А. М. Левин, О вычислении меры несовместимости операторных уравнений I рода,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 499–507

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 4

УДК 517.988.8

О ВЫЧИСЛЕНИИ МЕРЫ НЕСОВМЕСТНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

ЛЕВИН А. М.

(Харьков)

Получен критерий непрерывной зависимости от входных данных меры несовместности линейных операторных уравнений в нормированных пространствах. Строится регуляризующий алгоритм вычисления по приближенной информации меры несовместности операторных уравнений I рода. Находятся условия, при которых получаемая с его помощью оценка является неулучшаемой на классе эквивалентных по точности входных данных. Приводится алгоритм численной реализации метода.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Z и U — линейные нормированные пространства, $D\subset Z$ — замкнутое выпуклое множество, которое может совпадать со всем Z. Обозначим через $L=L(Z, U)$ нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из Z в U. Рассмотрим линейное операторное уравнение I рода

(1.1) $$A_0z=u_0,$$

где оператор $A_0\in L$, u_0 — фиксированный вектор из U, решение z ищется на множестве D. Не нарушая общности, считаем, что $0\in D$.

Как известно (см. [1]—[3]), мерой несовместности уравнения (1.1) на множестве D называют величину

(1.2) $$\mu_D[A_0, u_0]=\inf_{z\in D}\|A_0z-u_0\|.$$

Если D совпадает с Z, то будем писать просто $\mu[A_0, u_0]$. Нигде в дальнейшем не предполагается, что нижняя грань в (1.2) достигается на каком-либо векторе из множества D. Мера несовместности $\mu_D[A_0, u_0]$ используется, например, при решении некорректных задач типа (1.1) методом регуляризации А. Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации из обобщенного принципа невязки (см. [2], [3]). С вычислением меры несовместности $\mu[A_0, u_0]$ связано решение эллиптических краевых задач с помощью интегральных уравнений I рода (см. [4], [5]).

Обозначим через W пространство $L\times U$. Точки $p=(A, u)$ из пространства W будем интерпретировать как входные данные уравнения (1.1). Точка $p_0=(A_0, u_0)$ соответствует точным входным данным, точки $p\neq p_0$ из W — приближенным входным данным. В [1] отмечалось, что в общем случае задача вычисления меры несовместности является неустойчивой, т. е. функция $\mu_D[A, u]$ не зависит непрерывно от входных данных p (см. [6]). В § 2 будут найдены необходимые и достаточные условия непрерывности $\mu[A, u]$ в фиксированной точке $p_0\in W$. При нарушении этих условий вычисление меры несовместности уравнения (1.1) по приближенным входным данным $p_\eta=(A_h, u_\delta)\in W$, для которых известен уровень погрешности $\eta=(h, \delta)$, $h\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$,

$$\|A_h-A_0\|\leqslant h, \qquad \|u_\delta-u_0\|\leqslant\delta, \tag{1.3}$$

требует построения регуляризующего алгоритма (р. а.). Под р. а. задачи вычисления $\mu_D[A_0, u_0]$ понимаем такую функцию $\rho_\eta[A, u]$, действующую из $R^2\times W$ в R^1, для которой выполняется соотношение (см. [6], [1])

$$\lim_{\eta\to 0}\rho_\eta[A_h, u_\delta]=\mu_D[A_0, u_0]. \tag{1.4}$$

В [1] был предложен один из возможных р. а. для уравнений в гильбертовых пространствах. В [5], [7] рассматривался другой р. а. (метод наименьшей оценки невязки), который применим и для нелинейных уравнений в нормированных пространствах. Этот алгоритм использовался в одной из модификаций обобщенного принципа невязки для определения нормальных псевдорешений несовместных линейных операторных уравнений (см. [8]). В § 3 найдены условия, при которых метод наименьшей оценки невязки дает неулучшаемую на классе эквивалентных по точности входных данных оценку величины $\mu_D[A_0, u_0]$. В § 4 рассмотрены некоторые вопросы численной реализации данного метода.

§ 2. Условия непрерывной зависимости меры несовместности от входных данных

Рассмотрим поведение меры несовместности $\mu_D[A, u]$ уравнения (1.1) как функции от входных данных p. Очевидна неотрицательность $\mu_D[A, u]$ на W.

Лемма 1. *Функция $\mu_D[A, u]$ полунепрерывна сверху в любой точке $p_0=(A_0, u_0)\in W$.*

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой вектор $z_\varepsilon\in D$, что выполняется неравенство

$$\mu_D[A_0, u_0]\leqslant\|A_0z_\varepsilon-u_0\|\leqslant\mu_D[A_0, u_0]+\varepsilon. \tag{2.1}$$

Справедлива цепочка неравенств

$$\mu_D[A, u]\leqslant\|Az_\varepsilon-u\|\leqslant\|A_0z_\varepsilon-u_0\|+\|Az_\varepsilon-A_0z_\varepsilon\|+\|u-u_0\|\leqslant$$
$$\leqslant\mu_D[A_0, u_0]+\varepsilon+\|A-A_0\|\,\|z_\varepsilon\|+\|u-u_0\|.$$

Из произвольности $\varepsilon>0$ и независимости z_ε от A и u следует неравенство

$$\limsup_{p\to p_0}\mu_D[A, u]\leqslant\mu_D[A_0, u_0],$$

которое и означает полунепрерывность сверху $\mu_D[A, u]$ в любой точке $p_0\in W$.

