Г. З. Златанов, О конформной геометрии сетей в n-мерном пространстве Вейля,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 8, 19–26

ЛИТЕРАТУРА

1. Marubayashi H. Non commutative Krüll rings // Osaka J. Math.— 1975.— V. 12.— № 3.— P. 703—714.
2. Дубровин Н. И. Некоммутативные кольца нормирования // Тр. Моск. матем. о-ва.— 1982.— Т. 45.— С. 265—280.
3. Дубровин Н. И. Некоммутативные кольца нормирования в простых конечномерных алгебрах над полем // Матем. сб.— 1984.— Т. 123.— № 4.— С. 496—509.
4. Бурбаки Н. Элементы математики. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971.— 707 с.
5. Дубровин Н. И. О кольцах главных правых идеалов // Изв. вузов. Математика.— 1981.— № 2.— С. 30—37.
6. Джекобсон Н. Теория колец.— М.: Ин. лит., 1947.— 287 с.
7. Wadsworth A. R. Dubrovin valuation rings and henselization // Math. Ann.— 1989.— Bd. 283.— S. 301—328.
8. Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР.— 1973.— Т. 37.— № 3.— С. 483—501.

г. Владимир

Поступила
04.05.1990

Г. З. Златанов

УДК 514.764

О КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

Введение

Пусть $W_n(g_{is}, T_k)$ есть n-мерное пространство Вейля с метрическим тензором g_{is} и дополнительным вектором T_k. Следуя А. П. Нордену [1], можно принять, что метрический тензор g_{is} пространства W_n при перенормировании преобразуется по закону

$$\overset{\vee}{g}_{is} = \lambda^2 g_{is}, \tag{1}$$

а дополнительный вектор T_i — по формуле

$$\overset{\vee}{T}_i = T_i + \partial_i \ln \lambda, \tag{2}$$

где λ — функция точки.

Все псевдовеличины, преобразующиеся по закону

$$\overset{\vee}{A} = \lambda^k A, \tag{3}$$

будем называть спутниками веса $\{k\}$ тензора g_{is} [2].

Существование ковектора T_i позволяет ввести продолженное дифференцирование (см. [3]—[5]) спутников веса $\{k\}$ тензора g_{is} по формуле

$$\overset{\circ}{\nabla}_s A = \nabla_s A - kT_s A, \tag{4}$$

где $\nabla_s A$ — ковариантная производная.

Далее для простоты и краткости метрика пространства W_n считается эллиптической. Согласно [1] имеем

$$\overset{\circ}{\nabla}_k g_{is} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla}_k g^{is} = 0, \tag{5}$$

где g^{is} — взаимный тензор для тензора g_{is}.

Пусть в $W_n(g_{is}, T_k)$ заданы независимые псевдовекторы $\underset{\alpha}{v}^i$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющие условию

$$g_{is} \underset{\alpha}{v}^i \underset{\alpha}{v}^s = 1. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\underset{\alpha}{v}^i$ являются спутниками тензора g_{is} с весом $\{-1\}$.

Векторы $\underset{\alpha}{v}^i$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ определяют n-мерную сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$. Взаимную систему векторов $\overset{\alpha}{v}_i$ определим следующим образом:

$$\overset{\alpha}{v}_i \underset{\beta}{v}^i = \delta^\alpha_\beta, \quad \overset{\alpha}{v}_i \underset{\alpha}{v}^s = \delta^s_i, \tag{7}$$

где δ^α_β — символ Кронекера. Легко видно, что ковекторы $\overset{\theta}{v}_i$ являются спутниками тензора g_{is} с весом $\{1\}$.

Пусть $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — дискриминантный поливектор [1] ($\varepsilon_{12\ldots n} = \sqrt{g}$, $g = \det(g_{is})$). Дискриминантный поливектор имеет вес $\{n\}$.

В силу (4) и (5) находим

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0. \tag{8}$$

Продолженную ковариантную производную векторов $\underset{\alpha}{v}^i$ разложим по векторам $\underset{\alpha}{v}^i$ [2]:

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^i = \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \underset{\sigma}{v}^i. \tag{9}$$

Величины $\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k$ имеют вес $\{0\}$. В силу (6) находим

$$\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \cos \underset{\sigma\alpha}{\varphi} = 0, \tag{10}$$

где $\underset{\sigma\alpha}{\varphi}$ — сетевой угол сети $(\underset{\sigma}{v}, \underset{\alpha}{v})$.

