КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ЯКИМОВ Н. Д.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗРЫВЕ ЗАРЯДА КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассматривается задача определения выемки выброса при взрыве шнурового заряда на горизонтальной поверхности грунта. Используется гидродинамическая модель явления взрыва, примененная в работах [1, 2, 3] к расчету симметричных шнуровых зарядов. В отличие от случаев постоянного [1] или линейного [2] распределения импульсного давления взрыва на границе заряда здесь рассматривается более общий случай переменного симметричного распределения.

Применение зарядов переменной по сечению толщины может явиться одним из путей повышения эффективности взрыва.

Как известно, задачи такого рода не всегда имеют решение, поэтому исследование разрешимости и свойств решения представляет определенный интерес. В настоящей работе доказана единственность решения. Показано, что если существует решение для некоторого заряда, то при увеличении импульсного давления (не меньшем вблизи середины заряда, чем вблизи концов) решение задачи также существует, а выемка увеличивается во всех направлениях. Последнее свойство может быть использовано, например, для оценки выемки от заряда криволинейного сечения через соответствующие решения, предложенные [1] и [2].

Математическая постановка. Как показано в [1], по гидродинамической модели рассматриваемой задаче соответствует следующая математическая задача.

Требуется определить форму участка CD границы области G_z (рис. 1) так, чтобы существовала аналитическая в G_z функция $w(z)=\varphi(x,y)+\psi(x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям на границе:

$$\text{на } AB \ \ \varphi=-f(x), \ y=0, \ 0\leqslant x\leqslant x_B;$$
$$\text{на } BC \ \ \varphi=0, \ y=0, \ x_B\leqslant x\leqslant x_C;$$

на AD $\psi=0$, $x=0$, $0 \geqslant y \geqslant y_D$; (1)

на DC $\psi=0$, $\left|\frac{dw}{dz}\right| = v_*$.

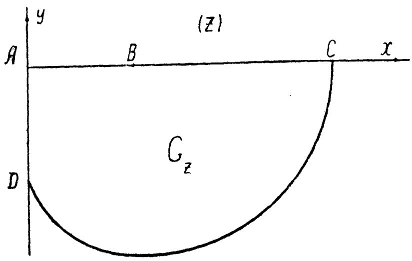

Рис. 1

Здесь величины x_B и v_* заданы, а параметры x_C и x_D должны быть определены при решении задачи, причем считается, что участок AD присутствует ($y_D < 0$).

Функция $f(x)$ выражает импульсное давление, создаваемое взрывом на границе заряда, и определяется формой последнего [2]. Пусть она удовлетворяет следующим ограничениям: $f(x_B) \geqslant 0$, $f(x)$—непрерывна; $f'(x)$— — кусочно дифференцируема, и у любой внутренней точки x_0 участка AB найдется проколотая окрестность $\check{U}_{x0}$, где (2) или $f'(x) \leqslant -v_*$, или $f'(x_2) \leqslant f'(x_1)$ при любых x_1, x_2 таких, что $x_2 > x_0 > x_1$, $x_1 x_2 \in \check{U}_{x0}$.

Эти условия, при существовании решения поставленной задачи, обеспечивают его соответствие принятой модели, то есть выполнение условия $\left|\frac{dw}{dz}\right| > v_*$ в G_z.

