ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 1, с. 41–46

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977+517.926

ГЛОБАЛЬНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ К СИСТЕМАМ СКАЛЯРНОГО ТИПА

© 2004 г. С. Н. Попова

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с ограниченными и кусочно-непрерывными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Предположим, что управление $u(\cdot)$ в системе (1) задано по принципу линейной обратной связи $u = Ux$, где $m \times n$-матрица $U(\cdot)$ также предполагается ограниченной и кусочно-непрерывной. Тогда (1) переходит в замкнутую систему с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для которой определены характеристические показатели и другие инварианты преобразований Ляпунова однородных систем [1, с. 42; 2, с. 245]. Возникает вопрос о возможности построения управления $U(\cdot)$ такого, что какой-либо ляпуновский инвариант системы (2) с выбранным $U(\cdot)$ окажется совпадающим с любым допустимым наперед заданным значением этого инварианта. Описанное свойство системы (2) называется глобальной управляемостью этого ляпуновского инварианта.

В настоящей работе установлена глобальная скаляризуемость равномерно вполне управляемой [3] системы (1), под которой понимается существование для произвольной наперед заданной кусочно-непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ скалярной функции $p(\cdot)$ такого управления $U(\cdot)$, что система (2) с этим управлением асимптотически эквивалентна [4] системе

$$\dot{z} = p(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

т.е. найдется преобразование Ляпунова $z = L(t)x$, связывающее системы (2) и (3). На основе этого результата установлена глобальная управляемость ряда ляпуновских инвариантов системы (2), в том числе полного спектра показателей Ляпунова, коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, приводимости, устойчивости показателей, а также одновременная глобальная управляемость центральных показателей $\underline{\omega}$ и Ω.

Введем необходимые обозначения и соглашения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n со стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через M_{mn} будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ (при $m = n$ пишем M_n) со спектральной нормой, т.е. операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $E \in \mathrm{M}_n$ – единичная матрица.

Пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : I \to \mathrm{M}_{mn}$, определенных на произвольном промежутке $I \subset \mathbb{R}$, с равномерной нормой $\|U\|_{C(I)} := \sup\{\|U(t)\| : t \in I\}$ будем обозначать $KC_{mn}(I)$; $KC_n(I) := KC_{nn}(I)$.

Будем говорить, что матричная функция $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{nm}$ кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, если $B \in KC_{nm}(\mathbb{R})$; существует такое $\Delta_0 > 0$, что длина каждого интервала непрерывности I_α, $\alpha \in \mathbb{A} \subset \mathbb{N}$, функция $B(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $|I_\alpha| \geq \Delta_0$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $\alpha \in \mathbb{A}$ и для всех $t, s \in I_\alpha$, удовлетворяющих неравенству $|t - s| \leq \delta$, выполнено соотношение $\|B(t) - B(s)\| \leq \varepsilon$.

Матрицу Коши однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4}$$

будем обозначать $X(t,s)$. Для произвольной кусочно-непрерывной ограниченной функции $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положим $\overline{p}=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_0^t p(s)\,ds$ и $\underline{p}=\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int_0^t p(s)\,ds$ – соответственно верхнее и нижнее средние значения функции $p(\cdot)$. В оценках будем использовать величины $a:=\|A\|_{C(\mathbb{R})}$, $b:=\|B\|_{C(\mathbb{R})}$.

Теорема 1. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ существует управление $U(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (2) при $U=U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе (3).*

Доказательство. Пусть система (1) σ-равномерно вполне управляема. Согласно теореме 2 [5], существуют такие невырожденные матрицы F_k, $k\in\mathbb{Z}$, что для любой верхней треугольной матрицы $H\in\mathrm{M}_n$ с положительными диагональными элементами найдется управление $U(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (2) равенства $X_U(k\sigma,(k-1)\sigma)=X(k\sigma,(k-1)\sigma)F_kHF_k^{-1}$, $k\in\mathbb{Z}$, причем $\|F_k\|\le f$, $\|F_k^{-1}\|\le f$ при некотором $f>0$.

