ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

Л. М. Мартынов УДК 512.53

О ДОСТИЖИМЫХ КЛАССАХ ПОЛУГРУПП С НУЛЕМ

В последнее время в алгебре интенсивно ведутся исследования по различным направлениям, связанным с рассмотрением многообразий, квазимногообразий и предмногообразий (по другой терминологии—реплично полных классов) универсальных алгебр. В этой области заметное место стало занимать изучение понятия достижимости, введенного Т. Тамурой [1] для многообразий и квазимногообразий, и рассматривавшегося А. И. Мальцевым [2], [3] для предмногообразий алгебраических систем, а также его естественного обобщения—понятия γ-ступенной достижимости, где γ—произвольный ординал, введенного в работе [4] (1-ступенная достижимость—это достижимость в смысле [1]—[3]), и некоторых близких к нему понятий, в частности, γ-ступенной разрешимости и конечной достижимости. Эти понятия изучались рядом авторов для различных классов универсальных алгебр. Для полугрупп возможна полезная модификация обсуждаемых понятий (см. [5], [6]) для случая, когда на полугруппах ограничиваются рассмотрением конгруэнций Риса [7], однозначно определяемых идеалами полугрупп; соответствующая достижимость и разрешимость называется идеальной. В связи с тем, что идеалы играют важную роль в теории полугрупп, представляет интерес изучение и этих понятий.

В данной статье все отмеченные выше понятия изучаются для полугрупп с сигнатурным нулем. И хотя вопрос об описании достижимых подмногообразий многообразий полугрупп с выделенным элементом поставлен еще Т. Тамурой [1] (при исследовании этого вопроса естественно обратиться сначала к случаям, когда выделенный элемент является нулем или единицей полугруппы), решающим обстоятельством в выборе указанного многообразия для наших исследований явилось следующее. В теории полугрупп с сигнатурным нулем зачастую весьма полезными оказываются аналоги многих понятий теории колец. В последней же понятие достижимости тесно связано с радикальностью и полупростотой в смысле Куроша—Амицура (см. [8], [9]). Поскольку аналоги этих понятий рассматриваются для полугрупп с нулем, интересно изучить их взаимосвязь и в этом случае. Некоторые результаты в этом направлении получены Л. Марки в [10]. Там же обращается внимание на вопрос описания достижимых многообразий полугрупп с нулем.

В данной работе решается более общий вопрос, нежели вопрос Марки, а именно, охарактеризованы конечно достижимые нетривиальные подмногообразия многообразия $\mathfrak{N}$ всех полугрупп с сигнатурным нулем—это те и только те многообразия полугрупп с нулем, в которых выполняется тождество $x^n = x$ для некоторого натурального числа $n > 1$; все они 1-ступенно достижимы в $\mathfrak{N}$ (теорема 1) (этот результат анонсирован в [11]). Кроме того, доказано, что γ-ступенно идеально достижимые в $\mathfrak{N}$ многообразия полугрупп с нулем для любого ординала $\gamma > 0$ исчерпываются замкнутыми относительно идеальных расширений 1-ступенно достижимыми в $\mathfrak{N}$ многообразиями полугрупп с нулем; последние 1-ступенно идеально достижимы в $\mathfrak{N}$ (теорема 2). В конце статьи установлено существование одновременно радикальных и полупростых классов полугрупп с нулем (в смысле [10]), удовлетворяющих тождеству $x^n = x$ и не являющихся многообразиями; тем самым получен утвердительный ответ на другой вопрос Л. Марки, который оставлен открытым в работе [10].

§ 1. Предварительные сведения

Предполагается, что читатель знаком с основными определениями работ [4] и [6]. Заметим только, что вместо используемого там термина „*реплично полный класс*“ мы употребляем ставший более распространенным термин „*предмногообразие*“ и, в соответствии с этим, вместо термина „*репличная конгруэнция*“—термин „*предвербальная конгруэнция*“.

Полугруппы с нулем будем рассматривать как алгебры с одной бинарной ассоциативной операцией—умножением и одной нульарной операцией—выделением нуля. Подалгебры таких алгебр называются *подполугруппами с нулем.*

Пусть W^0 — свободная полугруппа с нулем над счетным алфавитом $X=\{x, y, x_1, x_2, \ldots\}$; она получается из свободной полугруппы W над X присоединением нуля. Для слова $w \in W^0$ через $E(w)$ будем обозначать множество всех букв из X, входящих в запись w, через $l(w)$—длину слова w, т. е. общее число вхождений в w всех букв из X; в частности, $E(0)=\varnothing$ и $l(0)=0$. Для слов u и v из W^0 запись $u \equiv v$ означает, что u графически совпадает с v. Под тождеством, как обычно, понимается упорядоченная пара слов $u, v \in W^0$, записанная в виде равенства $u=v$. Если каждая буква тождества входит одинаковое число раз в запись его левой и правой части, то оно называется уравновешенным. Тождества вида $w=w$ называются тривиальными.

