Л. Н. Волгин, Упрощенный метод решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений теплицева типа,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 4, 428–432

https://www.mathnet.ru/mzm4232

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛИЦЕВА ТИПА

Л. Н. Волгин

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} h_{i-k} y_k = x_i, \qquad i = [0, \infty), \tag{1}$$

где $\{h_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\{x_i\}_0^{\infty}$, $\{y_k\}_0^{\infty}$ — последовательности действительных чисел, причем первые две последовательности заданы, а последняя неизвестна. Системы вида (1) представляют собой дискретный вариант интегральных уравнений Винера — Хопфа [1]. Им соответствуют матрицы простой структуры

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots \\ h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

называемые теплицевыми [2].

Введем производящие функции

$$X(z) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} x_i z^i, \quad Y(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} y_k z^k, \tag{2}$$

$$H(z) = \sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty} h_i z^i. \tag{3}$$

Ряды Тейлора (2) будем считать сходящимися в круге $|z| \leqslant 1$, а ряд Лорана (3) — в кольце, содержащем контур $|z| = 1$. Это налагает условия

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| < \infty, \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h_i| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |y_k| < \infty. \tag{4}$$

Заметим, что последнее условие вытекает из двух первых.

Общий метод решения систем вида (1) опирается на винеровское понятие факторизации. *Факторизацией* функции $H(z)$ относительно контура $|z| = 1$ называется представление ее в виде произведения двух таких функций $H(z) = H^{+}(z) H^{-}(z)$, что все нули и полюсы $H^{+}(z)$ находятся в области $|z| > 1$, а все нули и полюсы $H^{-}(z)$ — в области $|z| < 1$.

С помощью этого понятия в [1, с. 67] сформулировано следующее решение задачи:

$$Y(z) = \frac{1}{H^{+}(z)} \cdot \mathfrak{P}_{+} \left[\frac{X(z)}{H^{-}(z)} \right], \tag{5}$$

где $\mathfrak{P}_{+}$ — операция, выделяющая из любого ряда Лорана его правильную часть

$$\mathfrak{P}_{+} \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i z^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^i \tag{6}$$

и выражаемая в общем случае интегралом [1, с. 75]

$$\mathfrak{P}_{+} H(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{7}$$

(здесь j — мнимая единица).

Рассмотрим случай, когда $H(z)$ и $X(z)$ являются рациональными функциями (или аппроксимируются ими)

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \tag{8}$$

где P, Q, A и B — полиномы от z.

Факторизация относительно контура $|z| = 1$ полинома $A(z)$ с действительными коэффициентами также дает полиномы от z с действительными коэффициентами

$$A(z) = A^{+}(z) A^{-}(z).$$

Факторизация рациональной функции $H(z)$ также дает рациональные функции

$$H^{+}(z) = \frac{P^{+}(z)}{Q^{+}(z)}, \quad H^{-}(z) = \frac{P^{-}(z)}{Q^{-}(z)}.$$

Для дальнейшего нам понадобится понятие сепарации. *Сепарацией* функции $H(z)$ называется ее представление в виде суммы двух функций

$$H(z) = H_+(z) + H_-(z),$$

таких, что все полюсы H_+ находятся в области $|z| > 1$, а все полюсы H_- — в области $|z| < 1$. Сепарация рациональной функции

$$H = \frac{P}{Q} = \frac{\Theta}{Q^+} + \frac{\Pi}{Q^-}$$

производится путем решения диофантова полиномиального уравнения [3]

$$Q^-\Theta + Q^+\Pi = P. \tag{9}$$

Правильная сепарация, обеспечивающая выполнение условия

$$\deg \Pi < \deg Q^-,$$

достигается получением минимального решения полиномиального уравнения (9) относительно Π [3, с. 30—31]. Правильная сепарация соответствует операции выделения правильной части ряда Лорана.

Учитывая условие

$$X = \frac{A}{B^+}, \tag{10}$$

решение рассматриваемой задачи в случае рациональной аппроксимации можно записать в виде

$$Y = \frac{Q^+\Theta}{P^+B^+}, \tag{11}$$

где Θ — полином, входящий в решение диофантова полиномиального уравнения

$$P^-\Theta + B^+\Pi = AQ^-, \tag{12}$$

минимальное относительно Π.

