МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 17, № 5 (1975), 691—701

УДК 517.518.22

К ОПИСАНИЮ ПРОСТРАНСТВ $L_p^{\vec{\alpha}}(\Omega)$

А. В. Скориков

В работе рассматривается вопрос об описании пространств бесселевых потенциалов $L_p^{\vec{\alpha}}(\Omega)$, $\Omega \neq E_n$ в терминах «модифицированных» дробных производных Маршо. Библ. 10 назв.

Известно описание пространств $L_p^{\vec{\alpha}}(E_n)$ бесселевых потенциалов в терминах лиувиллевских дробных производных (П. И. Лизоркин [1], [2]). Пространства $L_p^{\alpha}(\Omega)$ в случае $\Omega \neq E_n$ исследовались в работах П. И. Лизоркина [3], Р. С. Стрихартца [4], В. П. Ильина [5]. В настоящей заметке рассматривается вопрос об описании пространств $L_p^{\vec{\alpha}}(\Omega)$ суже́ний на Ω бесселевых потенциалов в терминах дробных производных («модифицированных» дробных производных Маршо). Основное внимание уделено одномерному случаю (§ 1). В § 2 дается распространение на многомерный случай и показывается, что вводимая нормировка пространства $L_p^{\vec{\alpha}}(\Omega)$ эквивалентна нормировке Стрихартца — Ильина.

§ 1. Одномерный случай. Пусть (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, есть интервал вещественной оси. Следуя работе [6], определим (модифицированный лиувиллевский) дробный интеграл $I_c^{\alpha}\varphi$, $\alpha > 0$, $c \in [a, b]$ равенством

$$(I_c^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int_c^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, & x > c, \\ \int_x^c \varphi(t)(t-x)^{\alpha-1}dt, & x < c. \end{cases} \tag{1}$$

© Издательство «Наука», «Математические заметки», 1975 г.

Очевидно, $I_c^\alpha \varphi = I_+^\alpha \varphi_+^c + I_-^\alpha \varphi_-^c$, где $\varphi_+^c(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > c, \\ 0, & x < c, \end{cases}$

$\varphi_-^c(x) = \begin{cases} 0, & x > c \\ \varphi(x), & x < c \end{cases}$, а $I_\pm^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_\pm^{\alpha-1} * \varphi$ — обычные

лиувиллевские дробные интегралы по всей оси. Пусть

$$(D_{\pm,\varepsilon}^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x) - f(x \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt$$

— «усеченные» дробные производные Маршо. Аналогично (1) положим

$$D_{c,\varepsilon}^\alpha f = D_{+,\varepsilon}^\alpha (f - M_c)_+^c + D_{-,\varepsilon}^\alpha (f - M_c)_-^c,$$

где $M_c = 0$ во всех случаях, когда $c = \pm\infty$ или c — конечно, но $\alpha < 1/p$; если же c конечно и $\alpha > 1/p$, то $M_c = f(c)$.

Определение. Будем говорить, что $f(x) \in L_p^\alpha(a, b)$, $0 < \alpha < 1$, $p > 1$, $\alpha \neq 1/p$, если $f(x) \in L_p(a, b)$, причем $f(x)$ эквивалентна непрерывной на (a, b) функции при $\alpha > 1/p$ и существует предел

$$(D_c^\alpha f)(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p(a, b))}} (D_{c,\varepsilon}^\alpha f)(x).$$

Норму в $L_p^\alpha(a, b)$ введем равенством

$$\|f\|_{L_p^\alpha(a, b)}^{(c)} = \|f\|_{L_p(a, b)} + \|D_c^\alpha f\|_{L_p(a, b)}. \tag{2}$$

В соответствии с обычно используемыми обозначениями будем писать: $D_+^\alpha f = D_{-\infty}^\alpha f$, $D_-^\alpha f = D_{+\infty}^\alpha f$.