Для системы тождеств Σ через $[\Sigma]$ обозначается класс всех полугрупп с нулем, в которых истинны все тождества из Σ. Зафиксируем обозначения некоторых классов полугрупп с нулем: $\mathfrak{A}=[xy=yx]$, $\mathfrak{B}=[x^2=x]$, $\mathfrak{S}=[x=0]$, $\mathfrak{N}=[x=x]$, $\mathfrak{S}=[x^2=x,\ xy=yx]$, $\mathbf{Z}=[xy=0]$, $\mathfrak{M}$—предмногообразие, порожденное бесконечной моногенной полугруппой с нулем.

Подпредмногообразие $\mathfrak{X}$ некоторого многообразия $\mathfrak{K}$ полугрупп с нулем называется *ограниченным в* $\mathfrak{K}$, если многообразие $\operatorname{var}\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем, порожденное $\mathfrak{X}$, не совпадает с $\mathfrak{K}$. Предмногообразие $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем, содержащее единственное минимальное подпредмногообразие $\mathfrak{L}$, называется $\mathfrak{L}$-*предполным* [12].

Индексом предмногообразия $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем назовем ординал $\operatorname{ind}\mathfrak{X}$, равный натуральному числу k, если $[x_1x_2\ldots x_k=0] \subseteq \mathfrak{X}$ и $[x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}=0] \not\subseteq \mathfrak{X}$, и равный первому бесконечному ординалу ω, если натурального числа с таким свойством не существует.

Будем говорить, что класс $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем *замкнут относительно коммутативных связок*, если любая полугруппа S с нулем, допускающая разложение в коммутативную связку своих подполугрупп S_i $(i \in I)$, при котором $S_i^0 \in \mathfrak{X}$ для каждого $i \in I$, сама принадлежит $\mathfrak{X}$.

Полугруппы, являющиеся объединением групп, будем называть *клиффордовыми* (в [13] они называются *вполне регулярными*). В соответствии с этим, класс, состоящий из клиффордовых полугрупп, называется *клиффордовым.*

Пусть S—полугруппа с нулем. Положим $S^1=S$; для непредельного ординала $\alpha>1$ полагаем $S^\alpha=S^{\alpha-1}S$, а для предельного $\alpha>0$ считаем $S^\alpha=\bigcap\limits_{\beta<\alpha} S^\beta$. Если существует такой ординал γ, что $S^\gamma=0$, то полугруппу S назовем γ-*ступенно нильпотентной*, а если γ—наименьший ординал с указанным свойством, то S будем называть γ-*нильпотентной.*

Для подмножества M полугруппы S с нулем через (M) и $\langle M\rangle^0$ соответственно обозначаются идеал и подполугруппа с нулем, порожденные M в S.

Прежде чем перейти к формулировке лемм, напомним, что для предмногообразия $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем и полугруппы S с нулем через $\rho(\mathfrak{X}, S)$ и $K(\mathfrak{K}, S)$ обозначаются соответственно *предвербальная* $\mathfrak{X}$-*конгруэнция* [4] и *рисовский предвербальный* $\mathfrak{X}$-*идеал* [6]. Заметим, что в нашем случае единственным классом конгруэнции $\rho(\mathfrak{X}, S)$, являющимся подполугруппой с нулем, будет класс, содержащий нуль полугруппы S. Обозначим его через $R(\mathfrak{X}, S)$ и назовем *предвербальным* $\mathfrak{X}$-*идеалом.* Кроме того, для всякого ординала α единственный класс частичного отношения эквивалентности $\rho_\alpha(\mathfrak{X}, S)$ [4] обозначим через $R_\alpha(\mathfrak{X}, S)$. Понятно, что $R_\alpha(\mathfrak{X}, S)$—подполугруппа с нулем из S и $R_{\alpha+1}(\mathfrak{X}, S)$—идеал в $R_\alpha(\mathfrak{X}, S)$. Очевидны также следующие равенства: $R_0(\mathfrak{X}, S)=S$, $R_1(\mathfrak{X}, S)=R(\mathfrak{X}, S)$, $R_\alpha(\mathfrak{X}, S)=\bigcap\limits_{\beta<\alpha} R_\beta(\mathfrak{X}, S)$ для предельного $\alpha>0$ и $R_\alpha(\mathfrak{X}, S)=R(\mathfrak{X}, R_{\alpha-1}(\mathfrak{X}, S))$ для непредельного α. Отметим, что согласно определениям работы [6], аналогичные равенства имеют место для оператора K.

Для удобства ссылок отметим две известные леммы (см. [4] и [6]).

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$—предмногообразие полугрупп с нулем, S—произвольная полугруппа с нулем, A—ее подполугруппа с нулем. Тогда для любого ординала α $R_\alpha(\mathfrak{X}, A) \subseteq R_\alpha(\mathfrak{X}, S)$ и $K_\alpha(\mathfrak{X}, A) \subseteq K_\alpha(\mathfrak{X}, S)$.*

Лемма 2. *Если $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$—предмногообразия полугрупп с нулем и $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, то для любой полугруппы S с нулем и для всякого ординала α $R_\alpha(\mathfrak{K}, S) \subseteq R_\alpha(\mathfrak{L}, S)$ и $K_\alpha(\mathfrak{K}, S) \subseteq K_\alpha(\mathfrak{L}, S)$.*