§ 1. Некоторые непосредственные следствия работы [2]

Дифференцируя равенства (7), получаем

$$\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\alpha}{v}_i = -\underset{\beta}{\overset{\alpha}{T}}_k \overset{\beta}{v}_i. \tag{11}$$

Введем обозначение

$$q = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n}. \tag{12}$$

Величина q имеет вес $\{0\}$. Из (4), (5), (9) и (12) находим $\overset{\circ}{\nabla}_k q = \nabla_k q = q \underset{\alpha}{\overset{\alpha}{T}}_k$, т.е. $\underset{\alpha}{\overset{\alpha}{T}}_k = \operatorname{grad} \ln q$.

В работе [2] вводятся следующие векторы:

$$\underset{\alpha\beta}{a}^i = \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \underset{\beta}{v}^k \underset{\sigma}{v}^i \ (\alpha \neq \beta), \quad (13) \qquad \overset{\alpha}{b}_i = \underset{\sigma}{\overset{\overline{\alpha}}{T}}_k \underset{\overline{\alpha}}{v}^k \overset{\sigma}{v}_i \ (\sigma \neq \alpha), \quad (14) \qquad \underset{\alpha}{c}^i = \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \underset{\alpha}{v}^k \underset{\sigma}{v}^i, \quad (15)$$

которые называются первыми чебышёвскими, вторыми чебышёвскими и геодезическими векторами сети $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ соответственно. Легко видеть, что векторы $\underset{\alpha\beta}{a}^i$, $\overset{\alpha}{b}_i$ и $\underset{\alpha}{c}^i$ имеют вес $\{-2\}$, $\{0\}$ и $\{-2\}$ соответственно. (По индексам с квадратной скобкой наверху суммирование не производится.)

В работе [2] доказана

Теорема 1. а) *Чебышёвская сеть первого рода характеризуется условиями* $\underset{\alpha\beta}{a}^i = 0$; б) *чебышёвская сеть второго рода характеризуется условиями* $\overset{\alpha}{b}_i = 0$; в) *геодезическая сеть характеризуется условиями* $\underset{\alpha}{c}^i = 0$.

Вводим величины

$$\underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}}=\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \underset{\beta}{v}^k \ (\alpha\neq\beta), \quad (16) \qquad \underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}=\underset{\sigma}{\overset{\overline{\alpha}}{T}}_k \underset{\overline{\alpha}}{v}^k \ (\alpha\neq\sigma), \quad (17) \qquad \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{z}}=\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k \underset{\alpha}{v}^k, \quad (18)$$

которые назовем чебышёвскими кривизнами первого рода, чебышёвскими кривизнами второго рода и геодезическими кривизнами линий сети $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ соответственно. Кривизны $\underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}}$, $\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}$ и $\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{z}}$ имеют вес $\{-1\}$.

Из теоремы 1 и (16)—(18) легко следует

Теорема 2. а) *Чебышёвская сеть первого рода характеризуется условиями* $\underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}}=0$; б) *чебышёвская сеть второго рода характеризуется условиями* $\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}=0$; в) *геодезическая сеть характеризуется условиями* $\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{z}}=0$.

Запишем таблицу весов спутников тензора.

Таблица

Спутники	g_{is}	g^{is}	g	$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$	$\underset{\alpha}{v}^i$	$\overset{\alpha}{v}_i$	q	$\underset{\alpha}{\overset{\beta}{T}}_k$	$\underset{\alpha\beta}{a}^i$	$\overset{\alpha}{b}_i$	$\underset{\alpha}{c}^i$	$\underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}}$	$\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}$	$\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{z}}$
Вес	2	−2	$2n$	n	−1	1	0	0	−2	0	2	−1	−1	−1

§ 2. Конформное преобразование сетей в W_n

1. Пусть $\tau: W_n(g_{is}, T_k) \to \overset{*}{W}_n(\overset{*}{g}_{is}, \overset{*}{T}_k)$ — конформное отображение и $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \in W_n \xrightarrow{\tau} (\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \ldots, \underset{n}{\overset{*}{v}}) \in \overset{*}{W}_n$. Согласно [1]

$$\overset{*}{g}_{is}=g_{is}, \quad \overset{*}{g}{}^{is}=g^{is}, \quad \overset{*}{\varepsilon}_{i_1 i_2 \ldots i_n}=\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \tag{19}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{*}{v}}{}^i=\underset{\alpha}{v}^i, \quad \overset{\overset{*}{\alpha}}{v}_i=\overset{\alpha}{v}_i \ (\alpha=1, 2, \ldots, n),$$

