся, разумеется, не только к одномерному «конечнозонному» случаю, часто используется в физической литературе (см., например, [11]). Если фаза Φ в (1.3) одна, то собственные числа (термы) λ_ν изолированы и каждый терм если и вырожден, то не более чем двукратно. Именно это обстоятельство позволяет в такой ситуации применить теорию [1], и решение задачи (1.1) по существу сводится к конкретной, хотя, возможно, и нетривиальной, реализации общих утверждений и формул [1] (см. [7, 12—16]). В двухфазовом (и l-фазовом, $l \geqslant 2$) «почти периодическом» случае возникает качественно иная ситуация: спектр оператора $\mathcal{L}$ на торе T хотя и оказывается чисто точечным, но термы при любых фиксированных (x, p) оказываются либо бесконечно вырожденными, либо всюду плотно заполняют отрезки $[E_1, E_2]$, $[E_3, E_4]$, $[E_5, \infty)$. При этом в любой окрестности любой точки (p, x) фазового пространства $R^2_{p,x}$ каждый терм пересекается с бесконечным количеством других термов, что вызывает бесконечное число резонансных взаимодействий. Основной результат работы состоит в доказательстве того, что асимптотика решения задачи определяется в главном лишь одним выделенным термом (обозначим его $H(p, x)$), а бесконечное число слагаемых, порожденных резонансами, вносит в ответ вклад порядка $\sqrt{h}$. Наконец, отметим, что каждый отдельный резонанс не позволяет применить схему [1] при каждом t лишь в конечном количестве точек в $\mathbf{R}_x$ (в них обращается в нуль знаменатель $H - \lambda_\nu$), но их объединение образует всюду плотное множество. То,

что это множество лежит в конфигурационном пространстве, а не в пространстве параметров, делает невозможным применение к рассматриваемой задаче методов КАМ-теории [17] и требует привлечения иного подхода, использующего идеи [18]. Результат этой работы анонсирован в [19].

2. Адиабатическое приближение. Как обычно при решении задачи с помощью асимптотических методов, сначала построим некоторые частные решения, а затем из них выберем решение, удовлетворяющее начальному условию. Применим для решения (1.8) метод ВКБ (адиабатическое приближение) — подставим в (1.8) функцию

$$w = A(\tau, x, t) \exp(iS(x, t)/h), \tag{2.1}$$

где A, S — новые неизвестные функции, A — 2π-периодична по каждому из τ, и приравниваем коэффициент при $h^0 = 1$ к нулю. Элементарные выкладки приводят к следующему утверждению, пока не апеллирующему к «конечнозонности» потенциала v.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* $\varphi(x, t)$ — *некоторая гладкая функция,* $u(\tau, p, E)$ — *нормированная на* 1 *в* $L_2(T)$ *собственная функция оператора* $\mathcal{L}(p, E(x))$, $\lambda(p, x)$ — *соответствующее собственное значение* (*терм*). *И пусть при* $t \in [0, t_0]$ *гладкая функция* $S(x, t)$ *есть решение уравнения Гамильтона — Якоби* $S_t + \lambda(S_x, E(x)) = 0$, *причем на множестве* $\{x, p \in R^2_{x,p}\colon\ x \in \operatorname{supp}\varphi,\ p = S_x\}$ u, λ *гладко зависят от всех своих аргументов. Тогда функция* (2.1) с $A = \varphi u(\tau, S_x, E(x))$ *удовлетворяет уравнению* (1.8) *с точностью до функции* $h \exp(iS(x, t)/h)\cdot(R(\tau, x, t) + hA_{xx})$, *где*

$$R = i(A_t + 2(S_x + iU\cdot\partial/\partial\tau)A_x + S_{xx} + i\Phi_{xx}\cdot A_\tau). \tag{2.2}$$

Перейдем от переменных τ к переменным ξ, ζ: $\tau = U\xi + V\zeta$, где V — вектор-функция, ортогональная U. Тогда после замены $u = \chi \exp(-ip\xi)$ уравнение $\mathcal{L}u = \lambda u$ переходит в уравнение (1.4) с потенциалом $v(U\xi + V\zeta, E)$. Переменная ζ здесь выступает в роли параметра и условие для χ состоит в требовании 2π-периодичности по (τ_1, τ_2) функции u.

3. Термы в «двухзонном» случае. В силу предположения о «конечнозонности» исходного потенциала и результатов [2, 3, 4] можно найти все решения уравнения (1.4), и задача отыскания спектра оператора $\mathcal{L}$ сводится к вы-

делению из таких решений функций на торе **T**, гладко зависящих от E и p. Эта процедура приводит к следующим утверждениям [10], которые составляют основу для всех дальнейших рассуждений.

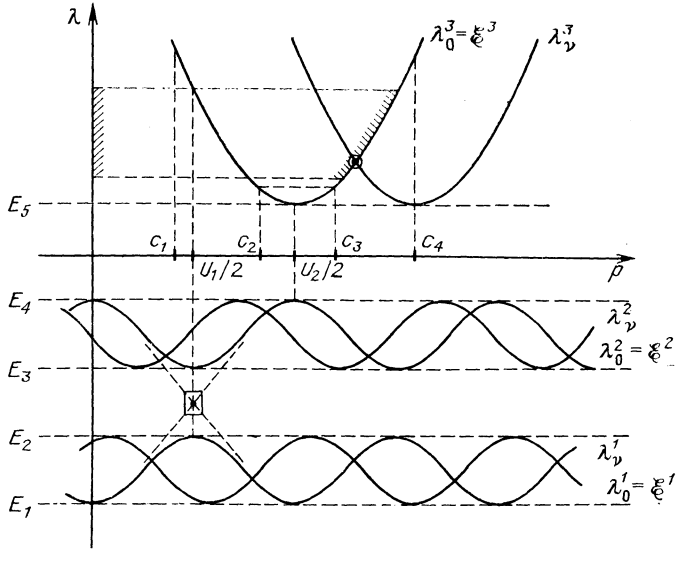

Рис. 2. Зависимость от p термов λ_0^j (x фиксировано). На оси λ выделена область значений, которые принимает терм $H = \lambda_0^3(p, E(x))$ на траекториях, определяющих распространение изучаемого волнового пакета: $\{\lambda\colon\ \lambda = (S_x^0(x))^2 + E_1(x),\ x \in \operatorname{supp} A^0\}$; на оси p изображены константы $c_1, \ldots, c_4$ из леммы 5.1. Кружком обведена точка гладкого пересечения терма λ_0^3 с термом λ_ν^3. Пунктиром изображены участки термов λ_0^1 и λ_0^2 в случае, когда запрещенная зона $[E_2, E_3]$ «схлопнулась» и возникла ситуация «негладкого пересечения» термов λ_0^1 и λ_0^2 в точке, заключенной в квадрат