Из леммы 2 непосредственно следует

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{K}$—предмногообразие полугрупп с нулем, S—(идеально) $\mathfrak{K}$-разрешимая ступени γ полугруппа с нулем, $\mathfrak{L}$—подпредмногообразие из $\mathfrak{K}$. Если полугруппа S является (идеально) $\mathfrak{L}$-разрешимой, то ступень ее (идеальной) $\mathfrak{L}$-разрешимости не меньше γ.*

Следующая лемма легко доказывается трансфинитной индукцией по ординалу α.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{X}$—предмногообразие полугрупп с нулем, $\iota = \operatorname{ind}\mathfrak{X}$; S—произвольная полугруппа с нулем. Тогда для любого ординала α $R_\alpha(\mathfrak{X}, S) \subseteq K_\alpha(\mathfrak{X}, S) \subseteq S^{\iota^\alpha}$.*

Лемма 5. *Если предмногообразие $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем содержит многообразие $\mathbf{Z}$, то всякая γ-ступенно нильпотентная полугруппа является γ-ступенно идеально $\mathfrak{X}$-разрешимой и, следовательно, γ-ступенно $\mathfrak{X}$-разрешимой (γ—произвольный ординал).*

Для доказательства достаточно заметить, что $\operatorname{ind}\mathfrak{X} \geqslant 2$, после чего воспользоваться леммами 2 и 4.

В дальнейшем нам понадобится знание минимальных и предполных предмногообразий полугрупп с нулем.

Лемма 6. *Классы $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$, $\mathbf{Z}$, и только они, являются минимальными предмногообразиями полугрупп с нулем. Любое нетривиальное предмногообразие полугрупп с нулем содержит какое-нибудь минимальное предмногообразие.*

Доказательство этой леммы является небольшой модификацией доказательства предложения 6 работы [4] и мы его опускаем.

Следствие. Минимальными подмногообразиями многообразия $\mathfrak{N}$ являются многообразия $\mathfrak{S}$, $\mathbf{Z}$, и только они.

Заметим, что это утверждение отмечалось в [10].

Мы опустим ввиду простоты доказательство следующей леммы (ср. с [12]).

Лемма 7. *Нетривиальное предмногообразие $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем является $\mathfrak{M}$-, $\mathfrak{S}$-, $\mathbf{Z}$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ состоит соответственно из полугрупп с нулем без кручения, клиффордовых полугрупп с нулем, нильполугрупп.*

§ 2. Конечно достижимые многообразия полугрупп с нулем

Теорема 1. *Нетривиальное многообразие $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем конечно достижимо в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$—клиффордово многообразие. При этом $\mathfrak{X}$ 1-ступенно достижимо в $\mathfrak{N}$.*

Справедливость этой теоремы будет вытекать из нижеследующих лемм.

Лемма 8. *Для всякого нетривиального клиффордова предмногообразия $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем и любой полугруппы S с нулем имеет место равенство $R(\mathfrak{X}, S) = R(\mathfrak{S}, S)$.*

Доказательство. Факторполугруппа $S/\rho(\mathfrak{X}, S)$ принадлежит $\mathfrak{X}$ и поэтому является полуструктурой вполне простых полугрупп (см., напр., [7]). Ясно, что нуль полугруппы $S/\rho(\mathfrak{X}, S)$ образует отдельный компонент этого разложения. Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме S на $S/\rho(\mathfrak{X}, S)$, получим полуструктурное разложение полугруппы S, причем одним из компонентов этого разложения будет идеал $R(\mathfrak{X}, S)$. Теперь понятно, что $R(\mathfrak{S}, S) \subseteq R(\mathfrak{X}, S)$. С другой стороны, очевидно, что $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно, $R(\mathfrak{X}, S) \subseteq R(\mathfrak{S}, S)$. Таким образом, $R(\mathfrak{X}, S) = R(\mathfrak{S}, S)$.

Учитывая, что компоненты наибольшего полуструктурного разложения любой полугруппы уже неразложимы в полуструктуру своих подполугрупп [14], из леммы 8 получаем следующее утверждение.

Лемма 9. *Любое клиффордово предмногообразие полугрупп с нулем является 1-ступенно достижимым в* $\mathfrak{N}$.

В случае полугрупп свободные полугруппы для многих типов предмногообразий не являлись конечно достижимыми (см. [4]). В нашем случае таких типов предмногообразий гораздо меньше, а именно, справедливо

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{X}$*—нетривиальное предмногообразие полугрупп с нулем,* $\boldsymbol{F}$*—свободная полугруппа с нулем. Тогда* F *либо 1-ступенно* $\mathfrak{X}$*-разрешима, либо является* $\mathfrak{X}$*-разрешимой ступени* ω*; второй случай имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{X}$*—нетривиальное предмногообразие нильполугрупп.*

Доказательство. Если $\mathfrak{X}$—нетривиальное предмногообразие нильполугрупп, то $\mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{X}$. Так как F есть ω-нильпотентная полугруппа, то по лемме 5 F является ω-ступенно $\mathfrak{X}$-разрешимой, т. е. $R_\omega(\mathfrak{X}, F) = 0$. С другой стороны, у F нет ненулевых нильподполугрупп, и поэтому $R_n(\mathfrak{X}, S) \neq 0$ при $n < \omega$. Таким образом, в этом случае F есть $\mathfrak{X}$-разрешимая ступени ω полугруппа.