По теореме о QR-разложении [6, с. 139] при всяком $k\in\mathbb{Z}$ для обратимой матрицы $F_{k+1}^{-1}X(k\sigma,(k-1)\sigma)F_k$ существуют ортогональная матрица Q_k и верхняя треугольная матрица R_k с положительной диагональю такие, что $F_{k+1}^{-1}X(k\sigma,(k-1)\sigma)F_k=Q_kR_k$. Тогда $X(k\sigma,(k-1)\sigma)F_kR_k^{-1}F_k^{-1}=F_{k+1}Q_kF_k^{-1}$. Возьмем любую ограниченную кусочно-непрерывную функцию $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и для произвольных $s,t\in\mathbb{R}$ обозначим $\varphi(t,s)=\exp\int_s^t p(\tau)\,d\tau$. Тогда $\varphi(s,t)=\varphi^{-1}(t,s)$ и $\varphi(t,s)=\varphi(t,\tau)\varphi(\tau,s)$ для всех $t,s,\tau\in\mathbb{R}$. Матрица $H_k:=$ $:=R_k^{-1}\varphi(k\sigma,(k-1)\sigma)$ верхняя треугольная с положительными диагональными элементами, поэтому существует управление $U(\cdot)\in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что

$$X_U(k\sigma,(k-1)\sigma)=X(k\sigma,(k-1)\sigma)F_kH_kF_k^{-1}=X(k\sigma,(k-1)\sigma)F_kR_k^{-1}F_k^{-1}\varphi(k\sigma,(k-1)\sigma)=$$

$$=F_{k+1}Q_kF_k^{-1}\varphi(k\sigma,(k-1)\sigma),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Перемножая эти матрицы, при каждом $k\in\mathbb{Z}$ получим

$$X_U(k\sigma,0)=X_U(k\sigma,(k-1)\sigma)X_U((k-1)\sigma,(k-2)\sigma)\cdots X_U(\sigma,0)=$$

$$=F_{k+1}Q_kF_k^{-1}\varphi(k\sigma,(k-1)\sigma)F_kQ_{k-1}F_{k-1}^{-1}\varphi((k-1)\sigma,(k-2)\sigma)\cdots F_2Q_1F_1^{-1}\varphi(\sigma,0)=$$

$$=F_{k+1}Q_kQ_{k-1}\cdots Q_1F_1^{-1}\varphi(k\sigma,0)=:F_{k+1}\widetilde{Q}_kF_1^{-1}\varphi(k\sigma,0),$$

где матрица $\widetilde{Q}_k$ ортогональна как произведение ортогональных матриц.

Докажем, что $L(t):=X_U(t,0)\varphi(0,t)$ – матрица Ляпунова. Действительно, при каждом $k\in\mathbb{Z}$ и всех $t\in[(k-1)\sigma,k\sigma]$ справедливы оценки

$$\|L(t)\|=\|X_U(t,k\sigma)X_U(k\sigma,0)\varphi(0,t)\|\le\|X_U(t,k\sigma)\|\,\|X_U(k\sigma,0)\|\varphi(0,t)\le$$

$$\le\exp((a+b\|U\|_C)\sigma)\|F_{k+1}\|\,\|\widetilde{Q}_k\|\,\|F_1^{-1}\|\varphi(k\sigma,0)\varphi(0,t)\le$$

$$\le\exp((a+b\|U\|_C)\sigma)f^2\varphi(k\sigma,t)\le f^2\exp((a+b\|U\|_C+\|p\|_C)\sigma)=:l,$$

$$\|L^{-1}(t)\|=\|X_U(0,k\sigma)X_U(k\sigma,t)\varphi(t,0)\|\le$$

$$\le\|F_{k+1}^{-1}\|\,\|\widetilde{Q}_k^{-1}\|\,\|F_1\|\varphi(0,k\sigma)\exp((a+b\|U\|_C)\sigma)\varphi(t,0)\le f^2\exp((a+b\|U\|_C)\sigma)\varphi(t,k\sigma)\le l,$$

следовательно, $\|L\|_C\le l<\infty$, $\|L^{-1}\|_C\le l<\infty$. Кроме того,

$$\dot{L}(t)=\dot{X}_U(t,0)\varphi(0,t)+X_U(t,0)\dot{\varphi}(0,t)=(A(t)+B(t)U(t)-p(t)E)L(t),$$

поэтому $\|\dot{L}\|_C\le(a+b\|U\|_C+\|p\|_C)\|L\|_C<\infty$.