Для доказательства рассмотрим аналитическую в G_z функцию $\ln\left(\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right) - i\theta$ (θ — аргумент вектора скорости), применяя граничный принцип максимума поочередно к гармоническим функциям $\ln\left|\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right|$ и $\theta(x, y)$ и используя условия Коши — Римана. Сначала устанавливается, что значения θ на DC (кроме D и C) не являются максимальными или минимальными для G_z. Таким образом, на AD значение θ минимально, а на BC — максимально, т. е. значения $\ln\left|\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right|$ на этих участках положительны и растут от D к A и от C к B соответственно. Следовательно, если бы в G_z имелись точки, где $\left|\frac{dw}{dz}\right| < v_x$, то отрицательный минимум $\ln\left|\frac{1}{v^*}\frac{dw}{dz}\right|$ имел бы место в некоторой внутренней точке x_0 участка AB (причем не в точке разрыва $f'(x)$, где $\left|\frac{dw}{dz}\right| = \infty$). По принципу максимума $\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{z=x_0} < 0$, а по условию (2) в этой точке $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ неотрицательна и убывает с ростом x. Такое сочетание возможно лишь при $\theta > 0$. В силу непрерывности θ на AB, с учетом $Q|_{z=0} = -\frac{\pi}{2}$, левее точки x_0 на AB должна найтись точка x_1, где $\theta = 0$, т. е. $\left|\frac{dw}{dz}\right| = f'(x_1)$. Тогда с учетом (2) $\left|\frac{dw}{dz}\right| \Big|_{z=x_1} = f'(x_1) \leqslant f'(x_0) < \left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=x_0}$. Таким образом, минимум $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ и $\ln\left|\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right|$ не может иметь места в какой-либо точке даже на участке AB, и $\left|\frac{dw}{dz}\right| > v_*$ в G_z.

При дальнейшем исследовании используется свойство

$$\psi > 0 \text{ в } G_z. \tag{3}$$

Это неравенство, как нетрудно видеть, также обеспечивается условиями (2).

Будем обозначать символом Γ кривую CD.

Теорема. *Если заданы два распределения импульсного давления $f_0(x)$ и $f_1(x)$ на $[0, x_B]$, удовлетворяющие условиям* (2), *причем функция $f^*(x) = f_1(x) - f_0(x)$ неотрицательна и не возрастает на $[0, x_B]$, и задача* (1) *имеет решение для распределения $f_0(x)$, то задача имеет единственное решение и для распределения $f_1(x)$, при этом $G_{z0} \subset G_{z1}$, а кривые Γ_0 и Γ_1 не имеют общих точек (индексы $_0$ и $_1$ относятся к решениям для $f_0(x)$ и $f_1(x)$ соответственно).*

Доказательство вариационного свойства и единственности. Сначала предположим, что оба решения существуют, и докажем, что $G_{z0} \subset G_{z1}$.

При доказательстве методом „от противного" предположим существование совокупности Γ^- участков линии Γ_0, лежащих в G_{z1}, и введем функцию $w^*(z) = w_1(z) - w_0(z)$ в $G_z^* = G_{z0} \cap G_{z1}$.

Рассматривая Γ_0 и Γ_1 пока лишь как достаточно гладкие непроницаемые линии и используя условие (3), получим, что функция $w^* = \varphi^* + i\psi^*$ удовлетворяет краевым условиям: $\varphi^* = -f^*$ на AB; $\varphi^* = 0$ на BC^*; $\psi^* = 0$ на AD^*; $\psi^* < 0$ на Γ^-; $\psi^* > 0$ на Γ^+; $\psi^* = 0$ в точках пересечения Γ_0 и Γ_1. Обозначение Γ^+ принято для участков границы G_z^*, совпадающих с Γ_1, однако эти участки не обязательно имеются. За C^* и D^* обозначены те точки из C_0, C_1 и D_0, D_1 соответственно, которые принадлежат границе G_z^*.

Функцию w^* можно представить в виде суммы функций

$$w_2 = \varphi_2 + i\psi_2, \quad w_3 = \varphi_3 + i\psi_3, \quad w_4 = \varphi_4 + i\psi_4,$$

удовлетворяющих следующим краевым условиям на границе G_z^*:

$\varphi_2 = -\varphi^*$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ на AB; $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ на BC;
$\psi_2 = 0$ на AD^*C; $\psi_3 = \psi_4 = 0$ на AD^*; $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = \psi^* < 0$ на Γ^-; (4)
$\psi_3 = \psi^* > 0$, $\psi_4 = 0$ на Γ^+ (если Γ^+ отсутствуют, то $w_3 \equiv 0$).