Пусть $\mathfrak{X}$ не является предмногообразием нильполугрупп. Тогда в силу лемм 6 и 7 $\mathfrak{X}$ содержит один из классов $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$, то из очевидного равенства $R(\mathfrak{S}, F) = 0$ по лемме 2 получаем $R(\mathfrak{X}, \boldsymbol{F}) = 0$ и, следовательно, F в этом случае 1-ступенно $\mathfrak{X}$-разрешима. Если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, то в силу хорошо известного факта о совпадении классов свободных алгебр в предмногообразии алгебр и многообразии, им порожденном (см., напр., [3]), и равенства $\operatorname{var} \mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ имеем $\rho(\mathfrak{M}, F) = \rho(\mathfrak{A}, F)$. Из построения вербальной $\mathfrak{A}$-конгруэнции легко следует, что $R(\mathfrak{A}, F) = 0$. Но тогда $R(\mathfrak{M}, F) = 0$ и по лемме 2 $R(\mathfrak{X}, F) = 0$. Таким образом, в этом случае F 1-ступенно $\mathfrak{X}$-разрешима. Предложение 1 доказано.

Лемма 10. *Пусть* $u = v$*—такое тождество, что* $\mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{L} = [u = v]$ *и* $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{N}$. *Тогда существует* ω*-нильпотентная полугруппа, являющаяся* $\mathfrak{L}$*-разрешимой ступени* ω.

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

1. $u(x_1, \ldots, x_m) = v(x_1, \ldots, x_m)$*—уравновешенное тождество.*

Возьмем свободную полугруппу F с нулем над алфавитом $X = \{x_{ij} \mid i = 0, 1, 2, \ldots; j = 1, \ldots, m\}$ и в ней построим последовательность значений данного тождества:

$$u_{i+1} \equiv u(x_{i1}u_1u_2 \ldots u_i, \ldots, x_{im}u_1u_2 \ldots u_i), \quad v_{i+1} \equiv v(x_{i1}u_1u_2 \ldots u_i, \ldots, x_{im}u_1u_2 \ldots u_i). \quad (1)$$

Докажем, что в качестве искомой полугруппы в этом случае можно взять полугруппу S с нулем, заданную множеством X образующих и множеством $\{v_k = 0 \mid k = 1, 2, \ldots\}$ определяющих соотношений.

Покажем сначала, что слово u_{i+1}—ненулевой элемент полугруппы S. Для этого достаточно установить, что никакое слово v_k не является подсловом ни одного из слов u_{i+1}, т. е.

$$u_{i+1} \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (v_k) \text{ при } i = 0, 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Докажем это соотношение индукцией по i. При $i = 0$ имеем $u_1 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (v_k)$, т. к. в силу определения (1) $u_1 \equiv u(x_{01}, \ldots, x_{0m}) \not\equiv v(x_{01}, \ldots, x_{0m}) \equiv v_1$, $l(u_1) = l(v_1)$ и $l(u_1) < l(v_k)$ при $k > 1$. Пусть $i > 0$ и уже доказано, что $u_q \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (v_k)$ при $q \leqslant i$.

Предположим, что $u_{i+1} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (v_k)$. Тогда существует такой номер $k_0 > 0$, что $u_{i+1} \in (v_{k_0})$. Ввиду очевидного неравенства $l(u_{i+1}) < l(v_k)$ при $k > i + 1$ получим $k_0 \leqslant i + 1$. Поскольку $l(u_{i+1}) = l(v_{i+1})$ и $u_{i+1} \not\equiv v_{i+1}$ по определению (1),

ясно, что $u_{i+1} \notin (v_{i+1})$, и поэтому $k_0 \leqslant i$. Теперь из того, что v_{k_0} есть подслово слова u_{i+1}, $k_0 \leqslant i$, $x_{ij} \in E(u_{i+1})$ и $x_{ij} \notin E(v_{k_0})$ в силу (1) с необходимостью следует, что v_{k_0}—подслово слова $u_1 u_2 \ldots u_i$. Учитывая предположение индукции (v_{k_0} не является подсловом ни одного из слов $u_1, u_2, \ldots, u_i$), очевидные взаимоотношения длин слов $v_{k_0}, u_1, u_2, \ldots, u_i$, а также то, что v_{k_0} не может быть подсловом слова $u_1 u_2 \ldots u_{k_0}$ (начальная буква слова v_{k_0} не входит в запись слова $u_1 u_2 \ldots u_{k_0-1}$), заключаем, что v_{k_0} должно быть подсловом слова $u_s u_{s+1}$, где $k_0 \leqslant s < i$, причем начало слова v_{k_0} расположено в u_s, а конец—в u_{s+1}. Последнее же означает, что начальная буква x_{sj_0} слова u_{s+1} входит в запись слова v_{k_0}. С другой стороны, из определения (1) следует, что $x_{sj} \notin E(v_k)$ при любом $k \leqslant s$ и любом $j = 1, \ldots, m$, в частности, $x_{sj_0} \notin E(v_{k_0})$. Полученное противоречие доказывает соотношение (2). Таким образом, u_{i+1}—ненулевой элемент полугруппы S.