При $|E_2 - E_3| + |E_4 - E_5| \neq 0$ имеется три гладко зависящих от p и E функции $\mathscr{E}^j(p, E)$, обратных к функции квазиимпульса $\mathscr{P}(\mathscr{E}, E)$ для уравнения (1.4) (см. [2—4, 10]). Они однозначно выделяются условиями

$$E_{2j-1} \leqslant \mathscr{E}^j \leqslant E_{2j}\ (j = 1, 2, 3) \quad (E_6 = \infty);$$

$$\mathscr{E}^1(p, E) = \mathscr{E}^1(p + U_1, E), \quad \mathscr{E}^1(0, E) = E_1;$$

$$\mathscr{E}^2(p + U_2 - U_1, E) = \mathscr{E}^2(p, E);$$
$$\mathscr{E}^2(U_1/2, E) = E_3;\ \mathscr{E}^3(p, E) = p^2 + O(1) \text{ при } p \to +\infty;$$
$$\mathscr{E}^3(p, E) = (p - U_2)^2 + O(1) \text{ при } p \to -\infty,$$
$$\mathscr{E}^3(U_2/2, E) = E_5$$

(рис. 2). Им соответствуют также гладко зависящие от p и E функции

$$u_0^j(\tau, p, E) = a_0^j(p, E)\theta(\tau + Q^j(p, E) \mid E)/\theta(\tau \mid E), \quad (3.1)$$

где коэффициенты $a_0^j(p, E)$ определяются условием нормировки: $\| u_0^j \|_{L_2(T)} \equiv 1$, а $Q^j(p, E)$ — так же, как и $\mathscr{E}^j$,— гладкие функции, явный вид которых нам не понадобится. Обозначим через Π^j следующие подмножества в $\mathbf{Z}^2$: $\Pi^1 = \{\nu = (0, \nu_2), \nu_2 \in \mathbf{Z}^1\}$, $\Pi^2 = \{\nu = (\nu_2, \nu_2), \nu = (\nu_2 - 1, \nu_2), \nu_2 \in \mathbf{Z}^1\}$, $\Pi^3 = \mathbf{Z}^2$ и введем зависящие от p, E семейства функций в $L_2(T)$:

$$u_\nu^j(\tau, p, E) = u_\nu^j(\tau, p + U\cdot\nu, E), \quad \nu \in \Pi^j \qquad (j = 1, 2, 3). \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.1. *При любых значениях $p \in \mathbf{R}$ и E спектр оператора $\mathscr{L}(p, E)$ в $L_2(T)$ чисто точечный. Функции* (3.2) *образуют полную ортонормированную систему собственных функций $\mathscr{L}$, отвечающих собственным значениям*

$$\lambda_\nu^j(p, E) = \mathscr{E}^j(p + U(E)\cdot\nu, E). \quad (3.3)$$

При этом коэффициенты Фурье $f_\nu^j = (f, u_\nu^j)_{L_2(T)}$ любой функции $f \in C^\infty(T)$ убывают быстрее любой степени $|\nu|$: $|f_\nu^j| < C_\varkappa/|\nu|^\varkappa$, $\varkappa$ — любое, $C_\varkappa$ — константа.

Замечание. Если U_1/U_2 иррационально, то множество собственных значений $\{\lambda_\nu^j\}$ всюду плотно заполняет разрешенные зоны $[E_{2j-1}, E_{2j}]$ и кратность каждого λ_ν^j не превосходит 2. В противном случае каждое собственное значение бесконечно вырождено и на любом отрезке $[E_1, \mathscr{E}]$, $\mathscr{E} < \infty$, лежит конечное число λ_ν^j.

Доказательство (см. [10]) основано на следующих фактах: а) формулы (3.2), (3.3) дают семейство собственных функций и значений, непрерывно зависящих от параметров p и E; б) в области допустимых значений параметров существует такое всюду плотное множество, что для всех (p, E) из этого множества U_1 и U_2 соизмеримы

и задача $\mathcal{L}u = \lambda u$ сводится к одномерной периодической задаче для уравнения (1.5), полнота системы собственных функций которой уже известна. Формулы (3.2) и (3.3) определяют термы оператора $\mathcal{L}$ и в том случае, когда $E_2 = E_3$ или $E_4 = E_5$ (т. е. когда «схлопываются» запрещенные зоны). Но тогда u_ν^j оказываются не гладкими функциями аргумента p (хотя при таких E имеется и другой способ нумерации термов, например когда $E_2 = E_3$ и $E_4 = E_5$ одновременно — $\lambda_\mu = (p + U\cdot\mu)^2 + E_1$, $u_\mu = e^{i\tau\cdot\mu}$, $\mu \in Z^2$). Это обстоятельство является следствием того факта, что термы в рассматриваемой задаче пересекаются (см. рис. 2), причем не гладким образом. Вследствие этого факта и условия ограниченности носителя осцилляций Ω_v $\lambda_\nu^j(p, E(x))$ могут быть гладкими лишь на некоторых подмножествах $\mathbf{R}^2_{p,x}$. Важную роль в дальнейшем играют термы с номерами (j, ν), равными $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 2)$, $(3, 0, 0)$, $(3, 0, -1)$, они и соответствующие им функции u_ν^j гладко зависят от (p, x) на множествах

$$
\begin{gathered}
|p| < U_1/2,\ j = 1,\ \nu = (0, 0);\\
U_1/2 < p < U_2/2,\ j = 2,\ \nu = (0, 0);\\
U_1/2 < -p < U_2/2,\quad j = 2,\quad \nu = (1, 2);\\
U_2/2 < p,\quad j = 3,\quad \nu = (0, 0);\\
U_2/2 < -p,\quad j = 3,\quad \nu = (0, -1)
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

и при $x \overline{\in} \Omega_v$ $\lambda_\nu^j = p^2 + E_1(x)$, $u_\nu^j = 1$, т. е. указанные термы переходят в классический гамильтониан уравнения Шредингера с неосциллирующим потенциалом $v = E_1(x)$. Наряду с негладким пересечением термов имеют место и гладкие пересечения термов с одинаковыми номерами j. Например, λ_0^3 пересекается с λ_ν^3 на следующих множествах в $\mathbf{R}^2_{p,x}$:

прямых $\mathfrak{M}_\nu^1 = \{x, p\colon U(E(x))\cdot\nu = 0,\ \nu \in Z^2 \setminus (0, 0)\}$, (3.5)

кривых $\mathfrak{M}_\nu^2 = \{x, p : p = (U\cdot\nu - U_2)/2,\ \nu \in Z^2 \setminus (0,0)\}$, (3.6)

которые определяют резонансы в рассматриваемой задаче.