Рассмотрим функцию w_4. По принципу максимума $\psi_4 < 0$ в G_z^*. На AD и Γ^+ имеет место максимум ψ_4 и $\frac{\partial \psi_4}{\partial n} < 0$, откуда $\frac{\partial \varphi_4}{\partial s} < 0$. Таким образом приращение φ_4 на AD и каждом из участков Γ^+ отрицательно. Так как $\varphi_4 = 0$ на ADC, то сумма приращений φ_4 на всех остальных участках границы G_z^*, т. е. на Γ^-, положительна. Обозначим это так: $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi_4 > 0$.

При рассмотрении w_2 и w_3 учтем, что значения и ψ_2, и ψ_3 на Γ^- являются минимальными, откуда, если $w_2 \neq 0$ и $w_4 \neq 0$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} > 0$ и $\frac{d\varphi_3}{ds} > 0$, т. е. $\sum\limits_{\Gamma^-} (\Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3) > 0$. Таким образом,

$$\sum_{\Gamma^-} \Delta\varphi^* = \sum_{\Gamma^-} (\Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_4) > 0. \tag{5}$$

Примем обозначение $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta s_1$ для суммы длин участков Γ^-, а $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta s_0$ — для суммы длин участков границы G_{z0}, лежащих вне $\overline{G}_z^*$, т. е. охватывающих соответствующие участки Γ^-. Если учесть, что на Γ_0 и Γ_1 $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = v_*$, то $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi_1 = v_* \cdot \sum\limits_{\Gamma^-} \Delta s_1$, $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi_0 \leqslant v_* \cdot \sum\limits_{\Gamma^-} \Delta s_0$. Неравенство здесь может иметь место, если точка D_0 лежит вне $\overline{G}_z^*$, так как $\frac{\partial \varphi_0}{\partial s} > v_*$ на D_0D_1. Отсюда должно следовать $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi^* = \sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi_1 - \sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi_0 \leqslant v_* \times (\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta s_1 - \sum\limits_{\Gamma^-} \Delta s_0)$. Вследствие выпуклости Γ_1 для каждого участка Γ^- имеет место $\Delta s_1 < \Delta s_0$, поэтому $\sum\limits_{\Gamma^-} \Delta \varphi^* < 0$. Но это противоречит (5), что доказывает невозможность существования участков Γ^-.

Точки касания кривых Γ_0 и Γ_1 (в том числе D и C) также не могут существовать, так как по принципу максимума в этих точках должно быть $\frac{\partial \psi^*}{\partial n} > 0$, т. е. $\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} > \frac{\partial \varphi_0}{\partial s}$, что противоречит условиям (1).

Единственность решения задачи (1) следует из этого доказательства, так как при $f_0(x) \equiv f_1(x)$ не могут существовать отличные друг от друга кривые Γ_0 и Γ_1.

Доказательство разрешимости. Будем считать задачу решенной, если известна функция $r(\alpha)$, описывающая в полярных координатах кривую DC (r — расстояние от точки A,

α — угол от направления AD). Ясно, что $r(\alpha) \in C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Как показано выше, $r_1(\alpha) > r_0(\alpha)$. Так как длина DC меньше $\frac{f(0)}{v_*}$, то $r_1(\alpha) < \frac{f_1(0)}{v_*}$. Обозначим T область $-\varepsilon + r_0(\alpha) < r(\alpha) < \frac{f_1(0)}{v_*}$ пространства $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $(0 < \varepsilon < \min[|y_{DO}|, \; x_{CO} - x_B])$.