Заметим теперь, что S изоморфна факторполугруппе Риса F/V, где $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} (v_k)$. В частности, отсюда следует, что ненулевые элементы полугруппы S однозначно представимы в виде произведения элементов из X. Основываясь на последнем и учитывая (2), теперь легко сделать вывод о том, что S является ω-нильпотентной полугруппой. Ввиду очевидного включения $\mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{L}$ и леммы 5 S есть ω-ступенно $\mathfrak{L}$-разрешимая полугруппа, т. е. $R_\omega(\mathfrak{X}, S) = 0$. Остается доказать, что $R_n(\mathfrak{L}, S) \neq 0$ при $n < \omega$. Покажем, что $u_{i+1} \in R_{i+1}(\mathfrak{L}, S)$ при $i < \omega$. При $i = 0$ упорядоченная пара $(u_1, 0)$ элементов из S является значением тождества $u(x_1, \ldots, x_m) = v(x_1, \ldots, x_m)$ при $x_j = x_{0j}$, а поэтому $(u_1, 0) \in \rho(\mathfrak{L}, S)$ и $u_1 \in R_1(\mathfrak{L}, S)$. Пусть $i > 0$ и $u_i \in R_i(\mathfrak{L}, S)$. Поскольку всякий последующий член вербальной $\mathfrak{L}$-цепи полугруппы S является идеалом в предыдущем, элементы $x_{ij} u_1 u_2 \ldots u_i$ $(j = 1, \ldots, m)$ принадлежат $R_i(\mathfrak{L}, S)$. Но тогда в силу определения (1) и определяющих соотношений полугруппы S имеем $(u_{i+1}, 0) \in \rho(\mathfrak{L}, R_i(\mathfrak{L}, S))$ и, следовательно, $u_{i+1} \in R(\mathfrak{L}, R_i(\mathfrak{L}, S)) = R_{i+1}(\mathfrak{L}, S)$. Таким образом, $u_{i+1} \in R_{i+1}(\mathfrak{L}, S)$ при $i < \omega$. Ввиду доказанного в предыдущем абзаце, $R_n(\mathfrak{L}, S) \neq 0$ при $n < \omega$.

Итак, в рассмотренном случае S есть ω-нильпотентная $\mathfrak{L}$-разрешимая ступени ω полугруппа.

2. *$u = v$—неуравновешенное тождество.*

В этом случае многообразие $\mathfrak{L}$ состоит из периодических полугрупп с нулем и, следовательно, в $\mathfrak{L}$ истинно тождество $x^{r+m} = x^r$, причем из условия $\mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{L}$ следует, что $r \geqslant 2$. Рассмотрим полугруппу S, являющуюся 0-прямым объединением [7] всевозможных моногенных нильполугрупп. Ясно, что S есть ω-нильпотентная полугруппа. По лемме 5 S является ω-ступенно $\mathfrak{L}$-разрешимой полугруппой с нулем, причем понятно, что ступень ее $\mathfrak{L}$-разрешимости равна ω. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Любое ограниченное предмногообразие $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем, содержащее многообразие $\mathbf{Z}$, не является конечно достижимым в $\mathfrak{N}$.*

В самом деле, из ограниченности $\mathfrak{X}$ следует выполнимость в $\mathfrak{X}$ некоторого нетривиального тождества $u = v$, в частности, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{L} = [u = v]$ и, следовательно, $\mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{L}$. По лемме 10 существует ω-нильпотентная $\mathfrak{L}$-разрешимая ступени ω полугруппа S. В силу лемм 3 и 5 S является $\mathfrak{X}$-разрешимой ступени ω полугруппой, а значит, $\mathfrak{X}$ не является конечно достижимым в $\mathfrak{N}$.

Справедливость теоремы 1 вытекает непосредственно из лемм 9 и 11, если иметь в виду следствие из леммы 6 и лемму 7.

Учитывая, что в силу леммы 7 неклиффордово предмногообразие периодических полугрупп с нулем содержит многообразие $\mathbf{Z}$, из лемм 9 и 11 получим

Предложение 2. *Нетривиальное предмногообразие $\mathfrak{X}$ периодических полугрупп с нулем либо 1-ступенно достижимо в $\mathfrak{N}$ и при этом $\mathfrak{X}$ клиффордово, либо не является конечно достижимым в $\mathfrak{N}$.*

Для предмногообразий нильполугрупп имеет место следующее

Предложение 3. *Нетривиальное предмногообразие $\mathfrak{X}$ нильполугрупп не является γ-ступенно достижимым в $\mathfrak{N}$ ни для какого ординала γ.*

Доказательство. В силу предложения 1 любая свободная полугруппа F^0 с нулем является $\mathfrak{X}$-разрешимой ступени ω. Пусть $\alpha > 0$—произвольный ординал и $\delta = \alpha\omega$. Каждому $\beta < \alpha$ поставим в соответствие полугруппу S_β, изоморфную F, а ординалу α—одноэлементную полугруппу S_α, и будем считать эти полугруппы попарно непересекающимися. Так же, как и при рассмотрении случая III при доказательстве теоремы 2 работы [15], убеждаемся в том, что ординальная сумма (последовательно аннулирующая связка по терминологии [13]) этих полугрупп есть $\mathfrak{X}$-разрешимая ступени δ полугруппа с нулем. Ввиду произвольности выбора ординала α отсюда легко следует, что $\mathfrak{X}$ не является γ-ступенно достижимым в $\mathfrak{N}$ ни при каком γ.