4. Формулировка результатов. Главный член асимптотики ψ_0 решения ψ задачи (1.1) описывается финитной

функцией, носитель которой обозначим Ω^t. Из анализа формул метода ВКБ легко получить, что до тех пор пока Ω^t не достигнет носителя Ω_v осцилляций потенциала v, ψ_0 выражается через траектории $p = P(t, x_0)$, $x = X(t, x_0)$ гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_p, \ \dot{p} = -H_x, \tag{4.1}$$

$$p\,|_{t=0} = S_x^0(x_0), \quad x\,|_{t=0} = x_0 \in \Omega^0 = \operatorname{supp} A^0 \quad (4.1')$$

с гамильтонианом $H = p^2 + E_1(x)$, $\Omega^t = \{x\colon x = X(t, x_0), x_0 \in \Omega^0\}$. После того как Ω^t достигнет Ω_v, волновой пакет ψ может «развалиться» на несколько пакетов, эволюция каждого из которых будет определяться разными термами. Термам λ_ν^3, $\nu = (0, 0)$, $\nu = (0, -1)$ соответствует «надбарьерное» прохождение пакета, а остальным термам — «подбарьерное» распространение в «разрешенных» зонах. «Распад» падающего на v пакета обусловливается прохождением траекторий (P, X) через точки негладкой смены термов. Строгая теория «распада» пакетов при прохождении через такие точки пока отсутствует, и асимптотику решения задачи (1.1) мы дадим в предположении, что распространение пакета происходит по «гладкому участку» одного из перечисленных в п. 3 термов. Достаточным для этого будет выполнение условия: при $t \in [0, t_0]$ траектории (P, X) системы (4.1) с гамильтонианом $H = \lambda_\nu^j(p, E(x))$ принадлежат некоторому компактному множеству в $\mathbf{R}^2_{p,x}$, на котором справедливо соответствующее неравенство (3.4). Используя свойство сохранения H на траекториях (P, X), нетрудно привести достаточные условия на начальные функции, приводящие к (3.4). Например, для «надбарьерного прохождения» (3.4) будет заведомо выполнено, если

$$H\,|_{\Omega^0} = (S_x^0)^2 + E_1(x)\,|_{\Omega^0} > \max_{x \in \Omega_v} E_5(x). \tag{4.2}$$

Теперь мы можем построить функцию ψ_0, определяющую главный член асимптотики решения задачи (1.1). Если при $t \in [0, t_0]$ на траекториях системы (4.1), (4.1′) $J(x_0, t) = \partial X/\partial x_0 \neq 0$ (нет фокальных точек), то

$$\psi_0 = \frac{u(\Phi(x)/h, S_x, x)\, A^0(x_0(x, t))}{\sqrt{J(x_0(x, t), t)}}\, e^{i\frac{S(x, t)}{h} + i\rho(x_0(x, t), t)}. \tag{4.3}$$

Здесь фаза S и поправка к фазе $\rho \equiv \operatorname{Re} \rho$ находятся по формулам

$$S(x, t) = S^0(x_0) + \int_0^t (pH_p - H)\, dt\,|_{x_0 = x_0(x,\, t)},$$
$$i\rho = \int_0^t M\, dt, \tag{4.4}$$

$$M(p, x) = \left(u, \frac{du}{dt}\right) + (2p - H)(u, u_x) + 2i \operatorname{Re}\left(U \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}, u_x\right), \tag{4.5}$$

скобки $(\cdot\,,\,\cdot)$ — означают скалярное произведение в $L_2(T)$, $x_0(x, t)$ — решение уравнения $X(x_0, t) = x$, $u(\tau, p, x) = u_\nu^j(\tau, p, E(x))$, интегрирование в (4.4) и дифференцирование $d/d\,t$ в (4.5) производятся вдоль траекторий (P, X) системы (4.1), (4.1′) с $H = \lambda_\nu^j$.

Вывод формул (4.3)—(4.6) проводится с помощью стандартных рассуждений, применяемых для уравнений с операторнозначным символом [1], с учетом того, что из-за условий (1.6) и (3.4) начальным данным (1.1) удается удовлетворить, используя лишь один терм (см. также [7, 13—16]). Основная проблема состоит в доказательстве того утверждения, что (4.3) действительно дает асимптотику решения. Его нетривиальность, как уже отмечалось, обусловлена бесконечным числом резонансных точек на траекториях (P, X), в которых терм H пересекается (совпадает) с другими термами. Тип пересечения определяет порядок по h поправок к ψ_0. Здесь аналогично [18] мы считаем, что в точках пересечения H с λ_μ^l на траекториях (P, X) отличны от нуля скобки Пуассона $\{H, \lambda_\mu^l\}$. Это условие означает, что резонансные взаимодействия между термами продолжаются на коротком временном интервале.

При формулировке окончательного результата ограничимся случаем распространения «пакета» ψ по «надбарьерному» терму λ_0^3. Этот терм всюду ниже будем обозначать $H(p, x)$: $H(p, x) = \mathscr{E}^3(p, E(x))$, а соответствующую ему собственную функцию $u_\nu^j(\tau, p, E(x)) - u(\tau, p, x)$ (тогда $\lambda_\nu^3 = H(p + U \cdot \nu, x)$ и $u_\nu^3 = \exp(i\nu \cdot \tau) u(\tau, p + U \cdot \nu, x)$). Резонансные множества в этом случае имеют вид (3.5), (3.6) и соответствующие скобки Пуассона не обращаются в нуль, если дополнительно к (4.2): а) для решений $x^p(n)$ уравнения $U(E(x)) \cdot n$ для любого $n =$

$= (n_1, n_2), \quad |n| = 1,$

$$\Phi_{xx}(x^p(n)) \cdot n \equiv \frac{\partial}{\partial x}(U(E(x^p(n))) \cdot n \neq 0; \qquad (4.6)$$

б) на траекториях (P, X) системы (4.1), (4.1) для любых $\nu \in \mathbf{Z}^2 \setminus (0, 0)$ выполнено по крайней мере одно из неравенств

$$2(pH_pU_{jx} + U_jH_x)/(H_p(U_1U_{2x} - U_{1x}U_2)) \neq \nu_j. \qquad (4.7)$$

ТЕОРЕМА. *Пусть при* $t \in [0, t_0]$ *выполнены условия* (4.2), (4.6), (4.7) *и не обращается в нуль якобиан* J. *Тогда функция* ψ_0 *вида* (4.4) *есть асимптотика решения* ψ *задачи* (1.1), (1.3)—(1.5): *для* ψ *и* ψ_0 *имеет место оценка* $\|\psi - \psi_0\| \leqslant c\sqrt{L}$. *Здесь* c — *константа, зависящая от* A^0, S^0, *отрезка* $[0, t_0]$ *и потенциала* v, *но не зависящая от* L, *и* $\|\cdot\|$ — *норма в* $L_2(R_x)$.

Замечание. 1) Легко видеть, что проверку условий (4.8) следует проводить лишь для конечного набора индексов (ν_1, ν_2).

