S. P. Odintsov, Recursive Boolean algebras with a hyperhyperimmune set of atoms, *Mat. Zametki*, 1988, Volume 44, Issue 4, 488–493

https://www.mathnet.ru/eng/mzm4237

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

О РЕКУРСИВНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ С ГИПЕРГИПЕРИММУННЫМ МНОЖЕСТВОМ АТОМОВ

С. П. Одинцов

Булева алгебра $\mathfrak{B} = \langle B, \bigcup, \bigcap, c\rangle$ называется рекурсивной, если ее носитель $|\mathfrak{B}|$ есть множество натуральных чисел ω, а операции — общерекурсивные функции. Понятие рекурсивной булевой алгебры в известном смысле эквивалентно более распространенному в отечественной литературе понятию конструктивной булевой алгебры. При изучении этих объектов одно из направлений связано с характеризацией важнейших формульных подмножеств булевой алгебры с точки зрения классической теории рекурсии. В связи с этим интересен вопрос Ремела [1, § 3]. Ремел получил хорошее алгебраическое описание булевых алгебр, изоморфных некоторой рекурсивной булевой алгебре, имеющей сжатое или квазисжатое множество атомов. Сжатое и квазисжатое множества являются частными случаями гипергипериммунных множеств [2], поэтому хотелось бы получить подобное описание и в общем случае. Пусть $\mathrm{Ism}(\mathfrak{B})$ обозначает тип изоморфизма булевой алгебры $\mathfrak{B}$, т. е. класс всех булевых алгебр изоморфных $\mathfrak{B}$. Вопрос Ремела заключается, таким образом, в том, чтобы описать класс $\mathfrak{S}$ типов изоморфизма булевых алгебр, содержащих рекурсивную булеву алгебру с гипергипериммунным множеством атомов. В заметке отражены некоторые подходы к вопросу Ремела, основанные на результатах Лахлана [3].

Вся необходимая информация о рекурсивных и конструктивных булевых алгебрах содержится в [1, 4]. Обозначения и термины из теории рекурсии согласуются с монографией [2].

Если $\alpha \subseteq \omega$, то $\mathscr{L}(\alpha)$ будет обозначать решетку рекурсивно-перечислимых надмножеств множества α. Пусть $\alpha, \beta \subseteq \omega$, тогда $\alpha \sim_f \beta$ в том и только в том случае, если симметрическая разность $\alpha \setminus \beta \cup \beta \setminus \alpha$ является конечным множеством. Отношение $\sim_f$ является *конгруэнцией* на решетке $\mathscr{L}(\alpha)$, поэтому можно рассматривать фактор-решетку $\mathscr{L}^*(\alpha)$ решетки $\mathscr{L}(\alpha)$ по конгруэнции $\sim_f$.

Ясно, что если множество атомов $A(\mathfrak{B})$ рекурсивной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ гипергипериммунно, то его дополнение, обозначим его $N(\mathfrak{B})$, гипергиперпросто, так как множество атомов рекурсивной булевой алгебры корекурсивно-перечислимо.

Лахлан [3] установил, что гипергиперпростые множества — это в точности такие рекурсивно-перечислимые множества η, что $\mathscr{L}^*(\eta)$ — булева алгебра. Возникает естественная классификация гипергиперпростых множеств η, в соответствии с типами изоморфизма булевых алгебр $\mathscr{L}^*(\eta)$. Поэтому представляется естественным вопрос, какие существуют связи между типом изоморфизма рекурсивной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ с гипергипериммунным множеством атомов и типом изоморфизма булевой алгебры $\mathscr{L}^*(N/\mathfrak{B})$).

Будем обозначать через AB $(\mathfrak{B})$ идеал булевой алгебры $\mathfrak{B}$, порожденный атомами и безатомными элементами. Каждый элемент AB $(\mathfrak{B})$ есть объединение конечного множества атомов (возможно пустого) и безатомного элемента (который, впрочем, может быть равен нулю).