Пусть

$$(H_\gamma \varphi)(x) = \frac{1}{|d - x|^\gamma} \int_c^d \frac{|d - t|^\gamma \varphi(t)}{x - t} dt.$$

ЛЕММА 1. *Оператор H_γ ограничен из $L_p(c, d)$ в $L_p(a, b)$ при $-1/p' < \gamma < 1/p$, причем $\|H_\gamma\| \leqslant k(p, \gamma)$, где $k(p, \gamma)$ не зависит от a, b, c, d.*

Утверждение леммы есть очевидное следствие теоремы Шура — Харди — Литтлвуда об интегральных операторах с однородным ядром. Нам понадобится также следующий результат [6].

ЛЕММА 2. *Пусть функция* $f(x)$ *представима в виде* $f(x) = (I_c^\alpha \varphi_c)(x)$, $-\infty < x < \infty$, *где* $\varphi_c(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $p > 1$, $p \neq 1/\alpha$. *Тогда* $f(x)$ *представима также в виде* $f(x) = M_d + (I_d^\alpha \varphi_d)(x)$ *для любой другой точки* $d \neq c$, *где* $\varphi_d(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, *и* $M_d = 0$ *при* $p < 1/\alpha$ *и* $M_d = f(d)$ *при* $p > 1/\alpha$ (d *и* c — *конечны*).

При этом

$$\varphi_d(x) = \nu_\alpha(x)\varphi_c(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{1}{|d-x|^\gamma} \int_c^d \frac{\varphi_c(t)\,|d-t|^\gamma}{x-t}\,dt, \quad (3)$$

где

$$\nu_\alpha(x) = \begin{cases} \cos \alpha\pi, & x \in (c, d) \\ 1, & x \notin (c, d) \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad \alpha < 1/p \\ \alpha - 1 & \text{при} \quad \alpha > 1/p \end{cases}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(x) \in L_p^\alpha(a, b)$ *при каком-нибудь выборе конечной* *) *точки* $c \in [a, b]$, *то* $f(x) \in L_p^\alpha(a, b)$ *и при замене точки* c *любой другой точкой* $d \in [a, b]$, *и*

$$\|f\|^{(c)}_{L_p^\alpha(a,\,b)} \leqslant l(p, \alpha)\,\|f\|^{(d)}_{L_p^\alpha(a,\,b)}, \quad (4)$$

где $l(p, \alpha)$ *не зависит от* a, b, c, d. *При этом* (*в случае конечного* d) *производные* $\varphi_d(x) = (D_d^\alpha f)(x)$, $\varphi_c(x) = (D_c^\alpha f)(x)$ *связаны при* $x \in (a, b)$ *равенством* (3).

Доказательство. Пусть $f(x) \in L_p^\alpha(a, b)$ при некотором выборе точки $c \neq \pm\infty$. В силу теорем 2 и 2′ работы [7], дающих описание функций, представимых дробными интегралами, получаем, что $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = M_c + (I_c^\alpha \varphi_c)(x), \qquad a < x < b. \quad (5)$$

Обозначим $\tilde{\varphi}_c(x) = \begin{cases} \varphi_c(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$ и пусть $d \neq \pm\infty$.

В силу леммы 2 функция $(I_c^\alpha \tilde{\varphi}_c)(x)$ представима в виде $I_c^\alpha \tilde{\varphi}_c = M_d - M_c + I_d^\alpha \tilde{\varphi}_d$, где $\tilde{\varphi}_d$ определяется по $\tilde{\varphi}_c$ формулой (3). Тогда суже́ние φ_d функции $\tilde{\varphi}_d$ на (a, b) также определяется по φ_c формулой (3). Следовательно, из (5) $f(x) = M_d + (I_d^\alpha \varphi_d)(x)$, $a < x < b$. Поэтому $f(x)$ имеет производную $D_d^\alpha f = \varphi_d \in L_p(a, b)$ согласно также

*) Ниже (теорема 1′) теорема 1 будет распространена и на случай $c = \pm\infty$.

теоремам 2 и 2′ из [7]. Оценка (4) следует из (3) в силу леммы 1.

