Р. Р. Ашуров, Асимптотика спектральной функции оператора Шредингера с потенциалом $q \in L_2(R^3)$, *Дифференц. уравнения*, 1987, том 23, номер 1, 169–172

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЯНВАРЬ 1987 г., ТОМ 23, № 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

Р. Р. АШУРОВ

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ $q \in L_2(R^3)$

1. Пусть $q(x)$ — произвольная неотрицательная функция из класса $L_2(R^3)$. Тогда оператор Шредингера $H = -\Delta + q$ является существенно самосопряженным в $C_0^\infty(R^3)$. Пусть $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы замыкания оператора H в $L_2(R^3)$. Проектор E_λ является интегральным оператором с ядром $\theta(x, y, \lambda)$, который называется спектральной функцией. Выражение $E_\lambda f(x)$ называют спектральным разложением элемента $f \in L_2(R^3)$. Для любого s, $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, введем средние Рисса спектральных разложений

$$E_\lambda^s f(x) = \int_0^{\lambda-0} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f(x).$$

Ядро интегрального оператора E_λ^s обозначим через $\theta^s(x, y, \lambda)$.

При исследовании вопросов сходимости и суммируемости спектральных разложений важную роль играет асимптотическое поведение при больших λ спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$. Изучению асимптотики функции $\theta(x, y, \lambda)$ посвящены работы многих авторов (обзор работ до 1976 г. см. в [1, 2]).

В работах [3—5] получено полное асимптотическое разложение функции $\theta(x, y, \lambda)$ для гладких потенциалов. Причем если все частные производные потенциала $q(x)$ до порядка $3n$, $n \geqslant 1$, ограничены, то авторам удалось выписать ровно n членов асимптотического разложения спектральной функции. Однако многие уравнения квантовой механики имеют неограниченные потенциалы (например, кулоновский потенциал $1/|x|$). Естественно, даже первые производные таких потенциалов не являются ограниченными. Поэтому представляет интерес получить асимптотическое разложение спектральной функции без требования гладкости потенциала.

В данной заметке построено несколько членов асимптотического разложения спектральной функции оператора Шредингера с достаточно сильно убывающим на бесконечности потенциалом из класса $L_2(R^3)$. Полученное разложение оказалось вполне достаточным для изучения вопросов сходимости и суммируемости спектральных разложений.

2. Сформулируем основной результат. Для любого $\lambda \geqslant 0$ и $k = 1, 2, \ldots$ введем следующие функции:

$$e_0(x, y, \lambda) = \frac{\sin|x-y|\sqrt{\lambda}}{4\pi|x-y|}, \quad h_0(x, y, \lambda) = \frac{\cos|x-y|\sqrt{\lambda}}{4\pi|x-y|},$$

$$e_k(x, y, \lambda) = -\int_{R^3} [e_0(x, u, \lambda) h_{k-1}(u, y, \lambda) + h_0(x, u, \lambda) e_{k-1}(u, y, \lambda)]\, q(u)\, du,$$

$$h_k(x, y, \lambda) = \int_{R^3} [e_0(x, u, \lambda) e_{k-1}(u, y, \lambda) - h_0(x, u, \lambda) h_{k-1}(u, y, \lambda)]\, q(u)\, du.$$

Положим $\theta_0(x, y, \lambda) = \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{5} \int\limits_0^\lambda e_k(x, y, t)\, dt$.

Через $L_{2,p}(R^3)$ будем обозначать класс таких функций из $L_2(R^3)$, которые вне некоторого шара (вообще говоря, разного для каждой функции) принадлежат пространству $L_p(R^3)$, $p \geqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$ — произвольная неотрицательная функция из класса $L_{2,p}(R^3)$, $1 \leqslant p < 3/2$. Пусть $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция замыкания оператора $H = -\Delta + q$ в $L_2(R^3)$.*

Тогда при $\lambda > 1$ справедлива равномерная по x, $y \in R^3$ оценка

$$|\theta(x, y, \lambda) - \theta_0(x, y, \lambda)| < c_0\lambda^{1/2}, \quad c_0 > 0. \tag{1}$$

Заметим, что кулоновский потенциал $1/|x|$ не удовлетворяет условию теоремы. Однако, используя тауберову теорему Л. Хёрмандера (см. [6], теорема 2.7), из оценки (1) легко получаем

Следствие 1. *Пусть $q(x)$ — неотрицательная функция и $q = q_1 + q_2$, $q_1 \in L_2(R^3)$, $q_2 \in L_\infty(R^3)$. Пусть $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция оператора $H = -\Delta + q$.*

Тогда для любого компакта K существует константа c_K, такая, что

$$|\theta(x, y, \lambda) - \theta_0(x, y, \lambda)| < c_K\lambda, \quad \lambda > 1,$$

равномерно по x, $y \in K$.