вектор

$$p_k=T_k-\overset{*}{T}_k \tag{20}$$

называется вектором конформного преобразования τ, а тензор

$$T^l_{km}=\overset{*}{\Gamma}{}^l_{km}-\Gamma^l_{km}, \tag{21}$$

где Γ^l_{km} и $\overset{*}{\Gamma}{}^l_{km}$ являются коэффициентами связностей соответственно в W_n и $\overset{*}{W}_n$, называется тензором аффинной деформации.

Пусть в новой связности формулы (10) и (11) имеют вид

$$\overset{*}{\overset{\circ}{\nabla}}_k \underset{\alpha}{v}^l=\underset{\alpha}{\overset{*}{\overset{\sigma}{T}}}_k \underset{\sigma}{v}^l, \quad \overset{*}{\overset{\circ}{\nabla}}_k \overset{\alpha}{v}_i=-\underset{\sigma}{\overset{*}{\overset{\alpha}{T}}}_k \overset{\sigma}{v}_i. \tag{22}$$

Учитывая (4), (20) и (21), находим

$$\overset{*}{\overset{\circ}{\nabla}}_k \underset{\alpha}{v}^l-\overset{\circ}{\nabla}_k \underset{\alpha}{v}^l=T^l_{ks}\underset{\alpha}{v}^s-p_k \underset{\alpha}{v}^l. \tag{23}$$

Согласно [1] имеем

$$T^l_{ks} = p_k\delta^l_s + p_s\delta^l_k - g^{mi}g_{ks}p_m. \tag{24}$$

В силу (9), (22)—(24) для коэффициентов деривационных уравнений пространства $\overset{*}{W}_n$ находим

$$\overset{*}{\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}}_k = \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k + p_s(\underset{\alpha}{v^s}\overset{\sigma}{v}_k - g^{sj}g_{ki}\overset{\sigma}{v}_j\underset{\alpha}{v^i}). \tag{25}$$

Таким образом, при конформном преобразовании ковекторы $\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}_k$ преобразуются по закону (25). Если $\sigma=\alpha$, то формулы (25) принимают вид $\overset{*}{\underset{\alpha}{\overset{\alpha}{T}}}_k = \underset{\alpha}{\overset{\alpha}{T}}_k$.

С помощью формул (25) установим связь между чебышёвскими векторами первого рода, чебышёвскими векторами второго рода, геодезическими векторами, чебышёвскими кривизнами первого рода, чебышёвскими кривизнами второго рода и геодезическими кривизнами в пространствах W_n и $\overset{*}{W}_n$.

2. Из (7), (13), (16) и (25) для чебышёвских векторов первого рода сети $(\overset{*}{\underset{1}{v}}, \overset{*}{\underset{2}{v}}, \ldots, \overset{*}{\underset{n}{v}}) \in \overset{*}{W}_n$ и для чебышёвских кривизн первого рода линий сети $(\overset{*}{\underset{1}{v}}, \overset{*}{\underset{2}{v}}, \ldots, \overset{*}{\underset{n}{v}}) \in \overset{*}{W}_n$ в новой связности находим

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{a^i}} = \underset{\alpha\beta}{a^i} + p_s(\underset{\beta}{v^i}\underset{\alpha}{v^s} - g^{si}\cos\underset{\alpha\beta}{\varphi}), \quad \overset{*}{\underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}}} = \underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}} + p_s(\delta^\sigma_\beta\underset{\alpha}{v^s} - g^{sj}\overset{\sigma}{v}_j\cos\underset{\alpha\beta}{\varphi}).$$

Сети, допускающие конформное отображение на чебышёвские сети первого рода, назовем конформно-чебышёвскими сетями первого рода.