2) Аналогичная теорема справедлива и для решений задачи (1.1), (1.3)—(1.5), определяемых «подбарьерными» термами λ_0^1 и λ_0^2 и т. д.

3) Соответствующий вариант теоремы оказывается справедливым и в существенно более простом однофазовом $(\Phi = \Phi_1(x))$ случае. При этом если на соответствующих траекториях имеются фокальные точки, то следует пользоваться формулой

$$\psi_0 = \exp(i\delta) K_{\Lambda_t}(A^0 e^{i\rho} u(\tau, p, x))|_{\tau=\Phi/h}, \qquad (4.8)$$

где K_{Λ_t} — канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях Λ_t, полученных из многообразия $\Lambda_0 = \{p, x\colon p = S_{0x}^0(x)\}$ сдвигом вдоль траекторий системы (4.1): $\Lambda_t = g_H^t \Lambda_0$ (формулы для K_{Λ_t} и фазовый сдвиг δ см. в [1]). Вообще, формула (4.8) и формулы для поправок к ψ_0 (см. пп. 5—8) имеют смысл для более широкого класса задач, в частности для l-фазовых асимптотик $(\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l))$, для случая, когда условия (4.2) заменяются на более слабые, и т. д. Однако сложность доказательства оценки (4.6) резко возрастает и ухудшается оценка в теореме: $\sqrt{h}$ заменяется на величину меньшего порядка и растет сама константа c.

4) Теорему сравнительно легко перенести на многомерный случай при дополнительном предположении, что $\nabla\Phi_1$ и $\nabla\Phi_2$ параллельны в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$, и предположении о «конечнозонности» соответствующего потенциала; это условие выполнено, например, если концы зон двухзонного потенциала имеют вид $E_j = E_j(Y(x))$, где $Y(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкая функция, $|\nabla Y| = 1$.

Доказательство теоремы весьма громоздко и здесь мы изложим лишь его схему и узловые моменты.

5. Определение амплитуды главного члена асимптотики и выделение резонансных слагаемых и невязке. Цель следующих пунктов состоит в построении поправки ψ_1 к ψ_0, обладающей свойствами: $\|\psi_1\|_{L_2(\mathbf{R}_x)} = O(\sqrt{h})$ и $\|L(\psi_0 + \psi_1)\|_{L_2(\mathbf{R}_x)} = O(h^{3/2})$. Этого, в силу хорошо известной оценки в $L_2(\mathbf{R}_x)$

$$\|\Psi\| \leqslant t \max_{\eta\in[0,\,t]} \|F(x, \eta)\|/h \tag{5.1}$$

для решения $\Psi(x, t)$ неоднородного уравнения Шредингера (см. (1.1)) $L\Psi = F(x, t)$, $\Psi(x, 0) = 0$, будет достаточно для доказательства теоремы 3.1. Сразу же приведем еще одну полезную оценку, аналогичную оценкам из теорем вложения, легко получаемую с помощью разложения в ряды Фурье и позволяющую переходить от оценок для функций $W(\tau, x)$ к оценкам для $W(\Phi/h, x)$. Пусть $\Phi = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))$, $W(\tau, x)$ — гладкие функции $x \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in \mathbf{T}$, $\Delta_\tau = \partial^2/\partial\tau_1^2 + \partial^2/\partial\tau_2^2$. Тогда

$$\|W(\Phi(x)/h, x)\|_{L_2(\mathbf{R}_x^n)} \leqslant 7\,\|(1 + \Delta_\tau^2 W(\tau, x))\|_{L_2(\mathbf{T}\times\mathbf{R}_x^n)}. \tag{5.2}$$

В силу леммы 2.1 функция (4.3) удовлетворяет (1.1) с точностью до функции $hF + O(h^2)$, $F = -\exp(iS/h)\cdot R(\Phi(x)/h, x, t)$. Считая, что $\varphi(x, t)$ в лемме 2.1 при $t = 0$ удовлетворяет условию $\varphi(x, 0) = A^0(x)$, получим для ψ_1 задачу

$$L\psi_1 = hF, \quad \psi_1|_{t=0} = 0. \tag{5.3}$$

Из леммы 2.2 имеем разложение

$$F = \sum f_\nu^j(x, t)\, u_\nu^j(\Phi/h, S_x, E(x)) \exp(iS(x, t)/h), \tag{5.4}$$

где суммирование проводится по $j = 1, 2, 3$ и $\nu \in \Pi^j$. Сумма (5.4) разбивается на следующие группы. а) Сначала выделяется слагаемое $f_0^3 u_0^3 \exp(iS/h)$, обращение оператора L на котором дает вклад в ψ_1 порядка $O(1)$ при

$h \to 0$. Поэтому требование $\psi_1 = o(1)$ приводит к равенству $f_0^3 \equiv 0$, которое эквивалентно (сравните [1]) уравнению переноса для φ, решение которого приводит к формуле (4.3). б) «Слаборезонансные слагаемые» — слагаемые в сумме (5.2), которым соответствуют $\lambda_\nu^3(S_x, E(x))$, совпадающие (не тождественно) на резонансных множествах с H. в) «Нерезонансные слагаемые» — на них оператор L обращается по хорошо известной схеме, и некоторые трудности возникают лишь в установлении гладкой зависимости от x, t соответствующей части ψ_1. Условимся, что все встречающиеся ниже c_j — константы задачи: они зависят от A^0, S^0, E, t_0, но не зависят от h.

ЛЕММА 5.1. *Существуют константы* $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ и $c_5 > 0$, *такие, что при всех* $x \in \operatorname{supp} \varphi$, $t \in [0, t_0)$ и $\nu \in \Pi^j$ $(j = 1, 2)$ *справедливо неравенство* $|\lambda_\nu^j(S_x, x) - H(S_x, x)| > c_5$; *это же неравенство справедливо для* $j = 3$ *и таких* x, t *и* $\nu \in Z^2$, *что* $S_x + \nu\cdot\Phi_x < c_1$, *или* $S_x + \nu\cdot\Phi_x > c_4$, *или* $c_2 < S_x + \nu\cdot\Phi_x < c_3$ (см. рис. 2). Доказательство легко следует из свойств четности по аргументу p и строгого возрастания при $p > 0$ функции $H(p + U_2/2, x)$, которое устанавливается в результате анализа явных формул [4].