Следствие 1 (см. [1]). Если $\mu_D[A_0, u_0]=0$, то функция $\mu_D[A, u]$ непрерывна в точке $p_0\in W$.

Ниже будет рассмотрен случай $D=Z$.

Лемма 2. *Если $\mu[A_0, u_0]>0$ и $\operatorname{Ker}A_0\neq\{0\}$, то $\mu[A, u]$ разрывна в точке (A_0, u_0).*

Доказательство. Покажем, что в произвольной окрестности p_0 содержится точка $p\in W$, для которой $\mu[A, u]=0$. Пусть $z_0\in\operatorname{Ker}A_0$, $z_0\neq 0$. По следствию из теоремы Хана — Банаха, найдется такой линейный непрерывный функционал $z_0'\in Z'$, что $\|z_0'\|=1$ и $\langle z_0', z_0\rangle=\|z_0\|$. Для любого числа $\varepsilon>0$ положим $u=u_0$ и $Az=A_0z+\varepsilon u_0\langle z_0', z\rangle$ при любых $z\in Z$. Из условия $\mu[A_0, \bar{u}_0]>0$ следует неравенство $\|u_0\|>0$. Очевидно, что $A\in L$, $\|A-A_0\|=\varepsilon\|u_0\|$ и $\mu[A, u]=0$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Из леммы 2 легко получаем

Следствие 2. Если $\mu[A_0, u_0]>0$ и в любой окрестности оператора A_0 содержится оператор с нетривиальным ядром, то $\mu[A, u]$ разрывна в точке p_0.

Отметим, что существование у оператора A_0 окрестности, каждый линейный непрерывный оператор из которой имеет тривиальное ядро, эквивалентно существованию такого числа $\lambda_0>0$, что для всех векторов из пространства Z выполняется неравенство $\|A_0z\|\geqslant\lambda_0\|z\|$. Последнее означает, что оператор A_0 отображает пространство Z на свой образ $\operatorname{Im}A_0\subset U$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Сформулируем критерий устойчивости задачи вычисления меры несовместности операторных уравнений (1.1) на всем пространстве Z.

Теорема 1. *Для непрерывности $\mu[A, u]$ в точке $(A_0, u_0)\in W$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\mu[A_0, u_0]=0$ либо оператор A_0 отображал пространство Z на $\operatorname{Im}A_0$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 2. Для доказательства достаточности покажем, что из существования числа $\lambda_0>0$, $\|A_0z\|\geqslant\lambda_0\|z\|$ при любых $z\in Z$ следует полунепрерывность снизу функции $\mu[A, u]$ в точке (A_0, u_0). Рассмотрим произвольную последовательность $\{p_n\}$, $p_n=(A_n, u_n)$, $\|A_n-A_0\|\to0$, $\|u_n-u_0\|\to0$ при $n\to\infty$. Тогда начиная с некоторого номера n_0 будет выполняться неравенство

$$(2.2)\qquad \|A_nz\|\geqslant\lambda_0\|z\|/2 \qquad \forall z\in Z.$$

Возьмем последовательность векторов $\{z_n\}$, $z_n\in Z$, удовлетворяющих неравенствам $\|A_nz_n-u_n\|\leqslant\mu[A_n, u_n]+\varepsilon_n$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to0$. Из (2.2) и леммы 1 вытекает ограниченность последовательности норм векторов $z_n:\|z\|_n\leqslant M$, $n=1, 2, \ldots$. Очевидна следующая цепочка неравенств:

$$(2.3)\qquad \mu[A_n, u_n]\geqslant\|A_nz_n-u_n\|-\varepsilon_n\geqslant\|A_0z_n-u_0\|-\|A_n-A_0\|\,\|z_n\|-$$
$$-\|u_n-u_0\|-\varepsilon_n\geqslant\mu[A_0, u_0]-\|A_n-A_0\|M-\|u_n-u_0\|-\varepsilon_n$$

для номеров n, бóльших некоторого n_1. Это означает, что

$$\liminf_{n\to\infty}\mu[A_n, u_n]\geqslant\mu[A_0, u_0].$$

Из последнего соотношения, леммы 1 и следствия 1 вытекает достаточность. Теорема доказана.

Из теоремы 1, в частности, следует, что для вполне непрерывного оператора A_0, действующего из бесконечномерного пространства Z, задача вычисления меры несовместности $\mu[A_0, u_0]$ устойчива только при условии $\mu[A_0, u_0]=0$ (т. е. $u_0\in\overline{\operatorname{Im}A_0}$).