Пусть при конформном преобразовании сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \in W_n$ отображается в сеть $(\overset{*}{\underset{1}{v}}, \overset{*}{\underset{2}{v}}, \ldots, \overset{*}{\underset{n}{v}}) \in \overset{*}{W}_n$, для которой поле направлений $\overset{*}{\underset{\alpha}{v^i}}$ переносится параллельно по линиям $(\overset{*}{\underset{\beta}{v}})$ $(\alpha\neq\beta)$. Согласно [2] имеем $\overset{*}{\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{T}}}_k \overset{*}{\underset{\beta}{v^k}} = 0$, отсюда, учитывая (7), (16) и (25), получаем

$$\underset{\alpha\beta}{\overset{\sigma}{r}} + p_s(\delta^\sigma_\beta\underset{\alpha}{v^s} - g^{sj}\overset{\sigma}{v}_j\cos\underset{\alpha\beta}{\varphi}) = 0. \tag{26}$$

Согласно (10) система (26) содержит $n-1$ уравнений.

Пусть $n=2$. Из (26) легко следует теорема Нордена [1]: всякая связность W_2 может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования данная сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v})$ станет чебышёвской.

Пусть $n>2$. В силу (26) следует, что всякая связность W_n $(n>2)$ может быть бесконечным числом способов преобразована конформно так, что после этих конформных преобразований данная сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ станет сетью $(\overset{*}{\underset{1}{v}}, \overset{*}{\underset{2}{v}}, \ldots, \overset{*}{\underset{n}{v}})$, для которой поле направлений $\overset{*}{\underset{\alpha}{v^i}}$ переносится параллельно по линиям $(\overset{*}{\underset{\beta}{v}})$, $\alpha\neq\beta$.

Пусть сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \in W_n$ является конформно-чебышёвской первого рода.

Рассмотрим два случая.

(аПусть $\underset{\alpha\beta}{\varphi} \neq 90^\circ$ для любых α и $\beta \neq \alpha$. Из (26) получаем

$$p_s g^{sj} \overset{\sigma}{v}_j = \overset{\sigma}{\underset{\alpha\beta}{r}}/\cos \underset{\alpha\beta}{\varphi} \quad (\alpha \neq \beta,\ \sigma \neq \beta,\ \alpha,\ \beta,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{27}$$

Система (27) содержит $n(n-1)^2$ уравнений.

Тензор

$$m^{s\sigma} = g^{sj} \overset{\sigma}{v}_j \tag{28}$$

имеет вес $\{-1\}$. Если сеть $(\underset{1}{v},\ \underset{2}{v},\ \ldots,\ \underset{n}{v})$ принята за координатную, то $m^{s\sigma} = g^{s\sigma}$. Следовательно, тензор $m^{s\sigma}$ невырожден.

Система (27) имеет единственное решение для вектора конформного преобразования p_s тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\overset{\sigma}{\underset{\alpha\beta}{r}}/\cos \underset{\alpha\beta}{\varphi} = \overset{\sigma}{\underset{\gamma\delta}{r}}/\cos \underset{\rho\delta}{\varphi},\ \sigma \neq \beta,\ \sigma \neq \delta,\ \alpha \neq \beta,\ \gamma \neq \delta,\ \alpha\beta \neq \gamma\delta \tag{29}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Из (27)—(29) для вектора конформного преобразования находим $p_s = \overset{\sigma}{r}\,\tilde{m}_{s\sigma}$, где $\overset{\sigma}{r} = \overset{\sigma}{\underset{\alpha\beta}{r}}/\cos \underset{\alpha\beta}{\varphi}$ для любых α и $\beta \neq \alpha$, $\beta \neq \sigma$, а $\tilde{m}_{s\sigma}$ — взаимный тензор для тензора $m^{s\sigma}$. Очевидно, $\overset{\sigma}{r}$ и $\tilde{m}_{s\sigma}$ имеют вес $\{-1\}$ и $\{1\}$ соответственно.

Из (29) следует

Теорема 3. *Конформно-чебышёвские сети первого рода* $(\underset{1}{v},\ \underset{2}{v},\ \ldots,\ \underset{n}{v}) \in W_n$, *для которых* $\underset{\alpha\beta}{\varphi} \neq 90^\circ$ *при любых* α *и* $\beta \neq \alpha$, *характеризуются условиями* (29).

б) Пусть для некоторых λ и $\mu \neq \lambda$ $(\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ $\underset{\lambda\mu}{\varphi} = 0$.