Введем некоторое не зависящее от h достаточно малое число $\delta > 0$ и «срезающую» гладкую функцию $e(z)$: $e(z) = 1$ при $c_1 - \delta \leqslant z \leqslant c_2 + \delta$ и $c_3 - \delta \leqslant z \leqslant c_4 + \delta$, $e(z) = 0$ при $z \leqslant c_1$, $c_2 \leqslant z \leqslant c_3$, $z \geqslant c_4$. Выделим теперь из правой части «резонансную» составляющую $F^p = h \exp(iS/h)\cdot R^p(\Phi/h, x, t)$, $R^p(\tau, x, t) = \Sigma f_\nu^3(x, t) e(S_x + \nu\cdot\Phi_x) u_\nu^3(\tau, S_x, E)$, где суммирование проводится по всем $\nu \in Z^2$. В силу быстрого убывания коэффициентов f_ν^3 функция R^p, очевидно,— гладкая функция всех своих аргументов, финитная по аргументу x и 2π-периодическая по каждому из аргументов τ_j. «Нерезонансную» составляющую правой части $F^н$ определим равенством

$$F^н = h \exp(iS/h) R^н(\Phi/h, x, t), \quad R^н(\tau, x, t) = R - R^р.$$

Ясно, что $R^н(\tau, x, t)$ — также гладкая функция и что для $R^н$ справедливо разложение

$$R^н = \sum f_\nu^j(x, t)(1 - \delta_{3j} e(S_x + \nu\cdot\Phi_x)) u_\nu^j(\tau, S_x, E(x)), \quad (5.6)$$

где суммирование проводится по $j = 1, 2, 3$ и $\nu \in \Pi^j$, δ_{3j} — символ Кронекера.

6. Оценка нерезонансной части поправки. Рассмотрим при каждых (x, t) задачу в $L_2(T)$ для функций $w^{\text{н}}(\tau, x, t)$:

$$\widetilde{\mathcal{L}} w^{\text{н}} \equiv (\mathcal{L}(S_x, x) - H(S_x, x)) w^{\text{н}} = R^{\text{н}}, \tag{6.1}$$

$w^{\text{н}}$ ортогональна $\operatorname{Ker} \widetilde{\mathcal{L}}$.

ЛЕММА 6.1. *Решение задачи* (6.3) *существует и единственно. Оно гладко зависит от всех своих аргументов и допускает разложение* (5.6), *в котором* f_ν^j *заменено на* $f_\nu^j/(\lambda_\nu^j(S_x, E(x)) - H(S_x, x))$. *При этом носитель по* x *функций* $w^{\text{н}}$ *совпадает с носителем функции* $\varphi(x, t)$.

Не совсем тривиальным в лемме является утверждение о гладкости функции $w^{\text{н}}$, поскольку в точках x, соответствующих схлопыванию запрещенных зон $[E_{2k}, E_{2k+1}]$, функции u_ν^j и λ_ν^j теряют гладкость. Доказательство этого факта проводится дифференцированием уравнения (6.1), последующим применением формул, аналогичных (5.6), с учетом равенств

$$(u_\mu^j, \widetilde{\mathcal{L}} \partial^\alpha w^{\text{н}} / \partial x^{\alpha_1} \partial p^{\alpha_2}) = (\lambda_\mu^j - H) G_{j,\mu}^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

справедливых для j, μ таких, что $(u_\mu^j, R^{\text{н}}) = 0$.

$$G_{j,\mu}^\alpha = (u_\mu^j, \partial^{|\alpha|} w^{\text{н}}) / \partial x^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} - \partial^{|\alpha|} (u_\mu^j, w^{\text{н}}) / \partial x^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} t,$$

если в нем произвести соответствующие дифференцирования и сократить первое слагаемое.

ЛЕММА 6.2. *При* $t \in [0, t_0]$ *в* $L_2(\mathbf{R}_x)$ *для функции* $\psi_1^{\text{н}} = h \exp(iS/h) w^{\text{н}}(\Phi/h, x, t)$ *справедливы оценки* $\| \psi_1^{\text{н}} \| \leqslant c_6 h$, $\| L\psi_1^{\text{н}} - F_\nu^{\text{н}} \| \leqslant c_7 h^2$ *и равенство* $\psi_1^{\text{н}}|_{t=0} = 0$.

Доказательство. Состоит в вычислении невязки $L\psi_1^{\text{н}} - F^{\text{н}}$ и последующего применения (5.1) и (5.2).

7. Оценка вкладов резонансов с малыми номерами ν. Преобразуем «резонансную» составляющую правой части. Воспользовавшись определением функций u_ν^3, получим

$$F^p = \sum_{\nu \in Z^2} F_\nu^p \left(\frac{\Phi}{h}, x, t \right),$$

$$F_\nu^p = e^{\frac{i(S + \nu \cdot \Phi)}{h}} f_\nu^3(x, t) e(S_x + \nu \cdot \Phi_x) u(\tau, S_x + \nu \Phi_x, x).$$

Обозначим через $\psi_{1\nu}^p$ вклад в поправку, обусловленный F_ν^p. Эта функция есть решение задачи (5.3), в которой F заменено на F_ν^p. Использование принципа Дюамеля [18] и последующее введение быстрой переменной τ дают

следующую формулу:

$$\psi_{1\nu}^{p} = g_\nu\left(\frac{\Phi}{h}, x, t, h\right),$$

$$g_\nu(\tau, x, t, h) = \int_0^t w_\nu(\tau, x, t, q, h)\,\mathrm{d}q, \tag{7.1}$$

где g_ν определяется как решение уравнения (1.8), удовлетворяющее условию

$$w_\nu|_{t=q} = F_\nu^p(\tau, x, q, h). \tag{7.2}$$

Смысл применения формул (7.1) состоит в том, что, с одной стороны, интеграл по $\mathrm{d}\,q$ «вбирает» в себя знаменатели $H - \lambda_\nu^3$, которые появились бы при попытке применения формул, аналогичных формуле для $\psi_1^{\text{н}}$, а с другой — наличие интеграла и быстрых осцилляций у w_ν сделают $\psi_{1\nu}^{\text{н}}$ малой по h. Это обстоятельство позволяет также (с учетом порядка параметра h в оценке в теореме) ограничиться построением асимптотических решений w_ν, удовлетворяющих (1.8) лишь с точностью до $O(h)$.