Пример. Рассмотрим теплицеву систему

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{|i-k|} y_k - \lambda y_i = \beta^i, \qquad i = [0, \infty).$$

Условия (4) обеспечиваются при $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$.

Составим производящие функции

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i z^i = \frac{1}{1 - \beta z},$$

$$H(z)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha^{|i|}z^i-\lambda=\frac{1}{1-\alpha z}+\frac{\alpha}{z-\alpha}-\lambda=$$
$$=\frac{\alpha\lambda(1+2\rho z+z^2)}{(1-\alpha z)(z-\alpha)},$$

где

$$\rho=\frac{1-\lambda-\alpha^2-\lambda\alpha^2}{2\alpha\lambda}.$$

Рассмотрим полином

$$P(z)=1+2\rho z+z^2.$$

В случае $\alpha>0$ при $|\rho|>1$, что соответствует диапазону значений λ

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}<\lambda<\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \tag{13}$$

он имеет комплексные корни на контуре $|z|=1$, и в кольце полиномов с действительными коэффициентами не факторизуется. Поэтому в диапазоне (13) задача не имеет решения.

В случае малых λ

$$\lambda<\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

имеем $\rho>1$, и полином $P(z)$ имеет действительные различные корни $z_1=-\gamma$ и $z_2=-\frac{1}{\gamma}$, где

$$\gamma=\rho-\sqrt{\rho^2-1},\qquad 0<\gamma<1.$$

Функция $H(z)$ при этом поддается факторизации в поле рациональных функций с действительными коэффициентами

$$H(z)=\frac{\alpha\lambda}{\gamma}\cdot\frac{(1+\gamma z)(z+\gamma)}{(1-\alpha z)(z-\alpha)},$$
$$P^+(z)=\alpha\lambda(1+\gamma z),\quad P^-(z)=z+\gamma,$$
$$Q^+(z)=\gamma(1-\alpha z),\quad Q^-(z)=z-\alpha.$$

Имеем

$$A(z)=1,\quad B^+(z)=1-\beta z.$$

Составляем полиномиальное уравнение (12)

$$(z+\gamma)\Theta+(1-\beta z)\Pi=z-\alpha.$$

Оно имеет единственное минимальное решение со степенями неизвестных полиномов $\deg\Theta=0$, $\deg\Pi=0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \gamma\theta_0 + \pi_0 = -\alpha, \\ \theta_0 - \beta\pi_0 = 1. \end{cases}$$

Ее решение

$$\Theta_0 = \frac{1-\alpha\beta}{1+\beta\gamma}.$$

По формуле (11) получаем

$$Y(z) = \frac{\gamma}{\alpha\lambda} \cdot \frac{1-\alpha\beta}{1+\beta\gamma} \cdot \frac{1-\alpha z}{(1-\beta z)(1+\gamma z)}.$$

Получить разложение этой функции в ряд Тейлора проще всего разложением ее на элементарные дроби, а для этого достаточно решить полиномиальное уравнение

$$(1+\gamma z)\Theta + (1-\beta z)\Pi = 1 - \alpha z.$$

Его минимальное решение

$$\Theta = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\gamma}, \quad \Pi = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}.$$

Из разложения на элементарные дроби легко получить общий вид решения

$$y_k = \frac{\gamma}{\alpha\lambda} \cdot \frac{1-\alpha\beta}{1+\beta\gamma} \left[\frac{\beta-\alpha}{\beta+\gamma} \cdot \beta^k + (-1)^k \cdot \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \gamma^k \right], \quad k = [0, \infty).$$

В случае больших λ

$$\lambda > \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

имеем $\rho < -1$, и решение также существует. Корни по-прежнему равны $z_1 = -\gamma$ и $z_2 = -1/\gamma$, но

$$\gamma = \rho + \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Формула решения остается прежней.

Московский экспериментальный ВЦ

Поступило
29.01.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, вып. 5. С. 3—120.
[2] Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.
[3] Волгин Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М.: Наука, 1986.