Легко доказывается, что конформно-чебышёвские сети $(\underset{1}{v},\ \underset{2}{v},\ \ldots,\ \underset{n}{v}) \in W_n$, которые имеют ортогональную двумерную сеть $(\underset{\lambda}{v},\ \underset{\mu}{v})$, характеризуются условиями

$$\overset{\sigma}{\underset{\lambda\mu}{r}} = 0 \ (\sigma \neq \mu),\ \overset{\sigma}{\underset{\mu\lambda}{r}} = 0 \ (\sigma \neq \lambda)$$

и условиями (29) $(\alpha\beta \neq \lambda\mu,\ \gamma\delta \neq \lambda\mu,\ \gamma\delta \neq \mu\lambda)$.

3. Из (7), (14), (17) и (25) для чебышёвских векторов второго рода сети $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\ \overset{*}{\underset{2}{v}},\ \ldots,\ \overset{*}{\underset{n}{v}}) \in \overset{*}{W}_n$ и для чебышёвских кривизн второго рода линий сети $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\ \overset{*}{\underset{2}{v}},\ \ldots,\ \overset{*}{\underset{n}{v}})$ в новой связности находим

$$\overset{*}{\overset{\alpha}{b}}_i = \overset{\alpha}{b}_i + p_s(\delta_i^s - g^{sj} g_{kj} \overset{\overline{\alpha}}{v}_i \underset{\overline{\alpha}}{v}^k),\quad \overset{*}{\overset{\alpha}{\underset{\sigma}{\rho}}} = \overset{\alpha}{\underset{\sigma}{\rho}} + p_s(\underset{\sigma}{v}^s - g^{sj} \cos \underset{\sigma\overline{\alpha}}{\varphi}\, \overset{\overline{\alpha}}{v}_j).$$

Сети, допускающие конформное отображение на чебышёвские сети второго рода, назовем конформно-чебышёвскими сетями второго рода.

Пусть при конформном преобразовании сеть $(\underset{1}{v},\ \underset{2}{v},\ \ldots,\ \underset{n}{v}) \in W_n$ отображается в сеть $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\ \overset{*}{\underset{2}{v}},\ \ldots,\ \overset{*}{\underset{n}{v}}) \in \overset{*}{W}_n$, для которой площадка $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\ \overset{*}{\underset{2}{v}},\ \ldots,\ \overset{*}{\underset{\alpha-1}{v}},\ \overset{*}{\underset{\alpha+1}{v}},\ \ldots,\ \overset{*}{\underset{n}{v}})$ переносится параллельно по линиям $(\overset{*}{\underset{\alpha}{v}})$. Согласно [2] имеем

$$\overset{*}{\underset{\sigma}{T}}{}^{\alpha}_{k}\overset{*}{\underset{\alpha}{v}}{}^{k}=0\ (\sigma\neq\alpha),$$

отсюда, учитывая (7), (17) и (25), получаем

$$\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}+p_s(\underset{\sigma}{v}^s-g^{sj}\cos\underset{\sigma\alpha}{\varphi}\underset{\bar{\alpha}}{\overset{\alpha}{v}}{}_j)=0\ (\sigma\neq\alpha). \tag{30}$$

Из (30) следует, что всякая связность $W_n(n>2)$ может быть бесконечным числом способов преобразована конформно так, что после этих конформных преобразований данная сеть $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})$ станет сетью $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\overset{*}{\underset{2}{v}},\ldots,\overset{*}{\underset{n}{v}})$, для которой площадка $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\overset{*}{\underset{2}{v}},\ldots,\overset{*}{\underset{\alpha-1}{v}},\overset{*}{\underset{\alpha+1}{v}},\ldots,\overset{*}{\underset{n}{v}})$ переносится параллельно по линиям $(\overset{*}{\underset{\alpha}{v}})$.

Пусть ортогональная сеть $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})\in W_n$ является конформно-чебышёвской второго рода. Из (30) получаем

$$p_s\underset{\sigma}{v}^s+\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}=0\ \ (\sigma\neq\alpha;\ \alpha,\ \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{31}$$

Система (31) содержит $n(n-1)$ уравнений. Она имеет единственное решение для вектора конформного преобразования p_s тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}=\underset{\sigma}{\overset{\beta}{\rho}},\ \alpha\neq\sigma,\ \beta\neq\sigma,\ \ \alpha\neq\beta;\ \alpha,\ \beta,\ \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{32}$$

С помощью (31) и (32) находим следующее выражение вектора конформного преобразования p_s: $p_s=-\underset{\sigma}{\rho}\underset{\sigma}{v}_s$, где $\underset{\sigma}{\rho}=\underset{\sigma}{\overset{\alpha}{\rho}}$ для любых $\alpha\neq\sigma$. Очевидно, $\underset{\sigma}{\rho}$ имеет вес $\{-1\}$.