Определим на $T \times [0,1]$ оператор $\Phi(r, \lambda)$ следующим образом. Если $r(\alpha) \in T$, то, считая $r(\alpha)$ уравнением кривой DC, ограничивающей некоторую область G_z, решим в G_z краевую задачу (1) при $f(x) = f_0(x) + \lambda[f_1(x) - f_0(x)]$, но задав на DC лишь одно условие $\psi = 0$. Найденное решение позволит построить область G_w в плоскости w и найти значения θ на участке AB ее границы. Очевидно, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ на AD, $\theta = \frac{\pi}{2}$ на BC. Дополнив эти условия условием $\ln\left|\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right| = 0$ на DC, решим в G_w краевую задачу относительно функции $\ln\left|\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right| - i\theta$. Восстановив $z(w)$ и определив соответствующую область в плоскости z, примем полярное уравнение нового участка DC за результат применения оператора $\Phi(r, \lambda)$. Заметим, что при выбранных условиях на границе G_w новый участок AB в плоскости z будет также прямолинейным и горизонтальным.

Последовательно просматривая действия, составляющие оператор $\Phi(r, \lambda)$, можно убедиться, что он непрерывен.

Для исследования компактности оператора Φ рассмотрим свойства множества, в которое он отображает замыкание $\overline{T}$ (при любых $\lambda \in [0, 1]$).

Из теории краевых задач известно (см., например, [4]), что для краевой задачи в G_w на участке DC вблизи точки D имеет место неравенство

$$\theta(\varphi) - \theta(\varphi_D) > N_0 \sqrt{\varphi - \varphi_D} \text{ при } \varphi_0 < \varphi < \varphi^*, \tag{6}$$

где N_0 и φ^* — некоторые, вообще говоря, связанные между собой постоянные, причем $\varphi_D < \varphi^*$, $0 < N < \infty$. Выберем φ^* одинаковым для всей области $\overline{T}$ и обозначим N_1 минимум N для всех $r(\alpha) \in \overline{T}$. Так как $\overline{T}$ замкнуто, то $0 < N_1 < \infty$.

Если s — дуговая абсцисса кривой $R(\alpha)$ $(R(\alpha) = \Phi(r, \; \lambda))$, то для любых двух точек справедливо

$$|R_2 - R_1| < |s_2 - s_1| = \frac{1}{v_0}|\varphi_2 - \varphi_1|. \tag{7}$$

Кроме того,

$$\alpha > \sin\alpha = \frac{x}{R} > \frac{xv_*}{f(0)} \qquad (8)$$

$$\text{и } x = \int_{\varphi_D}^{\varphi} \frac{dx}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_D}^{\varphi} \sin\theta d\varphi > \frac{\sin\theta(\varphi^*)}{\theta(\varphi^*)} \int_{\varphi_D}^{\varphi} \theta(\varphi)\, d\varphi.$$

Так как вследствие (6) справедливо

$\int_{\varphi_D}^{\varphi} \theta(\varphi)\, d\varphi > \frac{2N_1}{3} |\varphi - \varphi_D|^{3/2}$, то можно найти некоторую

оценку $x > N_2 |\varphi - \varphi_D|^{3/2}$, такую, что с учетом (8)

$$|\varphi - \varphi_D| < N_3 \alpha^{2/3}. \qquad (9)$$

Обозначим α^* минимум $\alpha(\varphi^*)$ для всех $r(\alpha) \in \overline{T}$. Из (9) следует, что $\alpha^* > 0$. Тогда для $0 < \alpha_1 < \alpha_r \leqslant \alpha^*$ справедливо

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \frac{v_* \cos\alpha^*}{f(0)} (x_2 - x_1). \qquad (10)$$

Так как

$$x_2 - x_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\theta(\varphi)\, d\varphi = \int_{\varphi_D}^{\varphi D + (\varphi_2 - \varphi_1)} \{\sin\theta[\varphi + (\varphi_1 - \varphi_2)] -$$

$$- \sin\theta(\varphi)\}\, d\varphi + \int_{\varphi_D}^{\varphi D + (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin\theta(\varphi)\, d\varphi,$$

а первый интеграл в правой части также положителен (из-за монотонности возрастания $\theta(\varphi)$), то с учетом (6) справедлива оценка $|x_2 - x_1| < N_2 |\varphi_2 - \varphi_1|^{3/2}$.

Таким образом, из (10) следует $|\varphi_2 - \varphi_1| < N_4 |\alpha_2 - \alpha_1|^{2/3}$, что вместе с (7) дает

$$|R_2 - R_1| < N_5 |\alpha_2 - \alpha_1|^{2/3} \text{ при } 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \alpha^*. \qquad (11)$$

Теперь рассмотрим промежуток $\alpha^* \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для наглядности используем геометрическое построение (рис. 2). Пусть некоторому значению α на графике некоторой функции $R(\alpha)$ соответствует точка K. График $R(\alpha)$ выпуклый (ибо $\theta(s)$ меняется монотонно), т. е. кривая на участке DK лежит „снаружи“ от прямой DK. Так как

$$\frac{dR}{d\alpha} < R(\alpha) \cdot \operatorname{ctg} \beta_k < \frac{f(0)}{v_*} \cdot \operatorname{ctg} \beta_{k_1} < \frac{f(0)}{v_*} \operatorname{ctg} \beta^*,$$

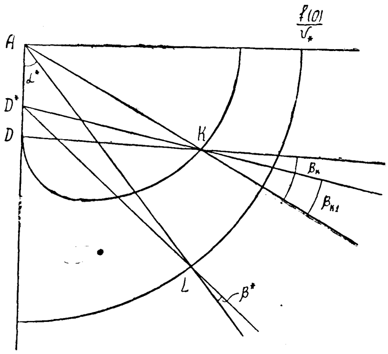

Рис. 2

то существует оценка

$$|R_2 - R_1| < N_6 |\alpha_2 - \alpha_1| \text{ при } \alpha^* \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (12)$$

Сопоставляя оценки (11) и (12), получим общую оценку

$$|R_2 - R_1| < N |\alpha_2 - \alpha_1|^{2/3} \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Из нее следует компактность множества функций $R(\alpha)$, т. е. компактность оператора $\Phi(r, \lambda)$

Таким образом, оператор $\Phi(r, \lambda)$ вполне непрерывен.

Для исследования разрешимости задачи (1) рассмотрим операторное уравнение $r = \Phi(r, \lambda)$. Ясно, что решение задачи (1) удовлетворяет этому уравнению при $\lambda = 1$.

Если бы существовало некоторое решение $r(\alpha)$ уравнения $r = \Phi(r, \lambda)$, не являющееся решением соответствующей краевой задачи, то это означало бы, что одной и той же области G_z, ограниченной кривой $r(\alpha)$, соответствуют две функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$, отображающие G_z на одну и ту же область G_w (функция $w_1(z)$ — решение краевой задачи в G_z, функция $w_2(z)$ определяется решением краевой задачи в G_w.) Однако при обоих отображениях точки A, C, D границы Q_z переходят в соответственно одинаковые точки границы G_w. По теореме Римана $w_1 \equiv w_2$, следовательно, $w_1(z)$ удовлетворяет всем краевым условиям (1).

Таким образом, уравнение $r = \Phi(r, 1)$ эквивалентно исходной задаче.

Из уже доказанных вариационных свойств следует, что вполне непрерывный оператор $\Phi(r, \lambda)$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ не имеет неподвижных точек на границе $\overline{T}$, поэтому векторные поля $r - \Phi(r, 0)$ и $r - \Phi(r, 1)$ гомотопны [5].

При $\lambda = 0$ решение по условию существует и известно. Для завершения доказательства разрешимости при $\lambda = 1$ остается доказать, что вращение поля $r - \Phi(r, 0)$ не равно нулю.

Пусть существует решение задачи для плоского заряда при $\varphi = -P$ на AB (может быть $P = f \cdot (x_B)$). Как было указано, эта задача решена в [1]. Повторением всех предшествующих рассуждений можно убедиться, что если вместо функции $f_1(x)$ взять функцию $f_0(x) - f_0(x_B) + P$, то вращение соответствующего векторного поля совпадает с вращением поля $r - \Phi(r, 0)$, причем область в пространстве $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ может быть выбрана или равной, или включающей $\overline{T}$.

Далее вместо $f_0(x)$ возьмем постоянную функцию, равную P (для нее решение существует). Аналогичным образом получим, что и для нее вращение векторного поля имеет то же самое значение, что и вращения всех рассмотренных ранее полей. Осталось убедиться, что вращение векторного поля при $f_1 = P$ не равно нулю.

Определим вспомогательный оператор $\Psi(r, \lambda)$ на некоторой области пространства $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, которой принадлежит решение для $f = P$, следующим образом. Решим в G_z, ограниченной кривой $r(\alpha)$, краевую задачу, когда на AB задано $\varphi = -P$, на остальных участках—обычные условия, причем на CD лишь условие $\psi = 0$, и построим G_w. Обозначим полученное значение φ в точке D через φ_{D1}. Пусть известному решению, когда $\left|\frac{dw}{dz}\right| = v_*$, $\psi = 0$ на CD, соответствует значение φ_{D0}. Тогда, решая, подобно второму этапу оператора Φ, краевую задачу для $\ln\left|\frac{1}{v_*}\frac{dw}{dz}\right|$ в полуполосе G_w, примем за значение φ в точке D значение $\varphi_D = \varphi_{D0} + \lambda(\varphi_{D1} - \varphi_{D0})$.

Оператор Ψ аналогично оператору Φ вполне непрерывен в топологическом произведении рассматриваемой области на $[0, 1]$.

Операторное уравнение $r = \Psi(r, \lambda)$ имеет единственное решение при всех λ. Действительно, любое решение, не совпадающее с нужным нам, являлось бы решением задачи для плоского заряда другой длины, т. е. при ином значении $\tilde{x}_B$ соответствующем

$$\tilde{\varphi}_D = \varphi_{D0} + \lambda(\varphi_{D1} - \varphi_{D0}). \tag{13}$$

Пусть, например, $\tilde{\varphi}_D > \varphi_{D0}$ (в противном случае знаки в нижеследующих неравенствах сменятся на обратные). Как известно из свойств решения задачи с плоским зарядом, в этом случае $\tilde{x}_B < x_B$. Однако, рассматривая в $\tilde{G}_z$ разность $\tilde{w}$ и w_1—результата выполнения в $\tilde{G}_z$ первого этапа оператора Ψ, убеждаемся, что $\varphi_{D1} < \tilde{\varphi}_D$. А это при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ противоречит (13).

Следовательно, вращение полей $r - \Psi(r, 0)$ и $r - \Psi(r, 1)$ одинаково. А так как $\Psi(r, 0)$ отображает все элементы рассматриваемой области в один, то вращение этих полей равно 1. Поскольку оператор $\Psi(r, 1)$ совпадает на данной области с оператором Φ для плоского заряда, то вращение всех построенных выше полей для оператора также равно 1.

Таким образом, теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. — ПМТФ, 1960, № 3.
2. Ильинский Н. Б., Салимов Р. Б. Задача о взрыве поверхностного заряда переменной толщины. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 12. Изд-во Казанского ун-та, 1975.
3. Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. Об одном случае взрыва симметричного поверхностного заряда переменной толщины. — ПМТФ, 1976, № 3.
4. Гахов Р. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., ГИТТЛ, 1956.

Доложено на семинаре 21 апреля 1976 г.

ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Вып. 14.

Редактор Ф. М. Абубакирова
Корректоры Л. С. Губанова, Л. В. Романова
Техн. редактор М. П. Скороходова

ИБ № 155

Сдано в набор 14/III-77 г.
Подписано в печать 12/XII-77 г.
ПФ 13346
Формат бумаги 60×90 1/16
Печ. л. 15,0
Уч.-изд. л. 13,5
Заказ В-228
Тираж 800 экз.
Цена без переплета 2 р. 02 к. Переплет 14 к.

Издательство
Казанского университета,
г. Казань, ул. Ленина, 4/5.

Полиграфкомбинат им. К. Якуба Управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров ТАССР,
г. Казань, ул. Баумана, 19.