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Если $a \in |\mathfrak{B}|$, то через $[a]_{\mathfrak{B}}$ обозначим главный идеал, порожденный элементом a. Идеал $[a]_{\mathfrak{B}}$ можно рассматривать и как булеву алгебру, где элемент a играет роль единицы. Если $A \subseteq |\mathfrak{B}|$, то $(A)^*$ — подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{B}$, порожденная элементами из множества A.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *рекурсивная булева алгебра с гипергипериммунным множеством атомов, тогда фактор-алгебра* $\mathfrak{B}/\mathrm{AB}(\mathfrak{B})$ *изоморфно вкладывается в булеву алгебру* $\mathfrak{B}^*(N(\mathfrak{B}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поставим в соответствие элементу $a \in |\mathfrak{B}|$ множество $\varphi(a) = N(\mathfrak{B}) \cup A([a]_{\mathfrak{B}})$. Это множество рекурсивно-перечислимо, так как $N(\mathfrak{B}) \cup \cup A([a]_{\mathfrak{B}})$. Это множество рекурсивно-перечислимо, так как $N(\mathfrak{B}) \cup A([a]_{\mathfrak{B}}) = N(\mathfrak{B}) \cup [a]_{\mathfrak{B}}$. Получили отображение φ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ в решетку $\mathscr{L}(N(\mathfrak{B}))$.

Если симметрическая разность элементов a и b, $(a \cap \cap c(b)) \cup (b \cap c(a))$, лежит в $\mathrm{AB}(\mathfrak{B})$, то $\varphi(a) \sim_f \sim_f \varphi(b)$, так как всякий элемент идеала $\mathrm{AB}(\mathfrak{B})$ содержит лишь конечное число атомов. Верно и обратное. Если $\varphi(a) \sim_f \varphi(b)$, то симметрическая разность элементов a и b лежит в идеале $\mathrm{AB}(\mathfrak{B})$. Поэтому отображение φ позволяет определить взаимно-однозначное отображение φ^* из $\mathfrak{B}/\mathrm{AB}(\mathfrak{B})$ в $\mathscr{L}^*(N(\mathfrak{B}))$ следующим образом:

$$\varphi^*(a/\mathrm{AB}(\mathfrak{B})) = \varphi(a)/\sim_f,$$

для каждого $a \in |\mathfrak{B}|$. Тот факт, что φ^* — изоморфное вложение, не вызывает сомнения.

Это предложение позволяет добавить к проблеме Ремела еще один вопрос. Именно, для каких рекурсивных булевых алгебр с гипергипериммунным множеством атомов изоморфное вложение, построенное в предложении 1, будет изоморфизмом. Иными словами, какие рекурсивные булевы алгебры $\mathfrak{B}$ удовлетворяют свойству:

$$(\forall e \in \omega)(\exists a \in |\mathfrak{B}|)(W_e \cup N(\mathfrak{B}) = [a]_{\mathfrak{B}} \cup N(\mathfrak{B})). \quad (*)$$

Здесь W_0, W_1, ... — эффективный список всех рекурсивно-перечислимых множеств.

Отметим, что если рекурсивная булева алгебра $\mathfrak{B}$ удовлетворяет свойству $(*)$, то множество ее атомов гипергипериммунно. Действительно, если $N(\mathfrak{B}) \cup W_e = [a]_{\mathfrak{B}} \cup \cup N(\mathfrak{B})$ для некоторого $a \in |\mathfrak{B}|$, то $N(\mathfrak{B}) \cup \overline{W}_e = = [c(a)]_{\mathfrak{B}} \cup N(\mathfrak{B})$. Последнее множество, очевидно, является рекурсивно-перечислимым. Значит, $\mathscr{L}^*(N(\mathfrak{B}))$ — булева алгебра, множество $N(\mathfrak{B})$ гипергиперпросто, а $A(\mathfrak{B})$ гипергипериммунно.