Из (2) следует

Теорема 4. *Ортогональные конформно-чебышёвские сети второго рода* $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})\in W_n$ *характеризуются условиями* (32).

4. В силу (7), (15), (18) и (25) для геодезических векторов сети $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\overset{*}{\underset{2}{v}},\ldots,\overset{*}{\underset{n}{v}})\in\overset{*}{W}_n$ и для геодезических кривизн линий сети $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\overset{*}{\underset{2}{v}},\ldots,\overset{*}{\underset{n}{v}})$ в новой связности находим

$$\overset{*}{\underset{\alpha}{c}}{}^i=\underset{\alpha}{c}{}^i+p_s(\underset{\alpha}{v}^s\underset{\alpha}{v}^i-g^{si}),\quad \overset{*}{\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{z}}}=\underset{\alpha}{\overset{\sigma}{z}}+p_s(\underset{\alpha}{v}^s\delta^\sigma_\alpha-g^{sj}\overset{\sigma}{v}_j).$$

Сети, допускающие конформное отображение на геодезические сети, назовем конформно-геодезическими сетями.

Пусть при конформном преобразовании сеть $(\underset{1}{v},\underset{2}{v},\ldots,\underset{n}{v})\in W_n$ отображается в сеть $(\overset{*}{\underset{1}{v}},\overset{*}{\underset{2}{v}},\ldots,\overset{*}{\underset{n}{v}})\in\overset{*}{W}_n$, для которой поле направлений $\overset{*}{\underset{\alpha}{v}}{}^i$ является геодезическим. Согласно [2] имеем

$$\overset{*}{\underset{\alpha}{T}}{}^{\sigma}_{k}\overset{*}{\underset{\alpha}{v}}{}^{k}=0,$$

отсюда, учитывая (7), (18) и (25), получаем

$$\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{r}} + p_s(\delta^{\sigma}_{\alpha} \underset{\alpha}{v}^s - g^{sj} \overset{\sigma}{v}_j) = 0. \tag{33}$$

В силу (10) система (33) содержит $(n-1)$ уравнений.

Пусть $n=2$. Из (33) легко следует теорема Нордена [1]: всякая связность W_n может быть единственным образом преобразована конформно так, что данная сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}) \in W_n$ станет геодезической.

Пусть $n > 2$. В силу (33) следует, что всякая связность W_n $(n>2)$ может быть бесконечным числом способов преобразована конформно так, что после этих конформных преобразований данная сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$ станет сетью $(\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \ldots, \underset{n}{\overset{*}{v}})$, для которой поле направлений $\underset{\alpha}{\overset{*}{v}}{}^i$ является геодезическим.

Пусть сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \in W_n$ является конформно-геодезической. Из (28) и (33) получаем систему

$$p_s m^{s\sigma} = \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{r}} \quad (\alpha \neq \sigma), \tag{34}$$

которая содержит $n(n-1)$ уравнений. Система (1) имеет единственное решение для вектора конформного преобразования p_s тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{r}} = \overset{\sigma}{\underset{\beta}{r}} \quad (\sigma \neq \alpha,\ \sigma \neq \beta,\ \alpha \neq \beta;\ \alpha,\ \beta,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{35}$$

Из (34) и (35) находим следующее выражение вектора конформного преобразования p_s: $p_s = \overset{\sigma}{r}\, \tilde{m}_{s\sigma}$, где $\overset{\sigma}{r} = \overset{\sigma}{\underset{\alpha}{r}}$ для любых $\alpha \neq \sigma$. Очевидно, $\overset{\sigma}{r}$ имеет вес $\{-1\}$.

В силу (35) справедлива следующая

Теорема 5. *Конформно-геодезические сети* $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \in W_n$ *характеризуются условиями* (35).

5. Пусть в W_n дана сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v})$. Рассмотрим тензор

$$b_{is} = \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{\alpha}{v}_i \overset{\alpha}{v}_s,$$

который имеет вес $\{2\}$.