В заключение этого параграфа сделаем

Замечание 1. Аналоги лемм 6—11, а следовательно, теоремы 1 и предложений 1—3, имеют место для коммутативных полугрупп с нулем. Это хорошо видно из доказательств указанных утверждений.

§ 3. γ-ступенно идеально достижимые многообразия полугрупп с нулем

Теорема 2. *Нетривиальное многообразие $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем либо 1-ступенно идеально достижимо в $\mathfrak{N}$, либо не является γ-ступенно идеально достижимым в $\mathfrak{N}$ ни для какого ординала γ. Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:* а) *$\mathfrak{X}$ клиффордово и замкнуто относительно коммутативных связок;* б) *$\mathfrak{X}$ замкнуто относительно идеальных расширений.*

Доказательство этой теоремы основано на идеях работы [6] (см. доказательство теоремы 2). Эквивалентность условий а) и б) можно получить, несколько модифицировав доказательство равносильности аналогичных условий теоремы 2 из [6] (см. доказательство леммы 3). Равносильность свойства 1-ступенно идеальной достижимости многообразия $\mathfrak{X}$ полугрупп с нулем и свойства б) также легко получить, основываясь на рассмотрениях статьи [6] (см. также [10], теорему 4). Окончание доказательства теоремы 2 будет вытекать непосредственно из нижеследующих лемм.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{K}$—замкнутое относительно ординальных сумм предмногообразие полугрупп с нулем, $\mathfrak{X}$—его подпредмногообразие. Если существует идеально $\mathfrak{X}$-разрешимая ступени ω полугруппа A^0 с внешне присоединенным нулем, то $\mathfrak{X}$ не является γ-ступенно идеально достижимым в $\mathfrak{K}$ ни для какого ординала γ.*

Доказательство этой леммы проводится так же, как и доказательство предложения 3, только вместо полугруппы F^0 нужно взять полугруппу A^0 (см. также доказательство теоремы 2 из [6]).

Лемма 13. *Пусть F—свободная полугруппа с нулем, $F = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots$—идеальная цепь полугруппы F. Тогда любой ненулевой член этой цепи с натуральным номером n содержит подполугруппу, изоморфную F.*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 0$ эта лемма верна. Пусть $n > 0$, X_i $(i < n)$—свободное порождающее множество подполугруппы S_i из F_i, изоморфной F, f_n—ненулевой элемент из F_n. Положим $X_n = f_n X_{n-1}$. Ясно, что $X_n \subset F_n$ и $|X_n| = |X_{n-1}|$. Поскольку по построению все слова из X_n имеют одинаковую длину, очевидна однозначная представимость элементов полугруппы $\langle X_n \rangle$ в виде произведения элементов из X_n. Сказанное означает, что подполугруппа $S_n = \langle X_n \rangle^0$ с нулем полугруппы F_n свободно порождается множеством X_n и, следовательно, изоморфна F.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{X}$—предмногообразие полугрупп с нулем, содержащее $\mathbf{Z}$. Тогда любая свободная полугруппа F с нулем, не принадлежащая $\mathfrak{X}$, является идеально $\mathfrak{X}$-разрешимой ступени ω.*

В самом деле, будучи ω-нильпотентной, по лемме 5 F является ω-ступенно идеально $\mathfrak{X}$-разрешимой. С другой стороны, если $K_n(\mathfrak{X}, F) \neq 0$ для некоторого

$n < \omega$, то согласно лемме 13 в $K_n(\mathfrak{X}, F)$ есть подполугруппа, изоморфная F, и поэтому $K_{n+1}(\mathfrak{X}, F) \neq 0$. Таким образом, F—идеально $\mathfrak{X}$-разрешимая ступени ω полугруппа с нулем.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{K}$—предмногообразие полугрупп с нулем, замкнутое относительно ординальных сумм, $\mathfrak{X}$—его подпредмногообразие, содержащее $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{X}$ не замкнуто относительно идеальных расширений в $\mathfrak{K}$, то в $\mathfrak{K}$ существует идеально $\mathfrak{X}$-разрешимая ступени ω полугруппа S с внешне присоединенным нулем.*

Доказательство. Пусть A—идеально $\mathfrak{X}$-разрешимая ступени 2 полугруппа из $\mathfrak{K}$. Каждому $n < \omega$ поставим в соответствие полугруппу S_n, изоморфную A, а ординалу ω—одноэлементную полугруппу $S_\omega = 0$, и считаем эти полугруппы попарно непересекающимися. Пусть $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_n + \ldots + 0$ обозначает ординальную сумму полугрупп S_n $(n \leqslant \omega)$. Ясно, что S—полугруппа с внешне присоединенным нулем и $S \in \mathfrak{K}$. Рассмотрим ряд идеалов полугруппы S: $S = T_0 \supset T_1 \supset \ldots \supset T_n \supset \ldots \supset T_\omega = 0$, где $T_{3k} = S_k + S_{k+1} + \ldots + 0$, $T_{3k+1} = K(\mathfrak{X}, S) + S_{k+1} + \ldots + 0$, $T_{3k+2} = 0_k + S_{k+1} + \ldots + 0$ и 0_k—нуль полугруппы S_k $(k = 0, 1, \ldots)$. Очевидно, что $T_n/T_{n+1} \in \mathfrak{X}$ при $n < \omega$ (условие $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$ используется только при доказательстве соотношения $T_{3k+2}/T_{3(k+1)} \in \mathfrak{X}$) и $\bigcap\limits_{n<\omega} T_n = T_\omega = 0$. Понятно также, что $K_n(\mathfrak{X}, S) \subseteq T_n$ при $n \leqslant \omega$ и поэтому $K_\omega(\mathfrak{X}, S) = 0$. Покажем, что $S_n + S_{n+1} + \ldots + 0 \subseteq K_n(\mathfrak{X}, S)$ для $n < \omega$. При $n = 0$ это включение справедливо. Пусть $n > 0$ и $S_{n-1} + S_n + \ldots + 0 \subseteq K_{n-1}(\mathfrak{X}, S)$. В силу леммы 1 $K(\mathfrak{X}, S_{n-1} \cup 0) = K(\mathfrak{X}, S_{n-1}) \cup 0 \subseteq K(\mathfrak{X}, K_{n-1}(\mathfrak{X}, S)) = K_n(\mathfrak{X}, S)$. Поскольку $K_n(\mathfrak{X}, S)$—идеал в $K_{n-1}(\mathfrak{X}, S)$, $K(\mathfrak{X}, S_{n-1}) \neq \varnothing$ и согласно определению S любой элемент из $K(\mathfrak{X}, S_{n-1})$ является единицей для любого элемента из $S_n + S_{n+1} + \ldots + 0$, то $S_n + S_{n+1} + \ldots + 0 \subseteq K_n(\mathfrak{X}, S)$. Таким образом, $K_n(\mathfrak{X}, S) \neq 0$ при $n < \omega$, что заканчивает доказательство леммы 15.

Леммы 14, 15 и 12 завершают доказательство теоремы 2.

В случае коммутативных полугрупп с нулем имеет место утверждение, аналогичное предложению 1 из [6].

Предложение 4. *Нетривиальное подмногообразие $\mathfrak{X}$ многообразия $\mathfrak{A}$ либо 1-ступенно идеально достижимо в $\mathfrak{A}$ (равносильно, является клиффордовым), либо не является γ-ступенно идеально достижимым в $\mathfrak{A}$ ни для какого ординала γ.*

Доказательство этого предложения будет опираться на следующую лемму, которая окажется нам полезной и при решении другого вопроса.

Лемма 16. *Всякое предмногообразие $\mathfrak{X}$ клиффордовых инверсных полугрупп с нулем замкнуто относительно идеальных расширений в $\mathfrak{N}$ и факторов Риса.*

Действительно, пусть в полугруппе S с нулем существует идеал T такой, что $T \in \mathfrak{X}$ и $S/T \in \mathfrak{X}$. Тогда S—клиффордова инверсная полугруппа, и поэтому является полуструктурой групп G_i $(i \in I)$. Поскольку $G_i^0 \cap T$ равно 0 или G_i^0, то $G_i^0 \in \mathfrak{X}$ и, следовательно, полугруппа S, будучи поддекартовым произведением полугрупп G_i^0 [16], принадлежит $\mathfrak{X}$. Таким образом, $\mathfrak{X}$ замкнуто относительно идеальных расширений в $\mathfrak{N}$. Далее считаем, что S—произвольная полугруппа из $\mathfrak{X}$ и T—любой ее идеал. Тогда факторполугруппа S/T является полуструктурой некоторого множества групп G_j $(j \in J \subseteq I)$ таких, что $G_j^0 \in \mathfrak{X}$, а значит, поддекартовым произведением полугрупп $G_j^0 \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $S/T \in \mathfrak{X}$.

Справедливость предложения 4 вытекает теперь непосредственно из лемм 16, 14, 12 и теоремы 2.

Предложение 5. *Подмногообразие $\mathfrak{X}$ многообразия $\mathfrak{B}$ либо 1-ступенно идеально достижимо в $\mathfrak{B}$, либо не является γ-ступенно идеально достижимым ни для какого порядкового числа γ. Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с одним из многообразий $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Э}$, $\mathfrak{S}$, $[x^2 = x, xyx = xy]$, $[x^2 = x, xyx = yx]$.*

В самом деле, тот факт, что указанными в конце предложения 5 многообразиями исчерпываются замкнутые относительно идеальных расширений в $\mathfrak{N}$ многообразия связок с нулем, известен [10] (он легко получается из предложения 2 работы [6]). Теперь остается только сослаться на леммы 15, 12 и теорему 2.