Пусть d бесконечно, например, $d = -\infty$. Полагая $\varphi_c = (\varphi_c)_+^c + (\varphi_c)_-^c$, из (5) получаем: $(D_-^\alpha f)(x) = D_-^\alpha I_+^\alpha (\varphi_c)_+^c + D_-^\alpha I_-^\alpha (\varphi_c)_-^c$. Так как $(\varphi_c)_-^c$ — финитна в окрестности $x = +\infty$, то $D_-^\alpha I_-^\alpha (\varphi_c)_-^c = (\varphi_c)_-^c$ — (см. [8], тождества (12)). Остается показать, что $D_-^\alpha I_+^\alpha (\varphi_c)_+^c \in L_p(-\infty, b)$. Поступая аналогично [8, стр. 361], после несложных преобразований получаем представление

$$D_{-,\varepsilon}^\alpha I_+^\alpha (\varphi_c)_+^c = \\ = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\int_{|s|>\varepsilon}^{\infty} \frac{(\varphi_c)_+^c (x-s)}{s} ds + \int_{-1}^{\infty} k(s)(\varphi_c)_+^c (x - \varepsilon s)\, ds\right],$$

где

$$k(s) = 1/2 s^{-1}[1 - \operatorname{sign}(1-s) + s^\alpha - 2(1+s)^\alpha + \\ + s^\alpha \operatorname{sign} s] \in L_1(-1, \infty).$$

Отсюда $D_-^\alpha I_+^\alpha (\varphi_c)_+^c = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha} * (\varphi_c)_+^c + (\varphi_c)_+^c (x) \int_{-1}^{\infty} k(s)\, ds$ и тогда $\| D_-^\alpha I_+^\alpha (\varphi_c)_+^c \|_{L_p(a,b)} \leqslant l_1(p, \alpha) \| \varphi_c \|_{L_p(a,b)}$, что и требовалось.

Следствие. Введенный класс L_p^α обладает свойством аддитивности. Именно, пусть $\Omega_1 = (a_1, b_1)$, $\Omega_2 = (a_2, b_2)$, $\bar\Omega_1 \cap \bar\Omega_2 \neq 0$, и пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Тогда, если $f_1 \in L_p^\alpha(\Omega_1)$ и $f_2(x) \in L_p^\alpha(\Omega_2)$, то функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \Omega_1, \\ f_2(x), & x \in \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

принадлежит пространству $L_p^\alpha(\Omega)$ всегда, если $1 < p < 1/\alpha$ и при условии непрерывности $f(x)$ на Ω, если $p > 1/\alpha$. При этом $\| f \|_{L_p^\alpha(\Omega)} \leqslant l_2(p, \alpha) \| f_1 \|_{L_p^\alpha(\Omega_1)} + \| f_2 \|_{L_p^\alpha(\Omega_2)}$. (Предполагается, что пространства $L_p^\alpha(\Omega)$, $L_p^\alpha(\Omega_1)$, $L_p^\alpha(\Omega_2)$ определяются выбором конечных точек c.)

ЛЕММА 3. *Пусть $f(x) \in L_p^\alpha(0, a)$ при каком-нибудь выборе конечной точки c. Четное продолжение $\tilde f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, a) \\ f(-x), & x \in (-a, 0) \end{cases}$ функции $f(x)$ принадлежит пространству $L_p^\alpha(-a, a)$.*

Доказательство. Выбрав $c = 0$ в соответствии с теоремой 1, имеем

$$\| D_0^\alpha \tilde{f} \|_{L_p(-a,\, a)} = \| D_0^\alpha f \|_{L_p(0,\, a)} + \| D_0^\alpha [\tilde{f}(-t)] \|_{L_p(-a,\, 0)},$$

$$\| D_0^\alpha [\tilde{f}(-t)] \|_{L_p(-a,\, 0)} =$$

$$= \left\{ \int_0^a dx \left| \int_0^\infty \frac{f(x) - M_0 - [\tilde{f}(-x-t) - M_0]}{t^{1+\alpha}}\, dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \| D_0^\alpha f \|_{L_p(0,a)},$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 2. *Для функций* $f(x) \in L_p^\alpha(\Omega_+)$, *где* $\Omega_+ = (-\infty,\ b)$, *или* $f(x) \in L_p^\alpha(\Omega_-)$, *где* $\Omega_- = (a,\ \infty)$, *справедливы представления* $f(x) = (R_\pm^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi(x) \in L_p^\alpha(\Omega_\pm)$, *соответственно, где*

$$(R_\pm^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-\alpha}}\, \varphi(x \mp t)\, dt. \tag{6}$$