Согласно [1] вектор

$$t_s = \frac{n}{(n-1)(n+2)}\, \tilde{b}^{ik}\left(\nabla_i b_{ks} - \frac{1}{n} \nabla_s b_{ik}\right), \tag{36}$$

где $b_{is}\tilde{b}^{ik} = \delta^k_s$, называется чебышёвским вектором поляритета b_{is}.

В силу (4), (7) и (36) находим

$$t_s = \frac{1}{(n-1)(n+2)}\, b^{ik}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i b_{ks} - \frac{1}{n} \overset{\circ}{\nabla}_s b_{ik}\right), \tag{37}$$

где $b^{ik} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\alpha}{v}^i \underset{\alpha}{v}^k$. Вектор t_s имеет вес $\{0\}$.

С помощью формул (25) установим связь между чебышёвскими векторами поляритета b_{is} в пространствах W_n и $\overset{*}{W}_n$.

Из (7), (11), (25) и (37) для чебышёвского вектора поляритета в новой связности находим

$$\overset{*}{t}_s = t_s - \frac{1}{n+2} p_s. \tag{38}$$

Пусть с помощью конформного преобразования τ данная сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \ni$ $\in W_n$ отображается в сеть $(\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \ldots, \underset{n}{\overset{*}{v}}) \in W_n$, для которой чебышёвский вектор поляритета $\overset{*}{b}_{is}$ равен нулю. Из $\overset{*}{t}_s = 0$ и (38) получаем

$$p_s = (n+2)\, t_s, \tag{39}$$

отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Всякая связность Вейля W_n может быть единственным образом преобразована конформно так, что после этого конформного преобразования данная сеть $(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}) \in W_n$ станет сетью $(\underset{1}{\overset{*}{v}}, \underset{2}{\overset{*}{v}}, \ldots, \underset{n}{\overset{*}{v}})$, для которой чебышёвский вектор поляритета $\overset{*}{b}_{is} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\alpha}{\overset{*}{v}}_i \underset{\alpha}{\overset{*}{v}}_s$ равен нулю. Вектором этого конформного преобразования служит вектор* (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А. П. Пространства аффинной связности.— М.: Наука, 1976.— 432 с.
2. Златанов Г. З. Сети в n-мерном пространстве Вейля // Докл. Болг. АН.— 1988.— Т. 41.— № 10.— С. 29—32.
3. Hlavaty V. Les courbes de la variete W_n // Memor. Sci. Math.— Paris, 1934.
4. Норден А. П., Яфаров Ш. А. Теория негеодезического векторного поля в пространствах аффинной связности двух измерений // Изв. вузов. Математика.— 1974.— № 12.— С. 29—34.
5. Златанов Г. З., Норден А. П. Ортогональные траектории геодезического поля // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 7.— С. 42—46.

г. Пловдив (БНР)

Поступила 30.06.1989

В. Г. Кротов

УДК 517.518

О ГЛАДКОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МАРЦИНКЕВИЧА И УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

Пусть C — пространство функций, непрерывных на некотором фиксированном отрезке T действительной прямой,

$$\|F\|_C = \sup_{x \in T} |F(x)|,$$

M — класс измеримых (не обязательно конечных почти всюду) функций на T.

В 1935 году Й. Марцинкевич [1] доказал следующее утверждение.

Теорема Марцинкевича. *Пусть последовательность $\{h_\nu\}$ такова, что $h_\nu \neq 0$ для всех ν и $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_\nu = 0$. Тогда существует такая функция $F \in C$, что для любой функции $f \in M$ найдется последовательность натуральных чисел $\nu_k \uparrow \infty$ со свойством*

$$\lim_{k\to\infty} [F(x + h_{\nu_k}) - F(x)]\, h_{\nu_k}^{-1} = f(x)$$

почти всюду на T. Более того, множество таких функций является множеством 2-й категории в C.

При доказательстве этой теоремы Марцинкевич опирался на некоторые идеи Н. Н. Лузина [2].

Функцию F из теоремы Марцинкевича назовем $\{h_\nu\}$-универсальной функцией Марцинкевича и поставим вопрос о возможной гладкости таких функций. Мы будем связывать этот вопрос с поведением ряда Фурье — Стильтьеса функции F.