Заметим теперь, что функции w_ν являются решениями семейства задач, зависящих от параметра ν единообразно в том смысле, что при $t = q$ в начальных данных содержится одна и та же собственная функция $u(\tau, p, x$ оператора $\mathscr{L}$. Решение этих задач определяется с помощью канонического оператора Маслова формулой (4.8), если в ней сделать следующие изменения. Во-первых, нулевой момент времени заменить на $t = q$. Во-вторых, заменить многообразия Λ_t на многообразия $\Lambda_{q,t}^{\nu}$, полученные из начального $(t = q)$ многообразия $\Lambda_{q,q}^{\nu} = \{x, p\colon p = p_\nu(x, q)\}$ сдвигом $g_{\text{н}}^{t-q}$ за время $t - q$ вдоль траекторий системы (4.1). Здесь $p_\nu(x, q)$ — гладкая функция, совпадающая с $S_x(x, q) + \nu\cdot\Phi_x(x)$, если $S_x + \nu\cdot\Phi_x \in \operatorname{supp} e$ и $x \in \operatorname{supp}\varphi(x, q)$, и удовлетворяющая неравенству $H(p_\nu, x) > \max\limits_{x\in\Omega_v} E_1(x)$. В силу сохранения H на траекториях и последнего неравенства траектории (4.1), выпущенные из $\Lambda_{q,q}^{\nu}$, не попадают в точки, где H теряет гладкость, и $\Lambda_{q,t}^{\nu}$ — (гладкие) лагранжевы многообразия в фазовом пространстве $R_{p,x}^2$. Наконец, в-третьих, функцию $A^0(x)$ следует заменить на $f_\nu(x, q)e(S_x(x, q) + \nu\cdot\Phi_x(x))$. Если на соответствующих траекториях системы (4.1) нет фокальных точек, то (4.8) принимает вид

(4.3) (с соответствующими изменениями S, φ и J). Подставляя построенное таким образом асимптотическое решение w_ν в (7.1), получим функцию, которую во избежание громоздкости обозначим также $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$. Задача состоит теперь в оценке $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$, а также соответствующей невязки, полученной при подстановке $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$ в (7.1). Эти оценки проводятся с помощью метода стационарной фазы по переменной q. Оказывается, что факт существования стационарных точек на отрезке $q \in [0, t]$ эквивалентен наличию на траекториях $(P(x_0, t), X(x_0, t))$ системы (4.1), (4.1′) точек пересечения терма H с термом λ^3_ν, а условие невырожденности этих точек совпадает с требованием на обращение в нуль в этих точках скобки Пуассона $\{H, \lambda^3_\nu\}$, если вместо $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$ рассмотреть при малом значении μ функцию $\exp\left(\frac{i\mu}{h}(-ih\partial/\partial x)^2\right)\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$, т. е. применить к $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$ не существенное с точки зрения оценок в $L_2(\mathbf{R}_x)$ унитарное преобразование. Соответствующие оценки для фиксированного ν фактически получены в [18], и несложная модификация результатов этой работы вместе с (5.1), (5.2) немедленно приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 7.1. *В* $L_2(\mathbf{R}_x)$ *при* $t \in [0, t_0]$ *справедливы оценки*

$$\|\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}\| \leqslant C^1_\nu \sqrt{h}, \quad \|L\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu} - F^{\mathrm{p}}_\nu\| \leqslant C^2_\nu h^{3/2}. \tag{7.3}$$

Здесь константы C^j_ν *зависят от* ν.

Лемма 7.1, к сожалению, не решает задачу оценки поправки, поскольку константы в C^j_ν зависят от ν и этими оценками мы можем воспользоваться лишь для конечного набора слагаемых $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$ — $|\nu| \leqslant N$, $|\nu| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$.

8. Оценка вкладов резонансов с большими номерами. Учитывая тот факт, что функции F^{p}_ν при больших ν «очень быстро» осциллируют (с частотой $|\nu|/h$) и что размеры ее носителя при $|\nu| \to \infty$ в силу условия (4.6) стремятся к нулю, будем оценивать в $L^2(R_x)$ функцию $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$, полученную не из функций g_ν и w_ν, а из их h — преобразований Фурье [1]; $\widetilde{w}_\nu = \mathcal{F}_{x\to p} w_\nu$ и $\widetilde{g}_\nu = \mathcal{F}_{x\to p} g_\nu$, т. е. решать соответствующую задачу для w_ν в p-представлении [1]. С точки зрения записи $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$ с помощью канонического оператора Маслова это означает, что в качестве атласа на многообразии $\Lambda^\nu_{q,t}$, хотя бы при $t = q$, мы выбираем

атлас, состоящий из одной p-карты. Для оправдания возможности проведения такой процедуры следует доказать, что возникающие при вычислении асимптотики функции $\hat{F}^{\mathrm{p}}_{\nu} = \mathcal{F}_{x\to p} F^{\mathrm{p}}_{\nu}$ погрешности оказываются не только малыми по h, но и достаточно быстро убывающими при $|\nu| \to \infty$. Соответствующие вычисления проводятся с помощью метода стационарной фазы и требуют установления точных оценок для остаточных членов, которые сравнительно легко получаются, если для вывода метода стационарной фазы применить операцию обхода фокусов [20, с. 70].

Обозначим $n = \nu/|\nu|$ и $\varepsilon = 1/|\nu|$. Следующая лемма, в основе которой лежит условие (4.4), позволяет регуляризовать задачи для определения $\psi^{\mathrm{p}}_{1\nu}$ при $|\nu| \to \infty$.

ЛЕММА 8.1. *Существует не зависящее от h число $\varepsilon^* > 0$ такое, что при всех ν: $|\nu| > 1/\varepsilon^*$, $t \in [0, t_0]$ для $\hat{F}^{\mathrm{p}}_{\nu}$ — справедливо равенство $\hat{F}^{\mathrm{p}}_{\nu} = \hat{F}^{0}_{\nu} + r_{\nu}(\tau, p, t, h)$, $\hat{F}^{0}_{\nu} = \exp(i\nu\cdot\Phi(x^{\mathrm{p}})/h + i\hat{S}_{\nu}/h)\tilde{f}u(\tau, p, \tilde{x}(p))$. Здесь $\hat{S}(p, t, \varepsilon, n)$, $\tilde{f}(p, t, \varepsilon, n)$, $\tilde{x}(p, t, \varepsilon, n)$ — гладкие функции всех своих аргументов, включая ε, $\operatorname{supp}\tilde{f} = \operatorname{supp} e(p)$. При этом справедливы оценки ($\alpha = 0$, $\alpha = 2$)*

$$\|\Delta^{\alpha}_{\tau} r_{\nu}(\tau, p, t, h)\|_{L_2(\mathbf{R}_p\times\mathbf{T})} \leqslant hc_8 \|f_{\nu}\|_{C^2(\mathbf{R}_x)} (1 + |\nu|^{3+2\alpha}).$$

Доказательство опирается на метод стационарной фазы и по существу состоит в исследовании уравнения $n\cdot\Phi_x + \varepsilon S_x = \varepsilon p$, определяющего стационарные точки $\tilde{x}$ соответствующего быстроосциллирующего интеграла для $\hat{F}^{\mathrm{p}}_{\nu}$.

Применим к уравнению (1.8) и условиям (7.2) преобразование Фурье, заменив при этом $\hat{F}^{\mathrm{p}}_{\nu}$ на $\hat{F}^{0}_{\nu}$. В результате получим семейство единообразных задач, зависящих уже регулярно от параметров n и $\varepsilon = 1/|\nu|$ (т. е. зависящих от номеров ν уже регулярно). Проводя соответствующие вычисления, вполне аналогичные предыдущим, приходим к формулам, выражающим w_{ν} через канонический оператор Маслова на семействе лагранжевых многообразий $\Lambda^{\nu}_{q,t}$. Эти многообразия те же, что и в п. 7, с той лишь разницей, что вместо координаты x_0 на них выбирается координата $p_0 \in \operatorname{supp} e$ и x при $t = q$ полагается равным $\tilde{x}(p_0, q, n, \varepsilon)$. Важным является следующее обстоятельство: параметры ε и n изменяются на компакте и начальные условия зависят от них гладко. Это

приводит к тому, что зависящий от ν при $|\nu| > N$ бесконечный набор задач для $\widetilde{w}_\nu$ разбивается на конечное число семейств задач, характеризуемых некоторым набором векторов n^k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ на окружности $|n| = 1$, и, как легко видеть, предельным значением параметра ε: $\varepsilon = 0$. Возникающие в конструкции асимптотических решений у каждого отдельного семейства объекты (атласы, разбиения единицы т. д.) гладко зависят от n и ε в окрестности точек $n = \eta^k$, $\varepsilon = 0$, что дает возможность написать единые формулы для решений из каждого семейства и получить требуемые оценки.

Для упрощения формул мы предположим, что при $t \in [0, t_0]$ на предельных многообразиях $\widetilde{\Lambda}^n_{q,t} = \lim\limits_{|\nu|\to\infty} \Lambda^\nu_{q,t}$ отсутствуют фокальные точки. Тогда этот же факт будет иметь место при достаточно малых ε. Без уменьшения общности будем считать, что это так при $\varepsilon < \varepsilon^*$. В этом случае функции можно записать в виде

$$\widetilde{w}_\nu = \exp\left(i\Phi\left(x^p(n)\right)\cdot\nu/h\right) I(G, \chi), \tag{8.1}$$

$$I(G, \chi) = \int_0^t \exp\left(\frac{iG(p, t, q, n, \varepsilon)}{n}\right)\chi(\tau, p, t, q, n, \varepsilon)\,dq. \tag{8.2}$$

Здесь фаза G есть решение уравнения Гамильтона — Якоби: $G_t + H(p, -G_p) = 0$, $G|_{t=q} = \widetilde{S}(p, q, n, \varepsilon)$; χ — гладкие функции, носители которых по переменной p принадлежат некоторому не зависящему от h, n и ε отрезку. Явный вид χ нам не понадобится и формулы для χ мы не приводим.

Дальнейшие рассуждения преследуют следующую цель: получить оценки (7.3) с такими константами C^j_ν, что $|C^j_\nu| \leqslant c_9/|\nu|^\varkappa$, $\varkappa > 2$. Эти оценки, как и в [18], выводятся с помощью метода стационарной фазы (по переменной q) для интегралов типа (8.2), и здесь, разумеется, имеют место те же факты, что и в п. 7, но для функций, зависящих от p. Наличие стационарных точек у функции обусловлено пересечением терма H с λ^3_ν (т. е. резонансами). Стационарные точки G, вообще говоря, могут быть вырожденными, и для того чтобы снять это вырождение, к функции вида (8.2) приходится, как и в [18], применять унитарное преобразование $\mathcal{U} = \exp\left(\frac{i\mu}{h}\left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right)$. Параметр μ оказывается возможным выбрать таким образом, что, с одной стороны, результат можно вычислить

с помощью метода ВКБ и записать в виде, аналогичном (8.2), а с другой — что стационарные точки нового интеграла оказываются невырожденными. Основное отличие от [18] в реализации изложенной схемы состоит в более тонких и трудоемких вычислениях оценочных констант, учитывающих их зависимость от $\varepsilon = 1/|\nu|$ (и τ).

Рассмотрим интеграл (8.2), в котором гладкая финитная по p функция χ пока не предполагается связанной с решением задачи (1.8), (7.2), но имеет носитель, принадлежащий фиксированному отрезку $[a, b]$. Следующее утверждение по существу является центральным в задаче оценки поправки ψ_1.

ЛЕММА 8.2. *При* $|\nu| > 1/\varepsilon^*$ *справедлива оценка*

$$\| I(G, \chi) \|_{L_2(\mathbf{R}_p \times \mathbf{T})} \leqslant c_{10} |b - a| \sqrt{h} \| \chi \|_{C^2(\mathbf{R}_p)}. \qquad (8.3)$$

Здесь c_{10} — *константа задачи*; *она зависит от* Φ, S^0, E, t_0, A^0, *но не зависит от* n, ε, *т. е.* ν.

Схема доказательства. Полное доказательство довольно громоздко и мы укажем лишь узловые моменты.

1. Простые рассуждения показывают, что отрезок $[a, b]$ можно выбрать достаточно малым (но не зависящим от h и ε).

2. Оценку (8.3) достаточно доказать для интеграла $I(G^\mu, \chi^\mu)$, где $G^\mu = G(p', y) + \mu (G_p(p', y))^2$, $\chi^\mu = \chi(\tau, p', y)/\sqrt{1 + 2\mu G_{pp}(p', y)}$, $y = (t, q, n, \varepsilon)$; $p' = p'(p, y)$ — решение уравнения $p' + 2\mu G_p(p', y)$, $p \in [a, b]$. При этом $|\mu| < \mu_0 = 1/|2 \max_{p \in [a, b]} G_{pp}|$. Это вытекает из унитарности оператора $\mathcal{U}$ и оценки

$$\| \mathcal{U} I(G, \chi) - I(G^\mu, \chi^\mu) \|_{L_2(R_p)} \leqslant c_{11} h |\mu| \| \chi \|_{L_2(\mathbf{R}_p \times \mathbf{T})} / |\mu - \mu_0|,$$

которая получается с помощью рассуждений, вполне аналогичных рассуждениям [20, с. 70].

3. В предположении, что на отрезке $[a, b]$ у функции G^μ могут быть лишь изолированные невырожденные критические точки, в результате аккуратного анализа формул метода стационарной фазы на отрезке $q \in [0, t]$ можно установить следующую (возможно, завышенную) оценку:

$$|I(G^\mu, \chi^\mu)| \leqslant c_{12} \sqrt{h} \max_{k=0, 1, 2, q \in [0, t_0]} \left| \frac{\partial^k \chi}{\partial q^k} \right|, \qquad (8.4)$$

где константа c_{12} зависит от t и G^μ.