Доказательство. Для пространства $L_p^\alpha(-\infty, \infty)$ представление $f(x) = (J^\alpha \psi)(x)$, $\psi \in L_p(-\infty,\ +\infty)$, $\widehat{J^\alpha \psi} = (1 + x^2)^{-\alpha/2}\, \hat{\psi}$ хорошо известно при $c = \infty$ (см. [1]), случай c конечного сводится к $c = \infty$ по теореме 1. Так как $\widehat{(R_\pm^\alpha \varphi)}(x) = \mp (1 \mp ix)^{-\alpha} \hat{\varphi}(x)$, то представление $f(x)$ в виде (6) в случае всей оси следует из того, что $(1 + x^2)^{-\alpha/2} \cdot (1 \mp ix)^\alpha$ есть p-мультипликатор в соответствии с теоремой С. Г. Михлина. В случае же полуоси естественно воспользоваться представлением (6) на всей оси, предварительно продолжив функцию $f(x) \in L_p^\alpha(-\infty,\ b)$ на всю ось с сохранением класса согласно лемме 3. Так как совпадение классов L_p^α, определяемых конечной и бесконечной точкой c, еще не доказано, то, чтобы воспользоваться леммой 3, предварительно произведем «урезание» функции $f(x) \in L_p^\alpha(-\infty,\ b)$. Считая для простоты $b = 0$, введем «урезание» $f_\rho(x) = a_\rho(x)\, f(x)$, где $a_\rho(x) = a(x/\rho)$, $a(x) \in C_0^\infty$ и $a(x) = 1$ при $|x| < 1/2$, $a(x) = 0$ при $|x| > 1$. Покажем, что $\| f - f_\rho \|_{L_p^\alpha(-\infty,\, b)} \to 0$ при $\rho \to \infty$, действительно,

$$(D_{+,\,\delta}^\alpha [a_\rho f])(x) =$$

$$= a_\rho(x)\, (D_{+,\,\delta}^\alpha f)(x) + \int_\delta^\infty \frac{a_\rho(x) - a_\rho(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, f(x-t)\, dt$$

и требуемая сходимость вытекает из следующей оценки в $L_p^\alpha(-\infty, 0)$ второго слагаемого, получаемой применением неравенства Минковского *)

$$\left\{\int_{-\infty}^{0} dx \left| \int_{\delta}^{\infty} \frac{a_\rho(x) - a_\rho(x-t)}{t^{1+\alpha}} f(x-t)\, dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{l_4}{\rho} \int_0^N \frac{dt}{t^\alpha} + 2 \int_N^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \right] \|f\|_{L_p}. \qquad (7)$$

Так как функция $f_\rho(x)$ финитна слева, то

$$(D_{-\rho}^\alpha f_\rho)(x) = (D_+^\alpha f_\rho)(x) \in L_p(-\infty, 0).$$

Следовательно, $f_\rho(x) \in L_p^\alpha(-\infty, 0)$ при выборе конечной точки $c = -\rho$. Тогда по лемме 3 функцию $f_\rho(x)$ можно продолжить на всю ось до функции $\tilde{f}_\rho(x) \in L_p^\alpha(-\infty, \infty)$. Для последней представление $\tilde{f}_\rho(x) = (R_+^\alpha \varphi_\rho)(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi_\rho(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ справедливо. Введем оператор:

$$(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x) - e^{-t} f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

Можно показать по той же схеме ([8], стр. 362), что и для производных $D_+^\alpha f$ оператор $\mathbf{D}_+^\alpha$ является левым обратным к R_+^α в L_p: $(\mathbf{D}_+^\alpha R_+^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x)$, $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$. Поэтому

$$\tilde{f}_\rho(x) = (R_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha R_+^\alpha)\varphi_\rho(x) = (R_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha \tilde{f}_\rho)(x), \qquad -\infty < x < +\infty;$$