Отметим, что в работе [7] рассмотрен оператор Шредингера с потенциалом $q(x) = a(x)/|x - x_0|$, $0 \leqslant a(x) \leqslant c|x - x_0|^{\tau-1}$, $\tau > 1/2$, в $L_2(R^3)$. Доказано, что если $q(x)$ имеет достаточно малый носитель, то ряд $\sum_0^\infty e_k(x, y, \lambda)$ сходится равномерно по x, $y \in R^3$, $\lambda \geqslant 0$ и поэтому можно выписать явный вид спектральной функции.

3. Пусть $\Omega \subset R^N$ — произвольная ограниченная область с гладкой границей, $x_0 \in \Omega$. В работе [8] рассмотрен оператор Шредингера с сингулярным в точке x_0 потенциалом $q(x) \in C^\infty(\Omega \setminus \{x_0\}) \cap L_2(\Omega)$. В этой работе удалось доказать, что условия, обеспечивающие суммируемость в каждой точке из Ω средними Рисса ряда Фурье по собственным функциям оператора $-\Delta + q$, являются такими же, как и для оператора Лапласа. В трехмерном случае для потенциалов указанного выше вида в работе [7] установлено, что и условия, обеспечивающие равномерную сходимость и локализацию спектральных разложений оператора $-\Delta + q$, остаются такими же, как и для оператора Лапласа.

Из теоремы 1 последний результат вытекает для спектральных разложений оператора Шредингера с произвольным неотрицательным потенциалом $q \in L_2(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$ (см. доказательства теорем 1 и 2 работы [7]).

4. При исследовании вопросов равносходимости спектральных разложений важную роль играет следующая оценка в норме $L_2(R^3)$.

Теорема 2. *Пусть $q(x)$ и $\theta(x, y, \lambda)$ такие же, как и в теореме 1. Тогда при фиксированном s, $\operatorname{Re} s > 0$, либо $s = 0$ справедлива равномерная оценка по $x \in R^3$ ($\lambda > 1$)*

$$\int_{R^3} |\theta^s(x, y, \lambda) - \theta_0^s(x, y, \lambda)|^2 dy \leqslant c_0(\lambda^{1/2 - \operatorname{Re} s} + \lambda^{-1}\ln^2\lambda). \tag{2}$$

Теперь сформулируем некоторые следствия из оценки (2). Пусть $\Omega \subset R^3$ — произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей, q — произвольная неотрицательная функция из класса $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим оператор $H = -\Delta + q$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$. Пусть $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — последовательность собственных значений (без конечных точек сгущения) и $\{u_n\}_1^\infty$ — полная ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора H. Легко проверить, что в этом случае

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s (f, u_n)\, u_n(x), \quad \theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} u_n(x)\overline{u_n(y)}, \tag{3}$$

где (f, u_n) — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Из оценки (2), используя тауберову теорему Л. Хёрмандера (теорема 2.7 в [6]), получаем

Следствие 2. *Пусть $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция из (3). Тогда при фиксированном s, $\operatorname{Re} s > 0$, либо $s = 0$ и $\lambda > 1$ справедлива равномерная по x на любом компакте $K \subset \Omega$ оценка*

$$\int_\Omega |\theta^s(x, y, \lambda) - \theta_0^s(x, y, \lambda)|^2 dy < c_K(\lambda^{1 - \operatorname{Re} s} + \lambda^{-1}\ln^2\lambda). \tag{4}$$

Отсюда, применяя методику, развитую В. А. Ильиным (см. [1]), и изучая функцию $\theta_0(x, y, \lambda)$, получаем оценку снизу константы Лебега.