Применим ляпуновское преобразование $x = L(t)z$ к системе (2) с $U = U(\cdot)$. Тогда

$$\dot{z} = (L^{-1}(t)x)^{\cdot} = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)x + L^{-1}(t)\dot{x} =$$

$$= -L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U(t) - p(t)E)x + L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U(t))x = L^{-1}(t)p(t)x = p(t)z.$$

Таким образом, системы (3) и (2) при $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентны.

Следствие 1. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то система (2) обладает свойством глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана.*

Замечание 1. Определения коэффициентов неправильности приведены в [7, с. 77, 81].

Доказательство. Для произвольного числа $\gamma \geq 0$ рассмотрим систему (3) с непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функцией $p(t) = \gamma(\sin\ln(|t|+1) + \cos\ln(|t|+1) + 1)/2$. Поскольку $\overline{p} = \gamma$, $\underline{p} = 0$ [2, с. 77–78], полный спектр показателей Ляпунова системы (3) состоит из чисел $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \overline{p} = \gamma$, а полный спектр сопряженной системы $\dot{\xi} = -p(t)\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, – из чисел $\mu_1 = \ldots = \mu_n = \overline{(-p)} = -\underline{p} = 0$. Следовательно, коэффициент неправильности Ляпунова системы (3) равен $\sigma_{\text{Л}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \varliminf\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t \operatorname{Sp}(p(s)E)\,ds = n\gamma - n\underline{p} = n\gamma$, а коэффициент неправильности Перрона $\sigma_{\text{П}} = \max\{\lambda_i + \mu_i : i = 1,\ldots,n\} = \gamma$. Матрица $Z(t) = E\exp\int_0^t p(s)\,ds$ является нормальной фундаментальной матрицей системы (3), показатель Ляпунова i-й строки матрицы $Z^{-1}(t) = E\exp\bigl(-\int_0^t p(s)\,ds\bigr)$ совпадает с $\delta_i = \varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t(-p(s)\,ds) = \overline{(-p)} = 0$. Отсюда вытекает, что коэффициент неправильности Гробмана равен $\sigma_{\text{Г}} = \max\{\lambda_i + \delta_i : i = 1,\ldots,n\} = \gamma$.

Пользуясь теоремой 1, построим управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность систем (2) и (3) с выбранной функцией $p(\cdot)$. Тогда $\sigma_{\text{Л}}(A+BU) = n\gamma$, $\sigma_{\text{П}}(A+BU) = \gamma$, $\sigma_{\text{Г}}(A+BU) = \gamma$. В силу произвольности $\gamma \geq 0$ имеем требуемое. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то система (2) обладает свойством глобальной управляемости правильности.*

Доказательство вытекает из следствия 1 с учетом того, что правильность системы равносильна равенству нулю коэффициента неправильности Ляпунова.

Следствие 3. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то система (2) обладает свойством глобальной управляемости приводимости.*

Доказательство. Существование управления $U(\cdot)$, при котором система (2) приводима, следует непосредственно из теоремы 1 при $p(t) \equiv 0$. Из следствия 2 вытекает существование $U(\cdot)$ такого, что при $U = U(\cdot)$ система (2) неправильна, и по этой причине неприводима.

Замечание 2. Задачи управления правильностью и приводимостью систем вида (2) в случае гладких коэффициентов и скалярного управления $(m = 1)$ рассматривались в [8, с. 33; 9, с. 310–311].

Следствие 4. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то центральные показатели $\underline{\omega}$ и Ω системы (2) одновременно глобально управляемы, т.е. для любых чисел $\alpha \leq \beta$ найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что $\underline{\omega}(A+BU) = \alpha$, $\Omega(A+BU) = \beta$.*

Доказательство. Возьмем любые числа $\alpha \leq \beta$ и положим $p(t) = \alpha + (\beta-\alpha)(\sin\ln(|t|+1) + \cos\ln(|t|+1) + 1)/2$. Тогда $\underline{p} = \alpha$, $\overline{p} = \beta$. Матрица Коши системы (3) имеет вид $Z(t,s) = E\exp\int_s^t p(\tau)\,d\tau$, поэтому для центральных показателей этой системы с выбранной функцией $p(\cdot)$ справедливы равенства [2, с. 116–117, 537]

$$\underline{\omega}(p(\cdot)E) = \lim_{T\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^k \ln\|Z((i-1)T, iT)\|^{-1} = \lim_{T\to\infty}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\sum_{i=1}^k \ln\Bigl(\exp\int\limits_{iT}^{(i-1)T} p(s)\,ds\Bigr)^{-1} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(i-1)T}^{iT} p(s)\,ds = \lim_{T\to\infty} \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \int\limits_{0}^{kT} p(s)\,ds = \underline{p} = \alpha,$$

$$\Omega(p(\cdot)E) = \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^{k} \ln\|Z(iT,(i-1)T)\| = \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \int\limits_{0}^{kT} p(s)\,ds = \overline{p} = \beta.$$

Построим управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность систем (2) и (3). Тогда $\underline{\omega}(A+BU) = \underline{\omega}(p(\cdot)E) = \alpha$, $\Omega(A+BU) = \Omega(p(\cdot)E) = \beta$, что и требовалось.

Теорема 2. *Если система (1) равномерно вполне управляема, то существуют такие $\beta > 0$ и $l > 0$, что для произвольной матрицы $Q(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|Q\|_C \le \beta$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \le l\|Q\|_C$, гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы*

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y \tag{5}$$

и системы (2) при $U = U(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $\sigma > 0$ – число, обеспечивающее σ-равномерную полную управляемость системы (1). Тогда [10] существуют такие $\beta_0 > 0$ и $l_0 > 0$, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любой матрицы $H \in \mathrm{M}_n$, $\|H - E\| \le \beta_0$, найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}([(k-1)\sigma, k\sigma])$, $\|U\|_C \le l_0\|H - E\|$, гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (2) выполнение равенства $X_U(k\sigma,(k-1)\sigma) = X(k\sigma,(k-1)\sigma)H$. Пусть $\beta > 0$ таково, что $\beta\sigma e^{\beta\sigma} = \beta_0 e^{-2a\sigma}$. Так как непрерывная функция в левой части последнего равенства монотонно возрастает по $\beta \in [0,+\infty[$ от 0 до $+\infty$, то такое значение β существует. Возьмем произвольную матрицу $Q(\cdot) \in KC_n(\mathbb{R})$, $\|Q\|_C \le \beta$. Пусть $Y(t,s)$ – матрица Коши системы (5). Тогда

$$Y(k\sigma,(k-1)\sigma) = X(k\sigma,(k-1)\sigma)\left(E + \int\limits_{(k-1)\sigma}^{k\sigma} X((k-1)\sigma,s)Q(s)Y(s,(k-1)\sigma)\,ds\right) =:$$

$$=: X(k\sigma,(k-1)\sigma)H_k$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}$, при этом $\|H_k - E\| \le \int_{(k-1)\sigma}^{k\sigma} \|X((k-1)\sigma,s)\|\,\|Q(s)\|\,\|Y(s,(k-1)\sigma)\|\,ds \le$ $\le \sigma e^{a\sigma} e^{(a+\beta)\sigma}\|Q\|_C \le \beta\sigma e^{\beta\sigma} e^{2a\sigma} = \beta_0$. Следовательно, существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, для которого при каждом $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $X_U(k\sigma,(k-1)\sigma) = X(k\sigma,(k-1)\sigma)H_k =$ $= Y(k\sigma,(k-1)\sigma)$. Отсюда вытекает [11] асимптотическая эквивалентность систем (5) и (2) с $U = U(\cdot)$, причем для нормы управления $U(\cdot)$ справедливы оценки

$$\|U\|_C \le l_0 \sup\{\|H_k - E\| : k \in \mathbb{Z}\} \le l_0\sigma e^{(2a+\beta)\sigma}\|Q\|_C =: l\|Q\|_C.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Сходные утверждения приведены в [12, 13] для более общего класса согласованных систем. В отличие от теоремы 1 они не содержат липшицевой оценки нормы управления в зависимости от нормы возмущения $Q(\cdot)$.

Лемма 1. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (2) при $U = U(\cdot)$ имеет неустойчивые показатели Ляпунова.*

Доказательство. Если показатели Ляпунова однородной системы (4) неустойчивы, то полагаем $U(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

Пусть система (4) имеет устойчивые показатели. Пользуясь теоремой 1, построим управление $U_1(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (2) с $U = U_1(\cdot)$ некоторым ляпуновским преобразованием $y = L(t)x$ приводится к системе $\dot{y} = 0$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\dot{y} = \dot{L}(t)x + L(t)\dot{x} =$ $= (\dot{L}(t)L^{-1}(t) + L(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L^{-1}(t))y = 0$, поэтому

$$L^{-1}(t)\dot{L}(t) = -(A(t) + B(t)U_1(t)). \tag{6}$$

Это же преобразование приводит систему $\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)u$ к системе $\dot{y} = L(t)B(t)u$, которая равномерно вполне управляема согласно следствию 2.1 и лемме 2.4 из [14]. Применяя к этой системе теорему 2, найдем величины $\beta > 0$ и $l > 0$. Пусть $P(t) = \operatorname{diag}(\beta \sin \pi\sqrt{|t|}, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{M}_n$. Поскольку $\|P\|_C = \beta$, найдется управление $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|V\|_C \le l\beta$, такое, что системы

$$\dot{y} = P(t)y, \tag{7}$$

$$\dot{y} = L(t)B(t)V(t)y \tag{8}$$

асимптотически эквивалентны. Так как для системы (7) справедливы соотношения $\lambda_1(P) = \ldots = \lambda_n(P) = 0$, $\Omega(P) = \beta/\pi > 0$ [2, с. 113], из критерия устойчивости показателей [15, 16] вытекает неустойчивость показателей Ляпунова системы (7) и, следовательно, системы (8). К системе (8) применим обратное преобразование $y = L(t)x$, тогда с учетом (6) получим

$$\dot{x} = (L^{-1}(t)y)^{\cdot} = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)y + L^{-1}(t)\dot{y} = -L^{-1}(t)\dot{L}(t)x + L^{-1}(t)L(t)B(t)V(t)y =$$

$$= (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)V(t)L(t)x = (A(t) + B(t)(U_1(t) + V(t)L(t)))x.$$

Положим $U(t) = U_1(t) + V(t)L(t)$. Система (2) с $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе (8), поэтому ее показатели Ляпунова неустойчивы. Лемма доказана.

Следствие 5. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то система (2) обладает свойством глобальной управляемости устойчивости показателей Ляпунова.*

Доказательство. Так как показатели Ляпунова системы с нулевой матрицей устойчивы, то существование управления $U(\cdot)$, обеспечивающего устойчивость показателей системы (2), следует из теоремы 1 при $p(t) \equiv 0$. Построение управления $U(\cdot)$, при котором система (2) обладает неустойчивыми показателями, осуществляется на основании леммы 1.