тогда очевидно

$$f_\rho(x) = (R_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha f_\rho)(x), \qquad -\infty < x < 0.$$

Отсюда окончательно получаем (с учетом ограниченности R_+^α в L_p):

$$\|f - R_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha f\|_{L_p(-\infty, 0)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f - f_\rho\|_{L_p(-\infty, 0)} + \|R_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha f_\rho - R_+^\alpha \mathbf{D}_+^\alpha f\|_{L_p(-\infty, 0)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f - f_\rho\|_{L_p(-\infty, 0)} + l_5(p, \alpha) \|\mathbf{D}_+^\alpha f_\rho - \mathbf{D}_+^\alpha f\|_{L_p(-\infty, 0)} \leqslant$$

$$\leqslant l_6(p, \alpha) \|f - f_\rho\|_{L_p^\alpha(-\infty, 0)},$$

---

*) Заметим, что одновременно в (7) показано, что оператор умножения на функцию $a(x) \in C_0^\infty$ ограничен в $L_p^\alpha(-\infty, b)$.

причем в последнем неравенстве мы воспользовались эквивалентностью норм $\| f \|_{L_p^\alpha} \sim \| f \|_{L_p} + \| \mathbf{D}_+^\alpha f \|_{L_p}$, вытекающей из равенства $(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x) = (D_+^\alpha f)(x) + (m * f)(x)$, где $m(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(1 - e^{-x}) x_+^{-\alpha-1} \in L_1(-\infty, +\infty)$.

Следствие. *Пусть Ω полуось или вся ось. Справедливо вложение*

$$L_p^\alpha(\Omega) \to L_q(\Omega), \qquad p \leqslant q \leqslant \infty, \ 1/q \geqslant 1/p - \alpha. \tag{8}$$

Доказательство следует из полученного представления и не отличается от доказательства аналогичного утверждения на всей оси (см. [1], стр. 345, теорема 9).

ТЕОРЕМА 1′. *Утверждение теоремы* 1 *справедливо и в случае $c = \pm\infty$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_p^\alpha(a, b)$ при $c = -\infty$. Как и в случае c конечного, нам потребуется представление типа (5). Если (a, b) вся ось, то формула

$$I_+^\alpha D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N \to -\infty} \int_N^x \frac{(D_+^\alpha f)(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy = f(x) \tag{9}$$

доказана в теореме 4 из [2, стр. 128]. Легко видеть, что аналогичная формула будет верна для интегралов I_-^α и производных D_-^α. Анализ доказательства указанной теоремы показывает, что она верна и для полуоси в силу доказанного выше вложения (8), а тогда в случае $\alpha < 1/p$ теорема следует из полученного представления и теоремы 2.1 из [9, стр. 378] и теорем 2 и 2′ из [7]. Пусть $\alpha > 1/p$; определим функцию $\varphi_d(x)$ по функции $\varphi_c(x) = \varphi_{-\infty}(x) = (D_+^\alpha f)(x)$ формулой (3) и рассмотрим композицию $I_d^\alpha \varphi_{dN}(x)$, где φ_{dN} получаем из φ_d, заменяя c на N в формуле (3). Имеем

$$(I_d^\alpha \varphi_{dN})(x) = I_d^\alpha (\nu_\alpha \varphi_{-\infty})(x) + \\ + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_d^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} |d-t|^{\alpha-1}} \int_N^d \frac{|d-\tau|^{\alpha-1} \varphi_{-\infty}(\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл по формуле 3.228.1 из [10], получим

$$(I_d^\alpha \varphi_{dN})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_N^x \frac{\varphi_{-\infty}(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_N^d \frac{\varphi_{-\infty}(\tau)}{(d-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \tag{10}$$