Следствие. 3. *Пусть $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция из (3), $x_0 \in \Omega$. Тогда существует множество положительной меры $E_0 \subset \Omega$, такое, что $x_0 \in E_0$ и для любого множества $E \subset E_0$, $|E| > \frac{1}{2}|E_0| > 0$, справедлива оценка*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\frac{1}{2}(1-s)} \int_E |\theta^s(x_0, y, \lambda)|\, dy > 0 \tag{5}$$

для всех $s < 1$.

Оценка (5) впервые была получена В. А. Ильиным для оператора Лапласа (см. [9]) и явилась новой даже для тригонометрических рядов Фурье. Затем в работе [10] В. А. Ильин доказал аналогичный результат для эллиптических операторов второго порядка с гладкими коэффициентами.

Заметим, что из (5), в частности, следует неулучшаемость условий локализации спектральных разложений оператора Шредингера, о которых говорилось в п. 3.

Изучая функцию $\theta_0(x, y, \lambda)$, затем применяя оценку (4), получаем (см. [11])

Следствие 4. *Пусть $f(x)$ — финитная функция из класса $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $E_\lambda^s f(x)$ — средние Рисса из (3). Тогда если $s > 3(1/p - 1/2)$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda^s f(x) = f(x)$, почти всюду в Ω.*

Этот результат для спектральных разложений оператора Лапласа установлен Ш. А. Алимовым [11].

5. Приведем основные моменты доказательства теорем 1 и 2. Пусть $q \in L_{2,p}(R^3)$ $1 \leqslant p < 3/2$, и является неотрицательной функцией. Обозначим через $\hat{H}$ замыкание в $L_2(R^3)$ оператора $H = -\Delta + q$. Ядро резольвенты $\hat{G}_z = (\hat{H} - z)^{-1}$, $z \in C^1$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ обозначим через $G(x, y, z)$.

Функция $G(x, y, z)$ называется функцией Грина оператора H и является решением интегрального уравнения

$$G(x, y, z) = E_0(x, y, z) - \int\limits_{R^3} E_0(x, u, z)\, G(u, y, z)\, q(u)\, du, \tag{6}$$

где $E_0(x, y, z) = e^{i\sqrt{z}\,|x-y|}/4\pi|x-y|$ — свободная функция Грина, т. е. ядро оператора $(-\Delta - z)^{-1}$, величина $\sqrt{z}$ взята с положительной мнимой частью.

Введем итерированные ядра

$$E_{k+1}(x, y, z) = -\int\limits_{R^3} E_0(x, u, z)\, E_k(u, y, z)\, q(u)\, du, \quad k \geqslant 0.$$

Легко проверить, что при $q \in L_{2,p}(R^3)$, $1 \leqslant p < 3/2$, справедлива оценка $|E_3(x, y, z)| < c_1$, где $\operatorname{Im} z \neq 0$, константа c_1 зависит только от $q(x)$. Учитывая это, итерируя уравнение (6) и уравнение

$$G(x, y, z) = E_0(x, y, z) - \int\limits_{R^3} G(x, u, z)\, E_0(u, y, z)\, q(u)\, du,$$

затем используя оценку $|(f, \hat{G}_z g)| \leqslant \pi |\operatorname{Im} z|^{-1} \|f\|\,\|g\|$, $f, g \in L_2(R^3)$, будем иметь

$$\left| G(x, y, z) - \sum_{k=0}^{5} E_k(x, y, z) \right| \leqslant \pi c_0^2 |\operatorname{Im} z|^{-1} \|q\|^2_{L_2(R^3)}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\theta(x, y, \lambda)}{\lambda - z} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{5} \int\limits_0^\infty \frac{e_k(x, y, \lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda = O(|\operatorname{Im} z|^{-1}), \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Далее доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству тауберовой теоремы Субханкулова (см. [12], теорема 4.1.2). Причем сначала получим оценку (1) на диагонали $x = y$, затем распространяем ее вне $x = y$.

Пусть $f \in L_2(R^3)$. Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_0^\infty \frac{dE_\lambda f(x)}{\lambda - z} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{3} \int\limits_{R^3} f(y) \int\limits_0^\infty \frac{e_k(x, y, \lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda dy = O(|\operatorname{Im} z|^{-1}). \tag{7}$$

Отсюда получаем оценку для $E_\lambda f(x)$, а затем, переходя к ядрам, утверждение теоремы 2 при $s = 0$ (заметим, что при этом используется теорема 1).

