



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Yu. Plakhov, On multiparticle systems on a straight line with a triangular scattering reflection, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 173–174

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

January 25, 2025, 03:14:07



**О МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ НА ПРЯМОЙ
С ТРЕУГОЛЬНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ РАССЕЯНИЯ**

А. Ю. П л а х о в

1. Рассмотрим гамильтонову систему в \mathbb{R}^{2n} с гамильтонианом

$$(1) \quad H(q, p) = \sum \frac{p_i^2}{2} + \sum V(q_j - q_i).$$

Будем считать, что потенциал взаимодействия V удовлетворяет следующим условиям:

$$(2) \quad V'(x) < 0, \quad x \in (0, \infty); \quad V(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 0+); \quad \int_0^\infty |V(x)| dx < \infty.$$

Известно (см. [1]), что они являются достаточными для существования отображения рассеяния $\sigma: (q^-, p^-) \rightarrow (q^+, p^+)$, где $q^\pm, p^\pm \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим M_n множество потенциалов, для которых отображение рассеяния в системе с гамильтонианом (1) имеет треугольный вид, т. е. $p^+ = f(p^-)$, $q^+ = g(q^-, p^-)$. В случае $n = 2$ отображение рассеяния всегда имеет треугольный вид: $q_1^+ = q_2^- + \delta(p_1^- - p_2^-)$, $q_2^+ = q_1^- - \delta(p_1^- - p_2^-)$, $p_1^+ = p_2^-$, $p_2^+ = p_1^-$. Таким образом, каждому потенциалу V можно сопоставить функцию δ (сдвиг фаз), определенную на $(0, \infty)$. Потенциал V принадлежит M_n , если и только если для всех (q^-, p^-) $p_i^+ = p_{n+1-i}^-$ ($i = 1, \dots, n$).

Известно, что для всех n потенциалы a^2x^{-2} и $a^2 \operatorname{sh}^{-2} bx$ принадлежат M_n (см. [2]).

В [3] показано, что $V(x) = x^{-2}$, если $V \in M_3$ и $V(x)$ убывает степенным образом: $V(x) = x^{-k}(1 + o(1))$ ($x \rightarrow +\infty$), $k > 1$.

Т е о р е м а 1. Пусть $V(x) = e^{-kx+a(x)} \in M_n$, $n \geq 3$, $k > 0$, $a \in C^2(0, \infty)$, $a' \rightarrow 0$, $a'' \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$). Тогда $V(x) = b^2 \operatorname{sh}^{-2}(kx/2)$ для некоторого $b > 0$.

Можно показать, что $M_n \supset M_{n+1}$ при $n \geq 2$, и поэтому достаточно ограничиться случаем $n = 3$.

Движение системы трех частиц определяется шестью параметрами: $q_1^-, q_2^-, q_3^-, p_1^-, p_2^-, p_3^-$. Фиксировав все параметры, кроме q_3^- , рассмотрим движение $\{q_i(t, q_3^-), p_i(t, q_3^-), i = 1, 2, 3\}$ при $q_3^- \rightarrow +\infty$. Положим $t_1 = (3\delta_{12} - q_{12} - q_{13})(p_{12} + p_{13})^{-1}$, $t_2 = (3\delta_{13} - q_{13} - q_{23})(p_{13} + p_{23})^{-1}$, $d_1 = p_{12}t_1 + q_{12} - 2\delta_{12}$, $d_2 = p_{32}t_2 + q_{32} + \delta_{13} - \delta_{12}$, где $p_{ij} = p_i^- - p_j^-$, $q_{ij} = q_i^- - q_j^-$, $\delta_{ij} = \delta(p_{ij})$. На каждом из промежутков $(-\infty, t_1)$, (t_1, t_2) , $(t_2, +\infty)$ находим изменение импульса p_1 .

На $(-\infty, t_1)$ рассмотрим движение $(\bar{q}_j(t), \bar{p}_j(t), j = 1, 2)$ 1-й и 2-й частиц без учета влияния 3-й. Оказывается, что

$$p_1(t_1) = p_1(t_1) + O(V(2d_1(1-\epsilon))) = p_2^- + p_{12}^- V(d_1) + O(V(2d_1(1-\epsilon)))$$

при $q_3^- \rightarrow +\infty$ для любого $\epsilon \in (0, 1)$. Далее, поскольку $\{q_i(-t), -p_i(-t), i = 1, 2, 3\}$ есть движение с тем же потенциалом и данными рассеяния при $t \rightarrow -\infty$ ($q_3^- + \delta_{13} + \delta_{23}$, $q_2^- + \delta_{12} - \delta_{23}$, $q_1^- - \delta_{12} - \delta_{13}$, $-p_3^-$, $-p_2^-$, $-p_1^-$), сразу получаем аналогичную формулу для $p_1(t_2)$. Отсюда

$$(3) \quad p_1(t_2) - p_1(t_1) = -p_{12}^- V(d_1) - p_{23}^- V(d_2) + O(V(2d_1(1-\epsilon)) + V(2d_2(1-\epsilon))).$$

С другой стороны, изменение импульса p_1 на промежутке (t_1, t_2) можно найти по формуле

$$(4) \quad p_1(t_2) - p_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [V'(q_2(t) - q_1(t)) + V'(q_3(t) - q_1(t))] dt.$$