Ранее Ремел [1] показал, что классу $\mathfrak{S}$ не принадлежат типы изоморфизма булевых алгебр $\mathfrak{B}$ таких, что фактор-алгебра по идеалу Фреше $\mathfrak{B}/F(\mathfrak{B})$ содержит атомы. Поэтому класс $\mathfrak{S}$ содержится в следующем классе.

$$\{\mathrm{Ism}(\mathfrak{B}) \mid \mathfrak{B} \text{ — рекурсивная булева алгебра и } \mathfrak{B}/F(\mathfrak{B}) \text{ — безатомная булева алгебра}\}. \quad (**)$$

Пока неизвестно, является ли упомянутое выше включение строгим. Возникает еще один вопрос, всякий ли тип изоморфизма из класса $(**)$ содержит рекурсивную булеву алгебру, удовлетворяющую свойству $(*)$. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующее предположение.

П р е д л о ж е н и е 2. *Рекурсивная атомнонасыщенная булева алгебра не может удовлетворять свойству* (∗).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что атомнонасыщенной называют атомную булеву алгебру такую, что каждый ее элемент, содержащий бесконечно много атомов, можно разбить на две части, каждая из которых, в свою очередь, содержит бесконечно много атомов. Иными словами, атомная булева алгебра $\mathfrak{B}$ атомнонасыщена, если $\mathfrak{B}/F(\mathfrak{B})$ — безатомная булева алгебра. Любые две счетные атомнонасыщенные булевы алгебры изоморфны (см. теорему 1 и следствие 3.1 из [4]). Атомнонасыщенная булева алгебра допускает рекурсивное представление [1]. Таким образом, это единственный тип изоморфизма атомной булевой алгебры, принадлежащий классу (∗∗).

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая атомнонасыщенная рекурсивная булева алгебра, $1 = a_0, a_1, \ldots$ — ее рекурсивно-перечислимая порождающая последовательность [1, с. 575], $\mathfrak{B}^s = (\{a_0, \ldots, a_s\})^*$, $s \in \omega$.

Рассмотрим множество $R = \bigcup_{s \in \omega} A(\mathfrak{B}^s)$. Это множество рекурсивно. Действительно, по определению рекурсивно-перечислимой порождающей последовательности $\mathfrak{B} = \bigcup_{s \in \omega} \mathfrak{B}^s$, поэтому для того чтобы определить, принадлежит ли $a \in |\mathfrak{B}|$ множеству R, достаточно перечислить $\{a_s\}$ до тех пор, пока элемент a не попадет в конечную булеву алгебру $\mathfrak{B}^{s_0}$ для некоторого s_0.

Разобьем R на два рекурсивных множества R_0 и R_1 ($R_0 \cup R_1 = R$, $R_0 \cap R_1 = \varnothing$) следующим образом. По определению последовательности $\{a_s\}$, на каждом шаге s существует единственный атом $a \in A(\mathfrak{B}^s)$ такой, что $a_{s+1} < a$. $A(\mathfrak{B}^{s+1}) = (A(\mathfrak{B}^s) \setminus \{a\}) \cup \{a_{s+1}, \quad a \setminus a_{s+1}\}$. Меньший, в смысле естественного порядка на множестве натуральных чисел, элемент множества $\{a_{s+1}, a \setminus a_{s+1}\}$ отнесем к R_0, больший — к R_1. По крайней мере одно из множеств R_0, R_1 имеет бесконечное пересечение с $A(\mathfrak{B})$, так как $A(\mathfrak{B}) \subset R$ и $R = R_0 \cup R_1$. Пусть это будет R_0.

Предположим, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет свойству (∗), тогда найдется элемент $a \in |\mathfrak{B}|$ такой, что $A([a]_{\mathfrak{B}}) = R_0 \cap A(\mathfrak{B})$. Построим эффективную последовательность рекурсивно-перечислимых множеств, существование которой противоречит гипергиперпростоте множества $N([a]_{\mathfrak{B}})$.