Теорема 3. *Если система (1) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для любых чисел $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (2) при $U = U(\cdot)$ правильна и имеет своим полным спектром показателей Ляпунова набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Доказательство. Возьмем произвольные $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$. Пусть $\sigma > 0$ – число, обеспечивающее σ-равномерную полную управляемость системы (1). Пользуясь теоремой 1, построим такое управление $U_1(\cdot)$, что система (2) с $U = U_1(\cdot)$ некоторым ляпуновским преобразованием $y = L(t)x$ приводится к системе $\dot{y} = 0$, $y \in \mathbb{R}^n$. Это же преобразование приводит систему $\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)u$ к σ-равномерно вполне управляемой системе $\dot{y} = L(t)B(t)u$. Применим к ней теорему 2 [5], тогда получим существование таких невырожденных матриц F_k, $\|F_k\| \le f$, $\|F_k^{-1}\| \le f$, $k \in \mathbb{Z}$, что для любой матрицы $H \in \mathrm{M}_n$, имеющей положительные ведущие главные миноры, найдется управление $V(\cdot) \in KC_{mn}([(k-1)\sigma, k\sigma])$, обеспечивающее для матрицы Коши $Y_V(t,s)$ замкнутой системы (8) равенство $Y_V(k\sigma, (k-1)\sigma) = F_k H F_k^{-1}$. В соответствии с теоремой о QR-разложении представим F_k в виде $F_k = R_k Q_k$, где R_k – верхняя треугольная, а Q_k – ортогональная матрицы. Тогда $\|R_k\| = \|F_k Q_k^{-1}\| \le \|F_k\| \le f$, $\|R_k^{-1}\| = \|Q_k F_k^{-1}\| \le \|F_k^{-1}\| \le f$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим $d_i = \exp(\lambda_i \sigma)$, $i = 1, \ldots, n$; $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ и положим $H_k = Q_k^* D Q_k$. Тогда H_k – положительно-определенная матрица, поэтому H_k имеет положительные ведущие главные миноры [6, с. 473]. Из теоремы 2 [5] следует существование управления $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такого, что при каждом $k \in \mathbb{Z}$

$$Y_V(k\sigma, (k-1)\sigma) = F_k H_k F_k^{-1} = R_k Q_k H_k Q_k^{-1} R_k^{-1} = R_k Q_k Q_k^* D Q_k Q_k^* R_k^{-1} = R_k D R_k^{-1}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $C(\cdot)$ – кусочно-постоянная матрица, определенная равенствами

$$C(t) \equiv C_k := R_k \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) R_k^{-1}, \quad t \in [(k-1)\sigma, k\sigma[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $C(\cdot)$ ограничена, так как $\sup\{\|C_k\| : k \in \mathbb{Z}\} \le f^2 \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$. При каждом $t \in \mathbb{R}$ матрица коэффициентов $C(t)$ верхняя треугольная с диагональю $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, поэтому в силу теоремы Ляпунова о правильности треугольной системы [2, с. 141] система (9) правильна, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Пусть $Z(t,s)$ – матрица Коши системы (9). Тогда

$$Z(k\sigma,(k-1)\sigma) = \exp(C_k\sigma) = R_k \exp(\operatorname{diag}(\lambda_1\sigma, \ldots, \lambda_n\sigma))R_k^{-1} =$$

$$= R_k \operatorname{diag}(e^{\lambda_1\sigma}, \ldots, e^{\lambda_n\sigma})R_k^{-1} = R_k D R_k^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, при каждом $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $Y_V(k\sigma,(k-1)\sigma) = Z(k\sigma,(k-1)\sigma)$. Это означает [11] асимптотическую эквивалентность систем (8) и (9).

Применим к системе (8) ляпуновское преобразование $y = L(t)x$, получим систему (2) с $U = U(t) := U_1(t) + V(t)L(t)$, асимптотически эквивалентную системе (9). Система (2) с построенным управлением $U(\cdot)$ правильна, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Теорема доказана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 03-01-00014) и Конкурсным центром Министерства образования Российской Федерации (проекты Е 00-1.0-5 и Е 02-1.0-100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. М.; Л., 1956.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. *Kalman R.E.* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
4. *Богданов Ю.С.* // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда: В 2 т. Т. 2. М.; Л., 1961. С. 424–432.
5. *Попова С.Н.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
7. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
8. *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л., 1981.
9. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.
10. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 6. С. 13–16.
11. *Макаров Е.К.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1322–1331.
12. *Тонков Е.Л.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 146–155.
13. *Tonkov E.L.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.
14. *Попова С.Н.* Задачи управления показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 1992.
15. *Миллионщиков В.М.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
16. *Былов Б.Ф., Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.

Институт математики и информатики при Удмуртском государственном университете, г. Ижевск

Поступила в редакцию 20.12.2002 г.