Заменяем в правой части (4) $q_1(t)$ на $p_2^- t + q_2^- + \delta_{12}$, $q_2(t)$ и $q_3(t)$ на координаты в момент времени t частиц, взаимодействующих с потенциалом V с данными рассеяния при $t \rightarrow -\infty$ ($q_1^- - \delta_{12}$, q_3^- , p_1^- , p_3^-), и показываем, что правая часть (4) изменится на $o(V(h))$, где $h = p_{12}p_{13}^{-1}(\delta_{12} + \delta_{13} - q_{13}) + (q_{12} - 2\delta_{12} - \delta_{13}/2)$. Вычисляя выражение, полученное

после замены, находим

$$(5) \quad p_1(t_2) - p_1(t_1) = -p_{12}^{-1} V(d_1) - p_{23}^{-1} V(d_2) + V(h) \omega + o(V(h)),$$

где

$$(6) \quad \omega = \frac{4k}{v} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{k}{2} q_v \left(\frac{x}{v} \right) \right) - e^{-\delta_{13}} \operatorname{ch} \frac{kx}{2} \right] \operatorname{ch} \frac{\lambda kx}{2} dx,$$

$\lambda = (p_{12} - p_{23})/p_{13}$, $v = p_{13}$, $q_v(t)$ — решение уравнения $\dot{q}^2/2 + 2V(q) = v^2/2$, $\dot{q}(0) = 0$.

Мы видим, что ω не зависит от q_3 . Сравнивая правые части (3) и (5) и учитывая, что при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ $V(2d_1(1 - \varepsilon)) + V(2d_2(1 - \varepsilon)) = o(V(h))$, получаем $\omega = 0$. Отсюда с учетом произвольности $\lambda \in (-1, 1)$, v выводим, что потенциал имеет вид $b^2 \operatorname{sh}^{-2}(kx/2)$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда потенциал $V \in M_n$ продолжается в комплексную окрестность нуля до аналитической функции с алгебраической особой точкой в нуле.

Если $(-q(t), 0, q(t))$ — движение в системе с потенциалом V , то $(-q(t), q(t))$ есть движение в двухчастичной системе с потенциалом $V(x) + 2V(x/2)$. Обозначим $\delta^W(p)$ сдвиг фаз, соответствующий потенциалу, обратному к функции W . Отображение $W \rightarrow \delta^W$ линейно, $\delta^{W(\alpha y)}(p) = \delta^{W(y)}(\sqrt{\alpha}p)$ для $\alpha > 0$ (см. [4]).

Имеем $q_3^{\pm} = -\delta^{W_1(y)}(2p)$, где $W_1(y)$ — функция, обратная к $V(x) + 2V(x/2)$. С другой стороны, при $V \in M_3$ $q_3^{\pm} - q_1^{\pm} = -\delta(p_1^- - p_2^-) - \delta(p_1^- - p_3^-)$ (см. [4]). Отсюда $q_3^{\pm} = -\delta^{W(y)}(p) - \delta^{W(y)}(2p) = -\delta^{W(y/4) + W(y)}(2p)$. Таким образом, $\delta^{W_1(y)} \equiv \delta^{W(y/4) + W(y)}$. Используя результат Мозера [4], получаем $W_1(y) - W(y/4) - W(y) = cy^{-1/2}$ при условии,

что $V \in M_3$, $\int_0^{\infty} [V(x)]^{\theta} dx < \infty$ ($0 < \theta < 1$).

Итак, мы приходим к следующей лемме.

Л е м м а Пусть $W(y)$ — функция, обратная к $V(x)$; V удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда функции $V(x/2) + V(x)/2$ и $W(2y) + W(y/2) + cy^{-1/2}$ взаимно обратны при некотором c .

С помощью этой леммы доказывается

Т е о р е м а 2. Пусть $V(x) \in M_n$, $\int_0^{\infty} [V(x)]^{\theta} dx < \infty$, $\theta \in (0, 1)$; $V(x)$ совпадает на

$(0, \varepsilon)$ с одной из ветвей аналитической функции, имеющей в нуле алгебраическую особую точку. Тогда либо $V(x) = a^2 x^{-2}$, либо $V(x) = a^2 \operatorname{sh}^{-2} bx$.

Наметим доказательство этой теоремы. Сначала находим с помощью леммы тип особенности потенциала $V(x) = x^{-k} (1 + o(1))$ ($x \rightarrow 0+$). Оказывается, что либо а) $k = 2$, либо б) $k = 1$. В случае а) разложим в степенной ряд функцию $[V(x)]^{-1/2} = x(a_0 + a_1 x^{1/m} + a_2 x^{2/m} + \dots)$, $x \in (0, \varepsilon)$. Можно показать, что коэффициенты разложения a_n однозначно определяются значениями a_0 и a_{2m} . Следовательно, $V(x) = a^2 \operatorname{sh}^{-2} bx$ при надлежащем выборе a и b , когда $a_{2m} \neq 0$, и $V(x) = a^2 x^{-2}$, когда $a_{2m} = 0$. Случай б) рассматриваем аналогично. Он не дает новых потенциалов.

Автор благодарит А. М. Степина за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г а л ь п е р и н Асимптотическое поведение системы частиц с отталкиванием.— УМН, 1981, 36 : 5, с. 167.
- [2] J. M o s e r. Three integrable hamiltonian systems connected with isospectral deformation.— Adv. Math., 1975, 16, 197—220.
- [3] N. G. H i m c h e n k o, Y a. G. S i n a i. Description of Classical Reflectionless Potentials.— Reports in Math. Phys., 1982.
- [4] J. M o s e r The scattering problem for some particle systems on the line.— Lect. Notes in Math., 1977, 597, 441—463.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества
28 декабря 1981 г.