4. Дословное повторение рассуждений [18], основанное на дифференцировании по q уравнений Гамильтона — Якоби для функций G и G^{μ}, и разложение G^{μ} по μ в ряд приводит к следующим фактам. Производная $\partial G^{\mu}/\partial q = 0$ тогда и только тогда, когда точка p получена последовательным сдвигом вдоль траекторий систем (4.4) и $\dot{p} = 2x$, $\dot{x} = 0$, за времена $t - q$ и μ соответственно из точки (p^0, x^0), принадлежащей пересечению образа носителя $e(p)$ на многообразии $\Lambda^{\nu}_{q,t}$ в $\mathbf{R}^2_{p,x}$ с резонансными множествами $\mathfrak{M}^1_{\nu}$ или $\mathfrak{M}^2_{\nu}$: $p = \pi_p g^{\mu}_{x^2} g^{t-q}_H (p^0, x^0)$. Здесь π_p — естественная проекция $\mathbf{R}^2_{p,x} \to \mathbf{R}_p$. В этих (критических) точках $(p, y, \mu) \equiv (p, t, q, n, \varepsilon, \mu)$

$$\frac{\partial^2 G^{\mu}}{\partial q^2} = G^{\mu,\,\text{кр}}_{qq} \overset{\text{def}}{=} \{H(p, x), H(p + \nu \cdot U, x)\} + \\ + \mathcal{D} G_{pq}(p, y) - \mu (G_{pq}(p, y))^2 + O(\mu^2), \quad (8.5)$$

где аргументы в скобках Пуассона равны (p^0, x^0); $\mathcal{D} = H_p(-2A_{12} + A_{22}(\nu \cdot U_x - U_{2x}))$, если $p^0, x^0 = \mathfrak{M}^1_{\nu}$, и $\mathcal{D} = H_p(\nu \cdot U_x - U_{2x}) A_{22}$, если $(p^0, x^0) \in \mathfrak{M}^2_{\nu}$. Здесь A_{12}, A_{22} — элементы матрицы, соответствующие дифференциалу $\mathrm{d} g^{q-t}_H$ канонического преобразования g^{q-t}_H, вычисленному на траектории, соединяющей точки $(p, -G_p)$ и (p^0, x^0) и аргументы у H_p и $U_x \equiv \partial U(E(x))/\partial x - (p^0, x^0)$. Оценка $O(\mu^2)$ в (8.5) равномерна по p, t, q, n и ε при $\varepsilon < \varepsilon^*$. Из равенств (8.1) и условий (4.6), (4.7) немедленно следует утверждение о существовании такого достаточно малого μ, что в критических точках $G^{\mu,\,\text{кр}}_{qq} \neq 0$. Однако в отличие от [18] этого факта для доказательства леммы 8.2 не достаточно — следует получить более содержательное утверждение о существовании при каком-либо достаточно малом μ равномерной по ε, $\varepsilon < \varepsilon^*$, оценки снизу: $|G^{\mu,\,\text{кр}}_{qq}| > c_{13} > 0$. Этот факт получается с помощью более тщательного анализа формул (8.5) и вытекает как и из условий (4.6), (4.7), так и свойства равномерной по ε ограниченности сверху элементов A_{12} и A_{22}.

ЛЕММА 8.3. *Для констант C^j_{ν} в лемме 7.2 справедливы неравенства $C^j_{\nu} \leqslant c_{14}(\varkappa)/|\nu|^{\varkappa}$, $j = 1, 2$, $\varkappa$ — любое.*

Схема доказательства. Первое неравенство немедленно следует из (5.2), леммы 8.2 и свойства быстрого убывания по ν при $|\nu| \to \infty$ коэффициентов Фурье f^j_{ν}. Далее, применяя формулу коммутации псевдодиффе-

ренциального оператора и экспоненты, с учетом определения G получим

$$L\psi_{1\nu}^{\mathrm{p}} - F_{\nu}^{\mathrm{p}} =$$
$$= \left[\mathcal{F}_{p\to x}^{-1} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{iG}{h}} \left(hA_1 \frac{\partial\chi}{\partial p} + hA_2\chi + h^2 A_3\chi\right) \mathrm{d}q\right]_{\tau = \frac{\Phi(x)}{h}}, \quad (8.6)$$

где A_1, A_2 — дифференциальные по τ операторы с коэффициентами, гладко зависящими от τ, G_p и G_{pp}; оператор A_3 зависит от τ как от параметра и для него справедлива оценка $\max\limits_{\tau\in\mathbf{T}} \| A_3\chi \|_{L_2(\mathbf{R}_p)} \leqslant c_{15} \max\limits_{\tau\in T} \| \chi \|_{C^2(\mathbf{R}_p)}$. Аналогичная оценка имеет место и для производной $\Delta_\tau^2 (A_3\chi)$. С учетом свойства быстрого убывания коэффициентов доказательство второго неравенства леммы теперь сводится к применению леммы 8.2 для первых двух слагаемых в невязке (8.6), леммы 8.1 и оценки (5.2).

Для доказательства теоремы следует оценить с помощью леммы 6.1, 7.1 и 8.3 суммарную невязку, полученную при подстановке в уравнение (1.1) функции $\psi_0 + \psi_1^{\mathrm{H}} + \Sigma_{\nu\in\mathbf{Z}^2}\psi_{1\nu}^{\mathrm{p}}$, и воспользоваться неравенством (5.1).

Институт проблем
механики АН СССР

Поступило
10.05.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.
[2] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31, № 1. С. 55—136.
[3] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Хилла с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза // Теорет. и мат. физика. 1975. Т. 23, вып. 1. С. 51—64.
[4] Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
[5] Dobrokhotov S. Yu., Maslov V. P. Multiphase asymptotic of nonlinear partial differential equations with a small parameter // Math. Phys. Rev. V. 3. Sov. Sci. Rev. / Amsterdam: Over Publ. Ass. 1982. P. 221—311.
[6] Маслов В. П. Нестандартные характеристики в асимптотических задачах // УМН. 1983. Т. 38, вып. 6. С. 3—36.
[7] Доброхотов С. Ю. Приложение теории Маслова к двум задачам для уравнений с операторнозначным символом // УМН. 1984. Т. 39, вып. 4. С. 125.

[8] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории колебаний. М.: Наука, 1974.
[9] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
[10] Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю. Полнота системы собственных функций неэллиптического оператора на торе // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, вып. 2. С. 65—66.
[11] Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.
[12] Bensousan A., Lions G. L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North. Holl. 1978.
[13] Буслаев В. С. Адиабатическое возмущение периодического потенциала // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 58, № 2. С. 233—243.
[14] Буслаев В. С. Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1987. Т. 42, № 6. С. 77—98.
[15] Берлянд Л. В., Доброхотов С. Ю. Операторное разделение переменных в задачах о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 296, № 1. С. 80—84.
[16] Пятницкий А. В. Задача рассеяния в слоистых средах // Мат. сб. 1981. Т. 115 (157), вып. 3(7). С. 478—492.
[17] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91—192.
[18] Кучеренко В. В. Асимптотика решения системы $A(x, -ih\partial/\partial x)\, u = 0$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, № 3. С. 625—662.
[19] Доброхотов С. Ю. Параметрические резонансы к задаче Коши для уравнения Шредингера с быстроосциллирующим конечнозонным почтипериодическим потенциалом // УМН. 1988 Т. 43, вып. 3. С. 242—244.
[20] Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.