Отсюда, с учетом (9), имеем $\lim\limits_{N\to-\infty} I_d^\alpha \varphi_{dN}(x) = f(x) - f(d)$. Остается показать, что $\lim\limits_{N\to-\infty} I_d^\alpha \varphi_{dN}(x) = I_d^\alpha \varphi_d(x)$. Действительно, пусть $N < d$ и Ω — произвольный ограниченный отрезок, вложенный в (a, b). Имеем

$$\|I_d^\alpha \varphi_{dN} - I_d^\alpha \varphi_d\|_{L_p(\Omega)} \leqslant l_7 \|(\varphi_{dN} - \varphi_d)\|_{L_p(a,b)} =$$
$$= l_7 \left\| \frac{1}{|x-d|^{\alpha-1}} \int_{-\infty}^{d} \frac{|d-\tau|^{\alpha-1} (\varphi_{-\infty})_-^N(\tau)}{x-\tau} d\tau \right\|_{L_p(a,b)} \leqslant$$
$$\leqslant l_8 \|(\varphi_{-\infty})_-^N\|_{L_p} \to 0$$

при $N \to -\infty$. Отсюда существует последовательность $N_k \to -\infty$ такая, что $\lim\limits_{N_k\to-\infty} (I_d^\alpha \varphi_{dN_k})(x) = (I_d^\alpha \varphi_d)(x)$, р. р. $x \in \Omega$. В силу произвольности Ω получаем окончательно $f(x) - f(d) = (I_d^\alpha \varphi_d)(x)$; отсюда в силу теоремы 2 из [7] $(D_d^\alpha f)(x) = \varphi_d(x)$. Итак, эквивалентность норм в пространствах $L_p^\alpha(a, b)$, взятых относительно различных точек $c \in [a, b]$, показана.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $L_p^\alpha(a, b)$ совпадает с пространством сужéний функций из пространтва $L_p^\alpha(-\infty, +\infty)$ бесселевых потенциалов.*

Доказательство. Обозначим пространство сужéний бесселевых потенциалов через $R(a, b)$. Вложение $R(a, b) \to L_p^\alpha(a, b)$ следует из теоремы 1. Обратное вложение при $\alpha < 1/p$ следует из аддитивности классов $L_p^\alpha(a, b)$; для этого достаточно функцию $f \in L_p^\alpha(a, b)$ продолжить нулем вне (a, b) и воспользоваться следствием теоремы 1. Пусть $\alpha > 1/p$. Продолжим вначале функцию $f(x) \in L_p^\alpha(a, b)$ на отрезок $\Omega \supset [a, b]$ согласно лемме 3 (с учетом теоремы 1′, когда Ω — полуось), а затем в качестве продолжения на всю ось, если (a, b) — конечный отрезок, возьмем функцию $\varphi(x) = a(x) f(x)$ при $x \in \Omega$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin \Omega$, где $a(x) \in C_0^\infty$ имеет носитель в Ω и равна 1 на (a, b). Остается показать, что оператор $(Tf)(x) = a(x) f(x)$ ограничен в $L_p^\alpha(a, b)$ при $\alpha > 1/p$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $\|f\|_{L_p(a,b)} = |f(c)|(b-a)^{1/p}$.

Покажем, что $\| D_c^\alpha (a\cdot f)\|_{L_p(a,\,b)} \leqslant k \| f \|_{L_p^\alpha(a,\,b)}$.

Обозначим

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & b > x > c \\ \varphi(c), & x < c \end{cases}, \quad \approx\!\!\!

Далее,

$$B = |f(c)| \| D^{\alpha}_{+,\varepsilon}\tilde{a}\|_{L_p(c,\,b)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(b-a)^{1/p}} \| D^{\alpha}_{+,\,\varepsilon}\tilde{a}\|_{L_p} \|f\|_{L_p(a,\,b)} \leqslant k_4 \|f\|_{L_p(a,\,b)},$$

поскольку нормы $\| D^{\alpha}_{+,\,\varepsilon}\,\tilde{a}\|_{L_p}$ ограничены равномерно по ε. Аналогично проверяется сходимость в L_p последовательности $D^{\alpha}_{c,\varepsilon}\,[a\cdot f]$ при $\varepsilon \to 0$.