Пусть

$$\sigma(x, f, \lambda) = E_\lambda f(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{3} \int\limits_{R^3} f(y) \int\limits_0^\lambda e_k(x, y, t)\, dt dy,$$

$\sigma^{[s]}(x, f, \lambda)$ — кратная первообразная по λ функции σ, т. е. $\sigma^{[0]} = \sigma$, $\sigma^{[s]}(x, f, \lambda) = \int\limits_0^\lambda \sigma^{[s-1]}(x, f, t)\, dt$, $s \geqslant 1$. Тогда для средних Рисса порядка s имеем

$$\sigma^s(x, f, \lambda) = \frac{s!}{\lambda^s}\, \sigma^{[s]}(x, f, \lambda).$$

Для доказательства теоремы 2 для целых s по индукции оцениваем функцию $\sigma^{[s]}(x, f, \lambda)$. Для этой функции из оценки (7) будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma^{[s]}(x, f, \lambda)}{(\lambda - z)^{s+1}} = O(|\operatorname{Im} z|^{-1}).$$

Отсюда получаем оценку (2) для целых s. Для произвольных s, $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, оценка (2) следует из тауберовой теоремы Хёрмандера ([6], теорема 2.4).

Автор благодарит Ш. А. Алимова и В. А. Ильина за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.//Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 6. С. 29—83.
2. Хёрмандер Л.//Сб. пер. Математика. 1969. Т. 13, № 6. С. 114—137.
3. Osborn T. A., Fujiwara Y.//J. Math. Phys. 1983. Vol. 24, N 5. P. 1093—1103.
4. Osborn T. A., Wong R.//J. Math. Phys. 1983. Vol. 24, N 6. P. 1487—1501.
5. Osborn T. A., Wong R.//J. Math. Phys. 1985. Vol. 26, N 4. P. 753—768.
6. Хёрмандер Л.//Сб. пер. Математика. 1968. Т. 12, № 5. С. 91—130.
7. Хэлмухамедов А. Р.//Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1642—1645.
8. Alimov S. A., Joó I.//Acta. Scien. Math. (Szeged). 1983. Vol. 45. P. 5—18.
9. Ильин В. А.//Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 2. С. 61—120.
10. Ильин В. А.//Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 49—73.
11. Алимов Ш А.//Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 3. С. 567—576.
12. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком. М., 1976.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.

УДК 517.927.25

Х. М. КАРОВ

ОБ ОБРАТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ХАУСДОРФА—ЮНГА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим оператор Штурма—Лиувилля с коэффициентами, имеющими разрыв в некоторой точке x_0 интервала (a, b) вещественной оси. Согласно определению В. А. Ильина (см., например, [1]), собственные и присоединенные функции этого оператора понимаются в обобщенном смысле без требования удовлетворения каким-либо краевым условиям.

Под собственной функцией оператора Штурма—Лиувилля, отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать такую не равную тождественному нулю функцию $u_0(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) принадлежит классу C^1 на каждом из сегментов $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, классу C^2 на каждом из интервалов (a, x_0) и (x_0, b);

2) удовлетворяет почти всюду на указанных интервалах следующим уравнениям:

$$[p_1(x)\, u_0']' + l_1(x)\, u_0 + \lambda u_0 = 0 \quad \text{на } (a, x_0), \tag{1}$$

$$[p_2(x)\, u_0']' + l_2(x)\, u_0 + \lambda u_0 = 0 \quad \text{на } (x_0, b); \tag{2}$$

3) удовлетворяет следующим условиям сопряжения в точке разрыва коэффициентов: $u_0(x_0 - 0) = u_0(x_0 + 0)$, $p_1(x_0)\, u_0'(x_0 - 0) = p_2(x_0)\, u_0'(x_0 + 0)$.

Присоединенной функцией порядка $s = 1, 2, \ldots$, отвечающей тому же значению λ и собственной функции $u_0(x)$, называется функция $u_s(x)$, которая обладает приведенными выше свойствами 1), 3) и почти всюду удовлетворяет уравнениям

$$[p_1(x)\, u_s']' + l_1(x)\, u_s + \lambda u_s = u_{s-1} \quad \text{на } (a, x_0), \tag{3}$$

$$[p_2(x)\, u_s']' + l_2(x)\, u_s + \lambda u_s = u_{s-1} \quad \text{на } (x_0, b). \tag{4}$$

На коэффициенты оператора Штурма—Лиувилля накладываются следующие условия: