АВГУСТ 1994 г., ТОМ 30, № 8

УДК 517.95+535.5

П. И. НАУМКИН, И. А. ШИШМАРЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ. II

1. Введение. В первой части настоящей работы [1] мы выявили связь между поведением при больших временах решений некоторого класса нелинейных нелокальных уравнений и решением уравнения Бенджамена—Оно—Бюргерса. Важным частным случаем рассмотренного класса нелинейных нелокальных уравнений является уравнение Кортевега—де Фриза—Бюргерса (КдФБ)

$$u_t+2uu_x-u_{xx}+(a/3)u_{xxx}=0. \tag{1.1}$$

В п. 2 [1] мы показали, что асимптотика при $t\to\infty$ в области $\chi=x/\sqrt{t}=O(1)$ решения $u(x,t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ совпадает (в главном члене) с асимптотикой при $t\to\infty$ решения $v(x,t)$ задачи Коши для уравнения Бюргерса

$$v_t+2vv_x-v_{xx}=0 \tag{1.2}$$

с тем же начальным условием $v(x,0)=u(x,0)=\bar{u}(x)$. Решение $v(x,t)$ находится с помощью преобразования Хопфа—Коула

$$v(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}\ln Z(x,t), \tag{1.3}$$

где функция $Z(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности и вычисляется с помощью функции Грина $G(x,t)=(2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp(-x^2/4t)$:

$$Z(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} dyG(x-y,t)\exp\Big(-\int_{-\infty}^{y}\bar{u}(\xi)\,d\xi\Big). \tag{1.4}$$

Если начальные данные $\bar{u}(x)$ таковы, что $U\equiv\int_{R_1}\bar{u}(x)\,dx\neq0$, $\int_{R_1}|\bar{u}(x)|\times(1+|x|)\,dx<\infty$, то асимптотика $v(x,t)$ при $t\to\infty$ равномерно по $\chi=x/\sqrt{t}\in R_1$ имеет вид

$$v(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial\chi}\ln H(\chi)+O\Big(\frac{1}{t}\Big), \tag{1.5}$$

где

$$H(\chi)=e^{-U/2}(\operatorname{ch}(U/2)-\operatorname{sh}(U/2)\operatorname{Erf}(\chi/2)), \tag{1.6}$$

$\operatorname{Erf}(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-q^2}dq$ — интеграл ошибок.

В настоящей работе найдем первые два члена асимптотики при $t\to\infty$ решения $u(x,t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ (1.1). Насколько нам известно, это первый случай, когда удалось найти в явном виде второй член асимптотики для решений нелинейного уравнения, не линеаризуемого с помощью замены переменных. Отметим, что в работах [2—4] получены оценки убывания в различных нормах решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза—Бюргерса с использованием преобразования Хопфа—Коула.

В п. 2 настоящей работы рассмотрим асимптотику при $t\to\infty$ решения задачи Коши для уравнения (1.1) в области $\chi=x/\sqrt{t}=O(1)$ и покажем, что она имеет вид

$$u(x,t)=(1/\sqrt{t})A(\chi)+((\ln t)/t)\tilde{A}(\chi)+O(\sqrt{\ln t}/t) \tag{1.7}$$

равномерно по $\chi\in R_1$. Величины $A(\chi)$ и $\tilde{A}(\chi)$ в явной форме представлены в п. 2. Интересно отметить, что начальное условие $\bar{u}(x)$ входит в выражения для A и $\tilde{A}$ лишь в виде интеграла $\int\limits_{R_1}\bar{u}(x)\,dx$.

Хотя асимптотика (1.7) формально справедлива равномерно по $\chi\in R_1$ при $t\to\infty$, однако коэффициенты $A(\chi)$ и $\tilde{A}(\chi)$ сами быстро стремятся к нулю при $\chi\to\infty$, так что при $\chi\to\infty$ остаточный член в (1.7) становится больше главного, т. е. в действительности асимптотика (1.7) имеет смысл в области $\chi=O(1)$, $t\to\infty$. Поэтому в п. 3 изучена асимптотика решения задачи Коши для уравнения (1.1) в области $\chi\to\infty$, $t\to\infty$. Эта асимптотика имеет квазилинейный характер, определяемый уравнением $v_t-v_{xx}+(a/3)v_{xxx}=0$, а вклад нелинейности учитывается видом коэффициентов в асимптотической формуле. Точный вид асимптотики довольно громоздок и приведен в п. 3 (см. формулы (3.3)—(3.5)).

2. Асимптотика в области $t\to\infty$, $x/\sqrt{t}=O(1)$. Целью настоящего пункта является вычисление второго члена асимптотики при $t\to\infty$, $\chi=x/\sqrt{t}=O(1)$ решения $u(x,t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ (1.1). Разность $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$, где $v(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения Бюргерса (1.2), удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$w_t+\frac{\partial}{\partial x}(w(w+2v))-w_{xx}+(a/3)w_{xxx}+(a/3)v_{xxx}=0, \tag{2.1}$$

$$w|_{t=0}=0. \tag{2.2}$$

Проводя эвристические рассуждения так же, как в п. 1 [1], сравнивая порядки убывания различных членов в уравнении (2.1), видим, что главный член асимптотики при $t\to\infty$ функции $w(x,t)$ должен описываться следующей линейной задачей Коши:

$$f_t+2\frac{\partial}{\partial x}(fv)-f_{xx}+(a/3)v_{xxx}=0,\quad f|_{t=0}=0. \tag{2.3}$$

Чтобы избавиться от второго слагаемого в уравнении (2.3), проинтегрируем (2.3) по x и сделаем замену $\int\limits_{-\infty}^{x}f(y,t)\,dy=g(x,t)/Z(x,t)$, получим

$$g_t-g_{xx}+(a/3)Zv_{xx}=0,\quad g|_{t=0}=0, \tag{2.4}$$

так как функция $Z(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности $Z_t=Z_{xx}$ и дается формулой (1.4). Уравнение (2.4) легко проинтегрируем:

$$g(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R_1}dy\,G(x-y,t-\tau)F(y,\tau), \tag{2.5}$$

где $F(y,t)=-\dfrac{a}{3}Z(y,t)v_{(2)}(y,t)$, $v_{(l)}(y,t)\equiv\dfrac{\partial^l v(y,t)}{\partial y^l}$, $l=0,1,2,\ldots$

В следующей лемме вычислим асимптотику при $t\to\infty$ функции

$$f(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g(x,t)}{Z(x,t)}\right)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R_1}dy\,(G_{(1)}(x-y,t-\tau)+$$

$$+G(x-y,t-\tau)v(x,t))F(y,\tau)Z^{-1}(x,t) \tag{2.6}$$

(индекс снизу означает дифференцирование по пространственной переменной).

Лемма 1. *Пусть* $\bar{u}(x)\in W_1^2(R_1)$*), $x\bar{u}(x)\in L_1(R_1)$. *Тогда при* $t\to\infty$ *равномерно по* $\chi=x/\sqrt{t}\in R_1$ *справедлива асимптотика*

$$f(x,t)=\tilde{A}(\chi)(\ln t)/t+O(\sqrt{\ln t}/t), \tag{2.7}$$

где

$$\tilde{A}(\chi)=-\frac{ae^{-\chi^2/4}}{12\sqrt{\pi}H(\chi)}\left(A(\chi)-\frac{\chi}{2}\right)\int\limits_{R_1}H(q)A^3(q)dq,$$

$$A(q)=-\frac{\partial}{\partial q}\ln H(q),\quad H(q)=e^{-U/2}(\operatorname{ch}(U/2)-\operatorname{sh}(U/2)\operatorname{Erf}(q/2)).$$

Доказательство. Разобьем интеграл по τ в формуле (2.6) на три части ($t>e$):

$$\int\limits_0^t d\tau=\int\limits_0^1+\int\limits_{t/\ln t}^t+\int\limits_1^{t/\ln t}\equiv I_1+I_2+I_3. \tag{2.8}$$

Для всех $x\in R_1$ и $t>0$: $0<c_1<Z(x,t)<c_2$ и, кроме того, при всех $t>0$ выполнены неравенства

$$\|Z_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_\infty}\leqslant c(1+t)^{-l/2},\quad \|Z_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_1}\leqslant c(1+t)^{(1-l)/2},\ l=1,2,3,$$
$$\|G_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_\infty}\leqslant ct^{-(l+1)/2},\quad \|G_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_1}\leqslant ct^{-l/2},\ l=0,1,2,$$
$$\|v_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_\infty}\leqslant c(1+t)^{-(l+1)/2},\quad \|v_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_1}\leqslant c(1+t)^{-l/2},\ l=0,1,2; \tag{2.9}$$

здесь и всюду далее через c обозначаем различные положительные постоянные. Ввиду (2.9) первый и второй интегралы в (2.8) легко оцениваются

$$|I_1|\leqslant\frac{c}{t}\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{R_1}|v_{(2)}(y,\tau)|dy=O\left(\frac{1}{t}\right),\ t\to\infty, \tag{2.10}$$

$$|I_2|\leqslant\int\limits_{t/\ln t}^t d\tau\|v_{(2)}\|_{L_\infty}(\|G_{(1)}\|_{L_1}+\|v\|_{L_\infty}\|G\|_{L_1})\leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_{t/\ln t}^t d\tau\,\tau^{-3/2}((t-\tau)^{-1/2}+t^{-1/2})=O\left(\frac{\sqrt{\ln t}}{t}\right),\ t\to\infty. \tag{2.11}$$

В интеграле I_3 проинтегрируем по частям по y:

$$I_3=\int\limits_1^{t/\ln t}d\tau\int\limits_0^\infty dy\Lambda_y(x,y,t,\tau)\int\limits_y^\infty F(q,\tau)dq-$$
$$-\int\limits_1^{t/\ln t}d\tau\int\limits_{-\infty}^0 dy\Lambda_y(x,y,t,\tau)\int\limits_{-\infty}^y F(q,\tau)dq+$$
$$+\int\limits_1^{t/\ln t}d\tau\Lambda(x,0,t,\tau)\int\limits_{R_1}dyF(y,\tau)dy\equiv I_4+I_5+I_6,$$

где $\Lambda(x,y,t,\tau)=Z^{-1}(x,t)(G_{(1)}(x-y,t-\tau)+v(x,t)G(x-y,t-\tau))$. Поскольку

$$\sup_{\substack{x\in R_1,\,y\in R_1\\ 1\leqslant\tau\leqslant\frac{t}{\ln t}}}|\Lambda_y(x,y,t,\tau)|\leqslant ct^{-3/2},\ \|xZ_{(l)}(x,t)\|_{L_1(R_1)}\leqslant c(1+t)^{(2-l)/2},\ l=1,2,3,$$

*) $W_p^l(R_1)$ — пространство Соболева функций из $L_p(R_1)$, производные до l-го порядка которых также принадлежат $L_p(R_1)$.

и поэтому $\|xv_{(2)}(x,t)\|_{L_1(R_1)} \leqslant c(1+t)^{-1/2}$, то для I_4 получим

$$|I_4| \leqslant ct^{-3/2} \int_1^{t/\ln t} d\tau \int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} |v_{(2)}(q,\tau)|\,dq = O(t^{-1}). \qquad (2.12)$$

Аналогично оценивается интеграл I_5. Пользуясь равенствами $G_{(l)}(x, t-\tau) = G_{(l)}(x,t) + O(\ln^{-1} t \cdot t^{-(l+1)/2})$, $l=0, 1$, справедливыми при $1 \leqslant \tau \leqslant t/\ln t$, получим

$$I_6 = \frac{1}{H(\chi)}\left(G_{(1)}(x,t) + \frac{A(\chi)}{\sqrt{t}} G(x,t)\right) \int_1^{t/\ln t} d\tau \int_{R_1} F(y,\tau)\,dy + O(t^{-1}), \qquad (2.13)$$

так как

$$Z_{(l)}(x,t) = t^{-l/2}\left(\frac{d^l H(\chi)}{d\chi^l} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right), \quad l=0, 1, 2, 3. \qquad (2.14)$$

Интегрирование по частям с учетом равенства $Z_{(1)} = -Zv$ в силу (2.14) дает

$$\int_{R_1} F(y,\tau)\,dy = -\frac{a}{6} \int_{R_1} v^3(y,\tau) Z(y,\tau)\,dy =$$

$$= -\frac{a}{6\tau} \int_{R_1} A^3(y) H(y)\,dy + O(\tau^{-3/2}).$$

Поэтому из (2.13) ввиду оценок (2.10)—(2.12) приходим к асимптотике (2.7). Лемма 1 доказана.

Для остатка $\psi(x,t) = w(x,t) - f(x,t)$ из (2.1)—(2.3) получаем задачу Коши

$$\psi_t + 2\frac{\partial}{\partial x}(v\psi) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi+f)^2 - \psi_{xx} + \frac{a}{3}(\psi+f)_{xxx} = 0,$$

$$\psi|_{t=0} = 0. \qquad (2.15)$$

Чтобы устранить второе слагаемое в уравнении (2.15), проинтегрируем его по x и введем новую функцию $r(x,t) = Z(x,t) \int_{-\infty}^{x} \psi(y,t)\,dy$, найдем

$$r_t - r_{xx} + Z((Z^{-1}(g+r))_x)^2 + (aZ/3)(Z^{-1}(g+r))_{xxx} = 0, \quad r|_{t=0} = 0, \qquad (2.16)$$

где функция $g(x,t)$ определена выше в (2.5). Оценки функции $r(x,t)$ даны в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть $\bar{u}(x) \in W_1^2(R_1) \cap W_2^5(R_1)$, $x\bar{u}(x) \in L_1(R_1)$, причем норма $\bar{u}(x)$ в этих пространствах достаточно мала.*

Тогда при $t \to \infty$ имеют место оценки

$$r_{(l)}(x,t) = O(t^{-1/2-l/2}), \quad l=0, 1, \qquad (2.17)$$

где $r_{(l)} = \dfrac{\partial^l r}{\partial x^l}(x,t)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий леммы вытекают оценки ($t \geqslant 0$)·

$$\left\|\frac{\partial^l Z^{\pm 1}}{\partial x^l}(x,t)\right\|_{L_\infty} \leqslant \varepsilon^9 (1+t)^{-l/2}, \quad l=1, 2, 3, \qquad (2.18)$$

$$\|g_{(l)}\|_{L_2}^2 \leqslant \varepsilon^9 (1+t)^{-1/2-l} \ln^2(1+t), \quad l=0, 1, 2, 3, \qquad (2.19)$$

где $g_{(l)}(x,t)=\dfrac{\partial^l g(x,t)}{\partial x^l}$, величина $\varepsilon>0$ достаточно мала (она зависит от малости начальных данных $\bar{u}(x)$).

Действительно, в силу (2.10) имеем при $t\geqslant 1$

$$\|Z_{(l)}\|_{L_\infty}=\|\int_{R_1} dy G_{(l-1)}(x-y,t)\bar{u}(y)\exp\left(-\int_{-\infty}^{y}\bar{u}(\eta)d\eta\right)\|_{L_\infty}\leqslant$$

$$\leqslant\|G_{(l-1)}\|_{L_\infty}\|\bar{u}\|_{L_1}\leqslant\varepsilon^9(1+t)^{-l/2},\quad l=1,2,3.$$

Вторая оценка в (2.18) для Z^{-1} получается аналогично. При доказательстве оценки (2.19) достаточно рассмотреть случай $t>1$. Представим $g_{(l)}$, $l=0,1,2,3$, в виде

$$g_{(l)}(x,t)=\int_0^{t/2} d\tau\int_{R_1} dy G_{(l)}(x-y,t-\tau)F(y,\tau)+$$

$$+\int_{t/2}^{t} d\tau\int_{R_1} dy G(y,t-\tau)F_{(l)}(x-y,\tau).$$

Отсюда, пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\|g_{(l)}\|_{L_2}\leqslant\int_0^{t/2} d\tau\|G_{(l)}(\cdot,t-\tau)\|_{L_2}\|F(\cdot,\tau)\|_{L_1}+$$

$$+\int_{t/2}^{t} d\tau\|G(\cdot,t-\tau)\|_{L_1}\|F_{(l)}(\cdot,\tau)\|_{L_2}=I_1+I_2.$$

Первый интеграл в силу неравенств ($l=0,1,2,3$) $\|G_{(l)}\|_{L_2}\leqslant ct^{-(1+2l)/4}$, $\|F(\cdot,t)\|_{L_1}\leqslant\varepsilon^9(1+t)^{-1}$ оценим следующим образом:

$$I_1\leqslant c\varepsilon^9\int_0^{t/2} d\tau(t-\tau)^{-(1+2l)/4}(1+\tau)^{-1}\leqslant c\varepsilon^9(1+t)^{-(1+2l)/4}\ln(1+t).$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся неравенствами (2.9) с учетом малости начального условия $\bar{u}(x)$: $\|Z_{(l+1)}\|_{L_\infty}\leqslant\varepsilon^9(1+t)^{-l/2}$, $l=0,1,2$, $\|Z_{(l+1)}\|_{L_2}\leqslant\|G_{(l)}\|_{L_2}\|\bar{u}\|_{L_1}\leqslant\varepsilon^9(1+t)^{-(1+2l)/4}$, $l=0,1,2,3,4,5$, $t\geqslant 1$. Так что при $l=0,1,2,3$ $\|F_{(l)}(\cdot,t)\|_{L_2}\leqslant c\varepsilon^9(1+t)^{-(5+2l)/4}$, и поэтому

$$I_2\leqslant c\varepsilon^9\int_{t/2}^{t} d\tau(1+\tau)^{-(5+2l)/4}\leqslant c\varepsilon^9(1+t)^{-(1+2l)/4}.$$

Таким образом, приходим к оценке (2.19).

Докажем теперь при всех $t\geqslant 0$ следующие неравенства:

$$J_l(t)\equiv\int_{R_1} r_{(l)}^2(x,t)dx<\varepsilon^3(1+t)^{-(1+2l)/2},\quad l=0,1,2,3,\tag{2.20}$$

$$r_0(t)\equiv\sup_{p\in R_1}|\hat{r}(p,t)|<\varepsilon^2,\tag{2.21}$$

где $\hat{r}(p,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}r(x,t)dx$ — преобразование Фурье функции $r(x,t)$.

Будем рассуждать от противного. Пусть $T>0$ — первый момент времени, когда нарушается хотя бы одна из оценок (2.20), (2.21). В силу непрерывности по t на $[0,T]$ получим

$$J_{(l)}(t)\leqslant\varepsilon^3(1+t)^{-l-1/2},\ l=0,1,2,3;\ r_0(t)\leqslant\varepsilon^2.\tag{2.22}$$

Умножим уравнение (2.16) на r и проинтегрируем по x по R_1, найдем

$$\dot{J}_0+2J_1+\frac{2a}{3}\int_{R_1} dxr(Z^{-1}(g+r))_{(3)}Z+2\int_{R_1} dxrZ(((g+r)/Z)_x)^2=0.$$

Отсюда ввиду (2.18), (2.19) и (2.22) получим

$$\dot{J}_0+2J_1\leqslant\varepsilon^5(1+t)^{-3/2}, \tag{2.23}$$

поскольку $\varepsilon>0$ мало. Продифференцировав равенство (2.16) по x трижды, умножив на $r_{(3)}$ и проинтегрировав по x по R_1, найдем

$$\dot{J}_3+2J_4+\frac{2a}{3}\int_{R_1} r_{(3)}(Z((g+r)/Z)_{(3)})_{(3)}dx+$$
$$+2\int_{R_1} r_{(3)}(Z(((g+r)/Z)_x)^2)_{(3)}dx=0. \tag{2.24}$$

Слагаемые со старшими производными в интегралах в левой части равенства (2.24) с помощью интегрирования по частям оцениваются величиной J_4, так что из (2.24) в силу (2.18), (2.19) и (2.22) найдем

$$\dot{J}_3\leqslant -J_4+\varepsilon^4(1+t)^{-9/2}, \tag{2.25}$$

опять-таки в силу малости $\varepsilon>0$. Благодаря теореме Планшереля и неравенству (2.22) оценим интегралы J_1 и J_4 следующим образом ($l=0, 3$):

$$J_{l+1}=\frac{1}{2\pi}\int_{R_1}|\hat{r}(p,t)|^2p^{2l+2}dp>\frac{1}{2\pi}\int_{|p|\geqslant 2(1+t)^{-1/2}}|\hat{r}(p,t)|^2p^{2l+2}dp\geqslant$$
$$\geqslant\frac{4J_l}{1+t}-\varepsilon^4(1+t)^{-l-3/2}. \tag{2.26}$$

Подстановка (2.26) в (2.23) и (2.25) дает ($l=0, 3$) $\dot{J}_l<-4J_l/(1+t)+$ $+2\varepsilon^4(1+t)^{-l-3/2}$, откуда, интегрируя по t и учитывая неравенство $J_l\leqslant$ $\leqslant J_0^{1-l/3}J_3^{l/3}$ при $l=1, 2$, получим (2.20) при всех $t\in[0, T]$.

Докажем теперь (2.21). Применим преобразование Фурье к уравнению (2.16):

$$\hat{r}_t(p,t)+p^2\hat{r}(p,t)-\frac{ia}{3}p^3\hat{r}(p,t)+\int_{R_1}dxe^{-ipx}Z((Z^{-1}(g+r))_x)^2-$$
$$-\frac{ia}{3}p^3\hat{g}(p,t)+a\int_{R_1}dxe^{-ipx}\{v(g+r)_{xx}+(v^2+v)(g+r)_x+$$
$$+(vv_x+v_{xx}/3+v^3/3)(g+r)\}=0,\ \hat{r}(p,0)=0, \tag{2.27}$$

откуда, интегрируя по t, находим

$$\hat{r}(p,t)=-\int_0^t d\tau e^{-(p^2-(ia/3)p^3)(t-\tau)}\Big(-\frac{ia}{3}p^3\hat{g}(p,\tau)+$$
$$+\int_{R_1}dxe^{-ipx}\{Z((Z^{-1}(g+r))_x)^2+a(v(g+r)_{xx}+(v^2+v_x)(g+r)_x+$$
$$+(vv_x+v_{xx}/3+v^3/3)(g+r))\}\Big). \tag{2.28}$$

Учитывая оценку $|p\hat{g}(p,t)|\leqslant\|g_{(1)}\|_{L_1}\leqslant\varepsilon^9$, из (2.28), применяя в интеграле по x неравенство Коши, в силу (2.18), (2.19), (2.22) получаем оценку (2.21). Полученное противоречие доказывает оценки (2.20) и (2.21) для всех $t\geqslant 0$. Из оценки (2.20) и неравенства $\|r_{(l)}\|_{L_\infty}\leqslant(4J_lJ_{l+1})^{1/2}$, $l=0, 1$, вытекают требуемые неравенства (2.17). Лемма 2 доказана.

Оценки (2.17) показывают, в частности, что

$$\psi(x,t)=O(1/t). \tag{2.29}$$

Сопоставляя (2.7) и (2.29), видим, что второй член асимптотического разложения при $t\to\infty$, $\chi=O(1)$ для решения $u(x,t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ определяется решением $f(x, t)$ задачи (2.3). Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\bar{u}(x) \in W_1^2(R_1) \cap W_2^5(R_1)$, $x\bar{u}(x) \in L_1(R_1)$ и нормы $\|\bar{u}\|_{W_1^2}$, $\|\bar{u}\|_{W_2^5}$ и $\|x\bar{u}\|_{L_1}$ достаточно малы, а величина $U = \int_{R_1} \bar{u}dx \neq 0$.*

Тогда при $t \to \infty$ равномерно по $\chi = x/\sqrt{t} \in R_1$ для решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ (1.1) с начальным условием $\bar{u}(x)$ справедлива асимптотическая формула (1.7): $u(x, t) = A(\chi)(1/\sqrt{t}) + \tilde{A}(\chi) \times \times \frac{\ln t}{t} + O\left(\frac{\sqrt{\ln t}}{t}\right)$, где $A(\chi) = \left(\operatorname{sh}\frac{U}{2} / \sqrt{\pi}H(\chi)\right) e^{-\chi^2/4}$,

$$\tilde{A}(\chi) = -\frac{a(A(\chi) - \chi/2)e^{-\chi^2/4}}{12\sqrt{\pi}H(\chi)} \int_{R_1} A^3(q)H(q)dq, \quad H(q) =$$

$$= e^{-U/2}(\operatorname{ch}(U/2) - \operatorname{sh}(U/2)\operatorname{Er}f(q/2)).$$

3. Асимптотика в области $t \to \infty$, $x/\sqrt{t} \to \infty$. В этом пункте изучим асимптотику при $t \to \infty$, $\chi = x/\sqrt{t} \to \infty$ решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (1.1). Будем считать для определенности, что $a > 0$ в уравнении КдФБ (этого легко можно достичь с помощью замены $u(x, t) = -\tilde{u}(-x, t)$). При больших значениях χ решение линеаризованного уравнения (1.1) сильно диспергирует и может быть найдено с помощью метода перевала. По сравнению с рассмотренным в предыдущем пункте случаем $\chi = O(1)$, когда нелинейность имела тот же порядок убывания по времени, что и линейная часть в уравнении, в случае $\chi \to \infty$ решение $u(x, t)$ обретает дополнительное убывание, приводящее к тому, что нелинейный член в уравнении КдФБ оказывается подчиненным линейной части. Поэтому асимптотика решения $u(x, t)$ имеет квазилинейный характер. Целью п. 3 является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть Фурье-образ $\hat{\bar{u}}(p)$ начального условия $\bar{u}(x)$ аналитичен в области $\operatorname{Im} p \geqslant -1/a$, $a > 0$, и удовлетворяет оценке*

$$\left|\frac{d^l\hat{\bar{u}}(p)}{dp^l}\right| \leqslant \varepsilon M^{-8}(p) e^{b\mu(p)}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

где $b > 0$, $0 < \varepsilon < c$, $c > 0$ — некоторая постоянная,

$$M(p) = \max(1, |p|), \quad \mu(p) = \eta^2(1 + a\eta/3), \quad \eta = \operatorname{Im} p. \tag{3.2}$$

Тогда при $t \to \infty$, $\chi \to \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы:

1) при $X \equiv x/t > 0$ или $-1/a < X < 0$

$$u(x, t) = \frac{e^{-\nu t}}{\sqrt{t}}\left(A(i\sigma) + \frac{1}{t}\tilde{A}(i\sigma) + O\left(\frac{e^{b\mu(i\sigma)}}{t^{3/2}m^8(\sigma)m^5(1 + a\sigma)}\right)\right), \tag{3.3}$$

где $\sigma = (\sqrt{1 + aX} - 1)/a$, $\nu = (2/3a^2)((1 + aX)^{3/2} - 1 - 3aX/2)$;

2) при $X = -1/a$

$$u(x, t) = \frac{e^{-t/3a^2}}{t^{1/3}}\left(A\left(-\frac{i}{a}\right) + t^{-1/3}\tilde{A}\left(-\frac{i}{a}\right) + O(t^{-2/3}\ln t)\right); \tag{3.4}$$

3) при $X < -1/a$

$$u(x, t) = \frac{e^{-\omega t}}{\sqrt{t}}\left(\operatorname{Re}\left(A\left(\beta - \frac{i}{a}\right) e^{i\pi/4 - 2ia\beta^3 t/3}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{t}\operatorname{Re}\left(\tilde{A}\left(\beta-\frac{i}{a}\right)e^{3i\pi/4-2ia\beta^3t/3}\right)+O\left(\frac{\ln t}{t^{3/2}m^2(\beta)}\right)\right), \quad (3.5)$$

где $\omega=-2/(3a^2)-X/a$, $\beta=(1/a)\sqrt{-1-aX}>0$. *Коэффициенты* A *и* $\tilde{A}$ ***выражаются через Фурье-образ*** $\hat{\bar{u}}(p)$ ***начального условия*** $\bar{u}(x)$ ***(см. формулы (3.25), (3.26), (3.30), (3.31), (3.37) и (3.38)).***

Замечание. Условие (3.1) теоремы означает, что начальное возмущение $u(x)$ должно достаточно быстро убывать на бесконечности и иметь некоторую гладкость (достаточно, например, потребовать, чтобы $\bar{u}(x)\in C_0^\infty(R_1)$).

Доказательство теоремы 2. Применив преобразование Фурье к уравнению (1.1) и проинтегрировав по t, получим

$$\hat{u}(p,t)=\hat{\bar{u}}(p)e^{-K(p)t}-ip\int_0^t d\tau e^{-K(p)(t-\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}dq\hat{u}\left(\frac{p}{2}-q,\tau\right)\hat{u}\left(\frac{p}{2}+q,\tau\right), \quad (3.6)$$

где $K(p)=p^2-(ia/3)p^3$. Обозначим $\hat{\bar{u}}(p)=\varepsilon\tilde{u}(p)$ и запишем решение $\hat{u}(p,t)$ в виде ряда теории возмущений $\hat{u}(p,t)=\sum_{N=0}^{\infty}\varepsilon^{N+1}u^{(N)}(p,t)$, где функции $u^{(N)}(p,t)$ определяются рекуррентно ($N\geqslant 1$):

$$u^{(0)}(p,t)=\tilde{u}(p)e^{-K(p)t}, \quad (3.7)$$

$$u^{(N)}(p,t)=-ip\int_0^t d\tau e^{-K(p)(t-\tau)}\int_{R_1}dq\sum_{j=1}^{N}u^{(j-1)}\left(\frac{p}{2}-q,\tau\right)\times$$
$$\times u^{(N-j)}\left(\frac{p}{2}+q,\tau\right). \quad (3.8)$$

Из формул (3.7) и (3.8) по индукции легко заключаем, что все функции $u^{(N)}(p,t)$ аналитичны в области $\operatorname{Im}p\geqslant -1/a$ при всех $N\geqslant 0$, ибо начальная функция $\tilde{u}(p)$ является таковой по условию теоремы.

Докажем при $\operatorname{Im}p\geqslant -1/a$ следующие оценки:

$$|u^{(N)}(p,t)|\leqslant c^N h^{(N)}(p,t)\,(1+|p|\theta(-1-2a\eta)), \quad (3.9)$$

где $h^{(N)}(p,t)=M^{-8}(p)(N+1)^{-8}\exp(\mu(p)(t+b)-t\varkappa_N(p))$, $\varkappa_N(p)=$ $=\rho^2(N+1)^{-2}m(1+a\eta)/2$, $m(p)=\min(1,|p|)$, $M(p)$ и $\mu(p)$ определены в (3.2), $\eta=\operatorname{Im}p$, $\rho=\operatorname{Re}p$, $\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ — функция Хевисайда. Через $c>0$ здесь и далее обозначены различные постоянные, не зависящие от N. Заметим, что $\operatorname{Re}K(p)=\rho^2(1+a\eta)-\mu(p)\geqslant 2\varkappa_0(p)-\mu(p)$, поэтому при $N=0$ оценки (3.9) следуют из условий (3.1) и (3.7). При $N\geqslant 1$ по индукции найдем

$$|u^{(N)}(p,t)|\leqslant c^{N-1}J, \quad (3.10)$$

где

$$J=|p|\int_{R_1}dq\sum_{j=1}^{N}(N+1-j)^{-8}j^{-8}M^{-8}(p/2-q)M^{-8}(p/2+q)\times$$
$$\times\exp(\mu(p/2-q)b+\mu(p/2+q)b)I,$$

$$I=\int_0^t d\tau\exp(-2\varkappa_0(p)t+\mu(p)(t-\tau)+\mu(p/2-q)\times$$
$$\times\tau+\mu(p/2+q)\tau+\mathscr{L}\tau),$$

$$\mathscr{L}=2\varkappa_0(p)-\varkappa_{j-1}(p/2-q)-\varkappa_{N-j}(p/2+q).$$

При всех комплексных $p=\rho+i\eta$, $\eta\geqslant-1/a$ имеем

$$2\mu(p/2)\leqslant\mu(p)-\eta^2/4 \tag{3.11}$$

и для всех $q\in R_1$, $N\geqslant1$, $1\leqslant j\leqslant N$ $M^{-8}(p/2-q)M^{-8}(p/2+q)\leqslant2^8\times\times M^{-8}(p)(M^{-8}(p/2-q)+M^{-8}(p/2+q))$, $(N+1-j)^{-8}j^{-8}\leqslant2^8(N+1)^{-8}((N+1-j)^{-8}+j^{-8})$, поэтому для J найдем

$$J\leqslant4^8M^{-8}(p)(N+1)^{-8}\sum_{j=1}^{N}((N+1-j)^{-8}+j^{-8})e^{\mu(p)(t+b)}\times$$
$$\times|p|\int_{R_1}dq(M^{-8}(p/2+q)+M^{-8}(p/2-q))I_1, \tag{3.12}$$

где

$$I_1=\int_0^t d\tau\exp(-2\varkappa_0(p)t-\eta^2\tau/4+\mathscr{L}\tau).$$

Для функции $\varkappa_N(p)$ справедливо неравенство

$$\varkappa_{j-1}(p/2-q)+\varkappa_{N-j}(p/2+q)\geqslant\varkappa_N(p) \tag{3.13}$$

при всех $q\in R_1$, $N\geqslant1$, $1\leqslant j\leqslant N$, $p=\rho+i\eta$, $\eta\geqslant-1/a$. Пользуясь (3.13), получим (см. подробнее в [1] формулу (2.18))

$$|I_1|\leqslant\frac{c\exp(-\varkappa_N(p)t)}{\max(\varkappa_0(p),\eta^2,|\mathscr{L}|)}. \tag{3.14}$$

При $\eta\geqslant-1/(2a)$ знаменатель в (3.14) оценим следующим образом:

$$\max(\varkappa_0(p),\eta^2,|\mathscr{L}|)\geqslant c\max((N+1-j)^{-2},j^{-2})(|p|^2+q^2), \tag{3.15}$$

поэтому из (3.12) при $\eta\geqslant-1/(2a)$ найдем

$$J\leqslant cM^{-8}(p)(N+1)^{-8}\exp(\mu(p)(t+b)-\varkappa_N(p)t)\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{N}((N+1-j)^{-6}+j^{-6})\int_{R_1}|p|(|p|^2+q^2)^{-1}dq\leqslant ch^{(N)}(p,t). \tag{3.16}$$

Из (3.16) и (3.10) следует (3.9) при $\eta\geqslant-1/(2a)$ (т. е. первое слагаемое в правой части (3.9)). Второе слагаемое в оценке (3.9) возникает в области $-1/a\leqslant\eta\leqslant-1/(2a)$, поскольку знаменатель в (3.14) оценивается снизу следующим образом: $\max(\varkappa_0(p),\eta^2,|\mathscr{L}|)\geqslant c$. Итак, оценка (3.9) установлена.

Теперь докажем оценку для производных

$$\left|e^{-K(p)t}\frac{\partial^l}{\partial p^l}(u^{(N)}(p,t)e^{K(p)t})\right|\leqslant c^{N+1}h^{(N)}(p,t)m^{-2l}(\eta)M^{2l}(p)\times$$
$$\times(1+|p|\theta(-1-2a\eta)),\quad l=1,2,3,\quad\eta\geqslant-1/a. \tag{3.17}$$

Достаточно рассмотреть только третью производную. Проведем индукцию по $N\geqslant0$. При $N=0$ оценка (3.17) следует из (3.7) и (3.1). При $N\geqslant1$ продифференцируем трижды по p равенство (3.8), после несложных вычислений получим при $p=\rho+i\eta$, $\eta\geqslant-1/a$

$$\left|e^{-K(p)t}\frac{\partial^3}{\partial p^3}(u^{(N)}(p,t)e^{K(p)t})\right|\leqslant c^N\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\tau e^{-(2\varkappa_0(p)-\mu(p))(t-\tau)}\times$$
$$\times\int_{R_1}dqh^{(N-j)}(p/2+q,\tau)h^{(j-1)}(p/2-q,\tau)[1+|p|(M^2(p/2-q)+$$
$$+M^2(p/2+q))(\tau+m^{-2}(\eta))](M^4(p/2-q)+$$
$$+M^4(p/2+q))(\tau^2+m^{-4}(\eta)). \tag{3.18}$$

Как и выше, интеграл по τ оценим следующим образом:

$$I_2 \equiv \int_0^t d\tau\, \tau^l \exp(-2\varkappa_0(p)t + \mathscr{L}\tau - \eta^2\tau/4) \leqslant c/\max(\varkappa_0^{l+1}(p), \eta^{2l+2}, |\mathscr{L}|^{l+1}).$$

Для слагаемого в формуле (3.18), содержащего единицу, применим оценку $I_2 \leqslant cm^{-2l-2}(\eta)$, а для второго слагаемого, содержащего $|p|$, оценим I_2 по-другому: $I_2 \leqslant cm^{-2l}(\eta)(|p|^2+q^2)^{-1}\max(j^{-2}, (N+1-j)^{-2})$. Используя эти неравенства и рассуждения так же, как выше (см. (3.10)—(3.16)), приходим к оценке (3.17).

Обратимся теперь к доказательству асимптотики (3.3). Решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (1.1) представим в виде ряда теории возмущений

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \hat{u}(p, t)\, dp = \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Psi^{(N)}(x, t), \qquad (3.19)$$

где $\Psi^{(N)}(x, t) = \int_{R_1} dp e^{ipx} u^{(N)}(p, t)$. В силу аналитичности функций $u^{(N)}(p, t)$ в области $\operatorname{Im} p \geqslant -1/a$ и доказанных оценок (3.9), можем сдвинуть контур интегрирования в интеграле $\Psi^{(N)}$ на величину $i\sigma = \frac{i}{a}(\sqrt{1+aX}-1)$, $X = x/t \geqslant -1/a$ и представить $\Psi^{(N)}$ в виде $(p = \rho + i\eta)$

$$\Psi^{(N)} = \int_{R_1} d\rho e^{i\rho x - \sigma x} u^{(N)}(\rho + i\sigma, t) = \int_{R_1} d\rho e^{i\rho x - \sigma x - K(\rho + i\sigma)t} \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{l=0}^{2} \frac{\rho^l}{l!} \Phi_{(l)}^{(N)}(i\sigma) + \sum_{l=0}^{2} \frac{\rho^l}{l!} (Q_l - \Phi_{(l)}^{(N)}(i\sigma)) + \qquad (3.20)$$

$$+ \Big(u^{(N)}(\rho + i\sigma, t) e^{K(\rho + i\sigma)t} - \sum_{l=0}^{2} \frac{\rho^l}{l!} Q_l \Big) \Big\} \equiv J_1 + J_2 + J_3,$$

где $\Phi_{(l)}^{(N)}(p) = \frac{\partial^l}{\partial p^l} \Phi^{(N)}(p)$, $\Phi^{(N)}(p) = \lim\limits_{t \to \infty} (u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t})$, $Q_l = \frac{\partial^l}{\partial p^l} (u^{(N)}(p, t)\, e^{K(p)t})|_{p = i\sigma}$. Разность $u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t} - \Phi^{(N)}(p)$ представляется в виде (3.8) с интегралом по τ, взятым в пределах от t до $+\infty$. Используя оценки (3.9) и (3.17) при $l = 0, 1, 2$, получим

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial p^l} (u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t} - \Phi^{(N)}(p)) \right| \leqslant \frac{c e^{b\mu(\rho)}}{(t+1)^2 m^8(\eta)}, \qquad (3.21)$$

где $\rho = 0$ при $\eta > -1/a$ или $\rho \in R_1$ при $\eta = -1/a$. Благодаря определению величины σ имеем равенство $i\rho x - \sigma x - K(\rho + i\sigma)t = -\nu t - \rho^2(1 + a\sigma)t + (ia/3)\rho^3 t$, где $\nu = \sigma X - \mu(i\sigma) = (2/(3a^2))((1+aX)^{3/2} - 1 - 3aX/2) > 0$.

Интеграл J_1 разобьем на две области: $|\rho| \leqslant 1$ и $|\rho| \geqslant 1$. Интеграл по второй области тривиально оценивается и имеет кроме множителя $e^{-\nu t}$ дополнительное экспоненциальное убывание по времени. Интеграл по первой области дает основной вклад в асимптотику (см. [5, с. 263]), таким образом, при $X > 0$ или $-1/a < X < 0$ получаем

$$J_1 = \frac{e^{-\nu t}}{\sqrt{t}} \Big\{ \Phi^{(N)}(i\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{1 + a\sigma}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{1 + a\sigma}} \Big(\frac{5a^2 \Phi^{(N)}(i\sigma)}{12(1 + a\sigma)^3} +$$

$$+ \frac{ia\Phi_{(1)}^{(N)}(i\sigma)}{(1 + a\sigma)^2} + \frac{\Phi_{(2)}^{(N)}(i\sigma)}{1 + a\sigma} \Big) + O\Big(\frac{1}{t^{3/2} m^5 (1 + a\sigma)} \Big) \Big\}. \qquad (3.22)$$

Для интеграла J_2 ввиду неравенства (3.21) сразу же получим следующую оценку:

$$|J_2| \leqslant c^N e^{-\nu t} t^{-5/2} m^{-8}(\sigma) m^{-1/2}(1+a\sigma)\, e^{b\mu(i\sigma)}. \tag{3.23}$$

Далее, в силу (3.17) и так как $\mathrm{Re}\, K(p) \geqslant \mathrm{Re}\, K(r)$ при $|\mathrm{Re}\, p| \geqslant |\mathrm{Re}\, r|$, получаем при всех $\rho \in R_1$, $p = \rho + i\sigma$

$$\left| e^{-K(p)t}\left(u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t} - \sum_{l=0}^{2} \frac{\rho^l}{l!} Q_l\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho^2 e^{-\mathrm{Re}\, K(p)t} \int_0^\rho dq \left| \frac{\partial^3}{\partial q^3} \left(u^{(N)}(q+i\sigma, t) e^{K(q+i\sigma)t}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c^{N+1} m^3(\rho)(N+1)^{-8} m^{-6}(\sigma) \exp(\mu(i\sigma)(t+b) - \varkappa_N(p)t),$$

а это дает следующую оценку для J_3:

$$|J_3| \leqslant \int_0^\infty d\rho\, m^3(\rho) e^{-\nu t} c^{N+1}(N+1)^{-8} m^{-6}(\sigma) \exp(\mu(i\sigma) b - \varkappa_N(p)t) \leqslant$$

$$\leqslant c^N e^{-\nu t} t^{-2} m^{-6}(\sigma) m^{-4}(1+a\sigma)\, e^{b\mu(i\sigma)}. \tag{3.24}$$

Из формул (3.19)—(3.24) получаем асимптотику (3.3). Величины A и $\tilde{A}$ равны:

$$A(i\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(1+a\sigma)}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Phi^{(N)}(i\sigma), \tag{3.25}$$

$$\tilde{A}(i\sigma) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}(1+a\sigma)^{3/2}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \left(\frac{5a^2 \Phi^{(N)}(i\sigma)}{12(1+a\sigma)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{ia}{1+a\sigma} \Phi_{(1)}^{(N)}(i\sigma) + \Phi_{(2)}^{(N)}(i\sigma)\right). \tag{3.26}$$

Значения A и $\tilde{A}$ вещественны, поскольку ввиду действительности решения $u(x, t)$ величины $\Phi^{(N)}(i\sigma)$ и $\Phi_{(2)}^{(N)}(i\sigma)$ также вещественны, а $\Phi_{(1)}^{(N)}(i\sigma)$ — чисто мнимая величина. Функции $\Phi^{(N)}(i\sigma)$ могут быть вычислены из рекуррентных соотношений (3.7) и (3.8) с помощью диаграммной техники, как в работе [6].

Рассмотрим второй случай $X = -1/a$. Воспользуемся представлением (3.20) с суммами по l от 0 до 1. Теперь $\sigma = -1/a$, $\nu = 1/(3a^2)$. Интеграл J_1 непосредственно вычисляется с помощью замены $(at)^{1/3}\rho = z$ (см. [7, с. 60]):

$$\begin{aligned} J_1 &= e^{-t/3a^2} \int_{R_1} d\rho\, e^{ia\rho^3 t/3} \left(\Phi^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right) + \rho \Phi_{(1)}^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right)\right) = \\ &= (at)^{-1/3} e^{-t/3a^2} (3^{-1/6}\Gamma(1/3)\Phi^{(N)}(-i/a) + \\ &+ (i \cdot 3^{1/6}/(at)^{1/3})\Gamma(2/3)\Phi_{(1)}^{(N)}(-i/a)). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Интеграл J_2 вычислим так же, как интеграл J_1, и воспользуемся оценкой (3.21), получим

$$J_2 \leqslant c^N t^{-2} e^{-t/3a^2}. \tag{3.28}$$

В интеграле J_3, воспользовавшись тождеством $e^{ia\rho^3 t/3} d\rho = \dfrac{1}{ia\rho^2 t} d\,(e^{ia\rho^3 t/3} -$

$-1)$, проинтегрируем по ρ по частям, найдем, что

$$J_3=e^{-t/3a^2}\int\limits_{R_1} d\rho\,(e^{ia\rho^3t/3}-1)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{ia\rho^2 t}\left(u^{(N)}(\rho+i\sigma,t)e^{K(\rho+i\sigma)t}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{l=0}^{1}\frac{\rho^l}{l!}Q_l\right)\right).$$

Отсюда ввиду оценки (3.17) получим

$$|J_3|\leqslant c^N e^{-t/3a^2}\int\limits_{R_1} d\rho\frac{1}{\rho t}|e^{ia\rho^3t/3}-1|e^{\rho\mu(-i/a)}M^{-1}(\rho)=c^N O(t^{-1}\ln t). \qquad (3.29)$$

Из (3.27)—(3.29) приходим к асимптотике (3.4). Величины A и $\tilde A$ имеют вид

$$A\left(-\frac{i}{a}\right)=\frac{\Gamma(1/3)}{2\pi\cdot 3^{1/6}a^{1/3}}\sum_{N=0}^{\infty}\varepsilon^{N+1}\Phi^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right), \qquad (3.30)$$

$$\tilde A\left(-\frac{i}{a}\right)=\frac{i\cdot 3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi a^{2/3}}\sum_{N=0}^{\infty}\varepsilon^{N+1}\Phi^{(N)}_{(1)}\left(-\frac{i}{a}\right). \qquad (3.31)$$

Наконец, рассмотрим оставшийся случай $X<-1/a$. Снова сдвинем контур интегрирования в формуле (3.19) на величину $i\sigma=-i/a$ и представим интегралы $\Psi^{(N)}$ ввиду вещественности решения $u(x,t)$ следующим образом ($\varphi(\rho)\in C_0^\infty(R_1):\varphi(\rho)=1$ при $\||\rho|-\beta|\leqslant\beta/3$ и $\varphi(\rho)=0$ при $\||\rho|-\beta|>2\beta/3$):

$$\Psi^{(N)}=2e^{-\omega t}\operatorname{Re}\left\{\int\limits_0^\infty d\rho\,\varphi(\rho)e^{(ia/3)t\rho(\rho^2-3\beta^2)}\left(\sum_{l=0}^{2}\frac{(\rho-\beta)^l}{l!}\Phi^{(N)}_{(l)}\left(\beta-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{i}{a}\right)+\sum_{l=0}^{2}\frac{(\rho-\beta)^l}{l!}\left(\tilde Q_l-\Phi^{(N)}_{(l)}\left(\beta-\frac{i}{a}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(u^{(N)}\left(\rho-\frac{i}{a},t\right)e^{K(\rho-i/a)t}-\sum_{l=0}^{2}\frac{(\rho-\beta)^l}{l!}\tilde Q_l\right)\right\}+$$
$$+e^{-\omega t}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\rho\,(1-\varphi(\rho))\,e^{(ia/3)\rho t(\rho^2-3\beta^2)+K(\rho-i/a)t}u^{(N)}\left(\rho-\frac{i}{a},t\right)\equiv$$
$$\equiv J_4+J_5+J_6+J_7, \qquad (3.32)$$

где $\tilde Q_l=\dfrac{\partial^l}{\partial p^l}(u^{(N)}(p,t)e^{K(p)t})|_{p=\beta-i/a}$, $l=0, 1, 2$. Здесь мы воспользовались тождеством $i\rho x+x/a-K(\rho-i/a)t=-\omega t+(iat/3)\rho(\rho^2-3\beta^2)$, $\omega=-X/a-2/(3a^2)>0$, $\beta=(1/a)\sqrt{-1-aX}>0$.

Асимптотику интеграла J_4 вычислим с помощью метода стационарной фазы (см. [5. с. 163]):

$$J_4=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a\beta t}}e^{-\omega t}\operatorname{Re}\left\{e^{-(i2a/3)t\beta^3+i\pi/4}\left(\Phi^{(N)}\left(\beta-\frac{i}{a}\right)+\right.\right.$$
$$+\frac{i}{4a\beta t}\left(\frac{5}{12\beta^2}\Phi^{(N)}\left(\beta-\frac{i}{a}\right)-\frac{1}{\beta}\Phi^{(N)}_{(1)}\left(\beta-\frac{i}{a}\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\Phi^{(N)}_{(2)}\left(\beta-\frac{i}{a}\right)\right)\right)\right\}+c^N O(e^{-\omega t}t^{-2}m^{-2}(\beta)). \qquad (3.33)$$

Интеграл J_5, как и выше, оценим с помощью неравенства (3.21):

$$|J_5| \leqslant c^N e^{-\omega t} t^{-2} m^{-2}(\beta). \tag{3.34}$$

В интеграле J_6 проинтегрируем по ρ дважды по частям:

$$J_6 = 2e^{-\omega t} \operatorname{Re}\left\{e^{-(i2a/3)t\beta^3} \int_0^\infty d\rho \left(e^{(ia/3)t(\rho-\beta)^3} - 1\right) \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{iat(\rho^2-\beta^2)} \times \right.\right.$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varphi(\rho)}{iat(\rho^2-\beta^2)}\left(u^{(N)}\left(\rho - \frac{i}{a}, t\right) e^{K(\rho - i/a)t} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \sum_{l=0}^{2} \frac{(\rho-\beta)^l}{l!} \tilde{Q}_l\right)\right)\right)\right\}.$$

Отсюда, учитывая оценку для производной (3.17), получим

$$|J_6| \leqslant \frac{c^N e^{-\omega t}}{t^2} \int_0^{2\beta} d\rho \frac{|e^{(ia/3)t(\rho-\beta)^3} - 1|}{|\rho-\beta|\beta^2} = c^N O\left(\frac{e^{-\omega t} \ln t}{t^2 m^2(\beta)}\right). \tag{3.35}$$

Интеграл J_7 тривиально оценивается с помощью интегрирования по частям:

$$|J_7| \leqslant c^N e^{-\omega t} t^{-2} m^{-2}(\beta). \tag{3.36}$$

Из (3.33)—(3.36) получаем асимптотику (3.5). Величины A и $\tilde{A}$ равны

$$A\left(\beta - \frac{i}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \beta}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Phi^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right),$$

$$\tilde{A}\left(\beta - \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}(a\beta)^{3/2}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1}\left(\frac{5}{12\beta^2} \Phi^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\beta} \Phi_{(1)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) + \Phi_{(2)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right)\right).$$

Теорема 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—011—131).

Литература

1. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А.// Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 5. С. 873—881.
2. Amick C. J., Bona J. L., Schonbek M. E. // J. Diff. Equat. 1989. Vol. 81, N 1. P. 1—49.
3. Biler P. // Bull. Polish. Acad. Sci. 1984. Vol. 32. P. 275—280.
4. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 290—293.
5. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М., 1987.
6. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А.// Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 3. С. 75—88.
7. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М., 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24 января 1994 г.