Заметим, что никакой элемент множества $([a]_{\mathfrak{B}} \cap R) \setminus A([a]_{\mathfrak{B}})$ не является объединением конечного числа атомов. Допустим противное, $b \in [a]_{\mathfrak{B}} \cap R \cap \cap (F(\mathfrak{B}) \setminus A(\mathfrak{B}))$. Найдется s_0 такое, что $b \in A(\mathfrak{B}^{s_0})$ и $a_{s_0+1} < b$, тогда элементы a_{s_0+1} и $b \setminus a_{s_0+1}$ оба принадлежат R и оба содержат меньшее число атомов, чем b. Через конечное число шагов получим элемент $c \in R$, $c \leqslant b$ такой, что c есть объединение в точности двух атомов x_0 и x_1, $x_0, x_1 \in A(\mathfrak{B})$. По определению множеств R_0 и R_1, один из этих атомов попадет в R_0, другой — в R_1. Последнее противоречит выбору элемента a, так как $A([a]_{\mathfrak{B}}) \cap R_1 = \varnothing$.

Теперь определим последовательность $\{\chi_i\}_{i \in \omega}$ следующим образом.

Шаг 0. Находим наименьшее $s(0)$ такое, что $a \in \in \mathfrak{B}^{s(0)} \setminus A(\mathfrak{B}^{s(0)})$. Выбираем произвольным образом элементы $c_0, b_0 \leqslant a$ такие, что $c_0, b_0 \in A(\mathfrak{B}^{s(0)})$, $c_0 \in R_0$, $b_0 \in R_1$. Согласно сделанному выше замечанию $b_0 \notin \notin F(\mathfrak{B})$.

Шаг $n+1$. Элементы c_n и b_n уже определены, причем $b_n \notin F(\mathfrak{B})$. Значит, найдется такое $s(n+1)$, что $b_n \in A(\mathfrak{B}^{s(n+1)})$ и $a_{s(n+1)+1} < b_n$. Один из элементов множества $\{a_{s(n+1)+1}, b_n \setminus a_{s(n+1)+1}\}$ принадлежит множеству R_0, его выбираем в качестве c_{n+1}. Другой принадлежит R_1, это будет b_{n+1}.

Итак, для каждого $n \in \omega$ определены элементы c_n и b_n. Причем $c_n \cap b_n = 0$ и $c_{n+k} < b_n$, для любого $k \geqslant 1$, поэтому $c_i \cap c_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in \omega$.

Полагаем $\chi_i = [c_i]_{\mathfrak{B}}$, $i \in \omega$. Элемент c_n находится эффективно по n, как это видно из определения, поэтому мы получили эффективную последовательность рекурсивно-перечислимых множеств. Ясно, что эти множества попарно не пересекаются. Для любого $i \in \omega$ имеем $\chi_i \cap \cap A(\mathfrak{B}) \neq \varnothing$, так как $\mathfrak{B}$ — атомная булева алгебра. Таким образом, множество $N(\mathfrak{B})$ не гипергиперпросто, тем более $\mathfrak{B}$ не может удовлетворять свойству (*). Предложение доказано.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{B}$ — рекурсивная булева алгебра,* Ism ($\mathfrak{B}$) *принадлежит классу* (**) *и в $\mathfrak{B}$ имеется атомный элемент, содержащий бесконечно много атомов. Тогда $\mathfrak{B}$ не удовлетворяет свойству* (*).

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
23.10.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Remmel J. B. Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras / Journ. of Symb. Logic. 1981. V. 46, № 3. P. 572—594.

[2] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость // М.: Мир. 1972. Т. 189. С. 296—303.

[3] Лахлан А. Х. Решетка рекурсивно-перечислимых множеств. В кн.: Шенфилд Дж. Степени неразрешимости, М.: Наука, 1977. С. 109—162.

[4] Гончаров С. С. Некоторые свойства конструкций булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 264—278.