§ 2. Остановимся вкратце на переносе полученных результатов на n-мерный случай. Пусть Ω — выпуклая область в E_n. Как и в одномерном случае, пусть $D^{\alpha}_{\pm,\,x_i,\,\varepsilon}\,f$ — «усеченные» дробные производные Маршо по i-й координате. Определим на Ω

$$(D^{\alpha}_{c_i,\,x_i,\,\varepsilon}\,f)(x) =$$
$$= [D^{\alpha_i}_{+,\,x_i,\,\varepsilon}(f - M_{c_i})^{c_i}_{+}](x) + [D^{\alpha_i}_{-,\,x_i,\,\varepsilon}(f - M_{c_i})^{c_i}_{-}](x),$$

где $c_i = c_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $M_{c_i} = 0$ во всех случаях, когда $c_i = \pm\infty$ или c_i — конечно, но $\alpha_i < 1/p$; если же c_i конечно, и $\alpha_i > 1/p$, то

$$M_{c_i} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Определение. Будем говорить, что $f \in L^{\alpha_i}_{px_i}(\Omega)$, $0 < \alpha_i < 1$, $p > 1$, $\alpha_i \neq 1/p$, если $f \in L_p(\Omega)$, причем $f(x)$ эквивалентна непрерывной по i-й координате функции при $\alpha_i > 1/p$ и существует предел:

$$(D^{\alpha_i}_{c_i x_i}\,f)(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p(\Omega))}} (D^{\alpha_i}_{c_i,\,x_i,\,\varepsilon}\,f)(x).$$

Введем в $L^{\alpha_i}_{px_i}(\Omega)$ норму $\|f\|_{L^{\alpha_i}_{px_i}} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|D^{\alpha}_{c_i x_i}\,f\|_{L_p(\Omega)}$ и положим $L^{\vec{\alpha}}_p(\Omega) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} L^{\alpha_i}_{px_i}(\Omega)$ с нормой

$$\|f\|_{L^{\vec{\alpha}}_p} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \| D^{\alpha_i}_{c_i x_i}\,f\|_{L_p(\Omega)}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Нормировки пространств $L^{\vec{\alpha}}_p(\Omega)$, соответствующие различным функциям c_i, эквивалентны.*

Утверждение следует из теоремы Фубини и теорем 1, 1′.

Из теоремы 3 и [4] следует эквивалентность в одномерном случае нормы Стрихартца и введенной нормы, а тогда в силу теоремы Фубини пространства $\vec{L}_p^{\alpha}(\Omega)$ совпадают с пространствами В. П. Ильина [3]. Далее, точно так же как и в одномерном случае, легко видеть, что пространства $\vec{L}_p^{\alpha}(\Omega)$, если Ω — параллелепипед, совпадают с пространствами сужéний бесселевых потенциалов $\vec{L}_p^{\alpha}(E_n)$, причем при $\alpha_i < 1/p$, $i = 1, \ldots, n$ это справедливо также и для выпуклых областей в силу аддитивности классов $\vec{L}_p^{\alpha}(\Omega)$, следующей из аддитивности в одномерном случае.

В заключение автор выражает признательность С. Г. Самко за руководство работой.

Ростовский государственный университет

Поступило 24.VI.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Лизоркин П. И., Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$, Теоремы вложения, Матем. сб. **60**, № 3 (1963), 325—353.

[2] Лизоркин П. И., Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений дифференцируемых функций, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **105** (1969), 89—167.

[3] Лизоркин П. И., Пространства $L_p^r(\Omega)$, Теоремы продолжения и вложения, Докл. АН СССР, **145**, № 3 (1962), 527—530.

[4] Strichartz R. S., Multipliers of fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech., 16 (1967), 1031—1060.

[5] Ильин В. П., Интегральные представления классов и теоремы вложения, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, **19** (1970), 95—155.

[6] Chen Y. W., Entire solutions of class of differential equations of mixed type. Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 229—255.

[7] Рубин Б. С., Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси. Изв. вузов, Математика, **6** (1973), 73—81.

[8] Самко С. Г., О пространстве $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **8**, № 5 (1973), 360—383.

[9] Рубин Б. С., О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **7**, № 5 (1972), 373—386.

[10] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.