В заключение докажем

Предложение 6. *Существует предмногообразие $\mathfrak{X}$ клиффордовых полугрупп с нулем, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно идеальных расширений в $\mathfrak{N}$;*

2) *класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно факторов Риса;*

3) *в произвольной полугруппе с нулем объединение всех ее идеалов, принадлежащих классу $\mathfrak{X}$, содержится в $\mathfrak{X}$;*

4) *класс $\mathfrak{X}$ не замкнут относительно гомоморфных образов.*

Доказательство. Пусть G—конечная группа, обладающая фактором H, неразложимым в поддекартово произведение подгрупп группы G (такая группа существует, напр., специальная линейная группа SL_2 (5)—факторгруппа этой группы по ее центру изоморфна знакопеременной группе A_5, которая проста и не является подгруппой группы SL_2 (5)). Рассмотрим предмногообразие $\mathfrak{X}$, порожденное полугруппой G^0. Ясно, что класс $\mathfrak{X}$ состоит из клиффордовых инверсных полугрупп с нулем и поэтому по лемме 16 замкнут относительно факторов Риса и идеальных расширений в $\mathfrak{N}$, т. е. условия 1) и 2) выполнены. Пусть S—произвольная полугруппа с нулем, T—объединение всех идеалов T_i ($i \in I$) полугруппы S, принадлежащих классу $\mathfrak{X}$. Будучи клиффордовой, полугруппа T в силу теоремы 4.6 из [7] является коммутативной связкой своих вполне простых подполугрупп P_j ($j \in J$). Ясно, что полугруппа P_j для всякого $j \in J$ включается в T_i для некоторого $i \in I$ и поэтому $P_j^0 \in \mathfrak{X}$. Так как идемпотенты полугрупп из $\mathfrak{X}$ коммутируют, то P_j—группа для всякого $j \in J$. Но тогда T есть поддекартово произведение полугрупп P_j^0 из $\mathfrak{X}$ и, следовательно, $T \in \mathfrak{X}$. Таким образом, $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию 3). Наконец, понятно, что полугруппа H^0, являющаяся гомоморфным образом полугруппы G^0 из $\mathfrak{X}$, не принадлежит $\mathfrak{X}$ и, таким образом, условие 4) также выполнено.

Замечание 2. Предложение 6 дает утвердительный ответ на вопрос работы [10] о существовании радикально-полупростых классов полугрупп с нулем, удовлетворяющих тождеству $x^n = x$ и не являющихся многообразиями.

Замечание 3. Для полугрупп с сигнатурным нулем имеет место аналог теоремы 1 из [6] и аналоги свойств a), c), d), e) идеальной разрешимости (см. там же), что вытекает непосредственно из рассмотрений работы [6].

Автор глубоко благодарен Л. Марки, приславшему препринт своей работы [10] и обратившему внимание на решаемые здесь вопросы, и Л. Н. Шеврину за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tamura T. Attainability of systems of identities on semigroups.—J. Algebra, 1966, v. 3, № 3, p. 261—276.

2. Мальцев А. И. Об умножении классов алгебраических систем.—Сиб. матем. журн., 1967, т. VIII, № 2, с. 346—365.

3. Мальцев А. И. Алгебраические системы.—М., 1970.—392 с.

4. Шеврин Л. Н., Мартынов Л. М. О достижимых классах алгебр.—Сиб. матем. журн., 1971, т. XII, № 6, с. 1363—1381.

5. Мартынов Л. М. Об идеально J-разрешимых полугруппах.—Матем. заметки, 1970, т. 8, № 6, с. 681—691.

6. Мартынов Л. М. Об идеальной разрешимости и достижимости в полугруппах.—Матем. зап. Уральск. ун-та., 1974, т. 9, № 1, с. 40—55.

7. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т. 1.—М., 1972.—288 с.

8. Gardner B. J., Stewart P. N. On semi-simple radical classes.—Bull. Austral. Math. Soc., 1975, v. 13, p. 349—353.

9. Gardner B. J. Semi-simple radical classes of algebras and attaiability of identities.—Pacif. J. Math., 1975, v. 61, № 2, p. 401—416.
10. Màrki L. Radical semisimple classes and varieties of semigroups with zero.—Algebraic theory of semigroups, Amsterdam, 1979, p. 357—359.
11. Мартынов Л. М. Конечно достижимые многообразия полугрупп с сигнатурным нулем.—II Всесоюзн. симпозиум по теории полугрупп. Тезисы сообщ. Свердловск, 1978, с. 56.
12. Subramanian H., Sundararaman T. R. Precomplete varieties of semigroups.—Semigroup Forum, 1974, v. 8, № 3, p. 278—281.
13. Ляпин Е. С. Полугруппы.—М., 1960.—592 с.
14. Tamura T. The theory of construction of finite semigroups, I.—Osaka Math. J., 1956, v. 8, № 2, p. 243—262.
15. Мартынов Л. М. О достижимых классах групп и полугрупп.—Матем. сб., 1973, т. 90 (132) : 2, с. 235—245.
16. Petrich M. Introduction to semigroups.—Columbus, Ohio, Merrill, 1973. „Publishers Weekly“ 1973, v. 203, № 21, p. 72.

г. Омск

Поступила
10 IV 1979