Рассуждения, используемые в доказательстве леммы 2 и теоремы 1, показывают, что неустойчивость задачи связана с неограниченностью множества D. Если D ограниченно, то из леммы 1 и формул (2.3) следует непрерывность функции $\mu_D[A, u]$ в любой точке пространства W.

Замечание 1. Источником неустойчивости задачи является погрешность задания оператора A_0, так как функция $\mu[A, u]$ непрерывна по u и ее непрерывность эквивалентна непрерывности по A.

§ 3. Метод наименьшей оценки невязки

В этом параграфе исследуется предложенный в [5], [7] р. а. решения задачи вычисления меры несовместности операторных уравнений (1.1). Пусть задана пара чисел $\eta=(h, \delta)$, $h\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$, и приближенные входные данные $p_\eta=(A_h, u_\delta)\in W$, удовлетворяющие неравенствам (1.3). Рассмотрим класс эквивалентных по точности входных данных (см. [9]):

$$(3.1)\qquad \Sigma_\eta=\{p=(A, u)\in W: \|A-A_h\|\leqslant h,\ \|u-u_\delta\|\leqslant\delta\}.$$

Очевидно, что неизвестные нам точные входные данные p_0 принадлежат Σ_η. Из полунепрерывности сверху $\mu_D[A, u]$ и из определения (3.1) вытекает, что неулучшаемой на классе эквивалентных по точности входных данных оценкой $\mu_D[A_0, u_0]$ является величина

$$(3.2)\qquad \rho_\eta[A_h, u_\delta]=\sup_{p\in\Sigma_\eta}\mu_D[A, u]=\sup_{p\in\Sigma_\eta}\inf_{z\in D}\|Az-u\|.$$

При этом $\rho_\eta[A_h, u_\delta]\geqslant\mu_D[A_0, u_0]$ и справедливо равенство (1.4). Однако вычисление $\rho_\eta[A_h, u_\delta]$ в общем случае затруднено. В [5], [7] предлагалось рассмотреть двойственную к (3.2) задачу

$$(3.3)\qquad \tilde\rho_\eta[A_h u_\delta=\inf_{z\in D}\sup_{p\in\Sigma_\eta}\|Az-u\|.$$

Из результатов [10] следует неравенство

$$(3.4)\qquad \rho_\eta[A_h, u_\delta]\leqslant\tilde\rho_\eta[A_h, u_\delta].$$

Теорема 2. *Функционал $\tilde\rho_\eta[A_h, u_\delta]$ является регуляризующим алгоритмом решения задачи вычисления $\mu_D[A_0, u_0]$, т. е. для него справедливо равенство* (1.4).

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon>0$ найдется вектор $z_\varepsilon\in D$, удовлетворяющий неравенству (2.1). На основании (3.1) и (3.4) получаем

$$\mu_D[A_0, u_0]\leqslant\tilde\rho_\eta[A_h, u_\delta]=\inf_{z\in D}\sup_{p\in\Sigma_\eta}\|Az-u\|\leqslant\sup_{p\in\Sigma_\eta}\|Az_\varepsilon-u\|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{p\in\Sigma_\eta}\{\|A_0z_\varepsilon-u_0\|+\|A-A_0\|\,\|z_\varepsilon\|+\|u-u_0\|\}\leqslant$$
$$\leqslant\|A_0z_\varepsilon-u_0\|+2h\|z_\varepsilon\|+2\delta\leqslant\mu_D[A_0, u_0]+\varepsilon+2h\|z_\varepsilon\|+2\delta.$$

Из произвольности $\varepsilon>0$, независимости z_ε от η, A_h и u_δ следует утверждение теоремы.

Ниже будет получен эффективный алгоритм вычисления $\tilde\rho_\eta[A_h, u_\delta]$ и найдены условия, при которых справедливо равенство $\rho_\eta[A_h, u_\delta]=$ $=\tilde\rho_\eta[A_h, u_\delta]$. Обозначим

$$(3.5)\qquad \Phi_\eta[z]=\sup_{p\in\Sigma_\eta}\|Az-u\|,\qquad z\in D.$$

Основное значение для последующих рассуждений имеет

Лемма 3 (см. [7]). *Для любых $A_h\in L$, $u_\delta\in U$, $z\in D$, $h\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$ найдутся такие $(\bar A, \bar u)\in\Sigma_\eta$, что*

$$(3.6)\qquad \|\bar A-A_h\|=h,\qquad \|\bar u-u_\delta\|=\delta,$$

$$(3.7)\qquad \Phi_\eta[z]=\|\bar Az-\bar u\|=\|A_hz-u_\delta\|+h\|z\|+\delta.$$

Доказательство леммы 3 будет использоваться в дальнейшем, поэтому приведем его полностью. Оно основано на методе из [9]. Выпишем в явном виде оператор $\bar{A}$ и вектор $\bar{u}$, на которых достигается верхняя грань в (3.5). Пусть $z\neq 0$. По следствию из теоремы Хана — Банаха, существует такой функционал $z'\in Z'$, что $\|z'\|=1$ и $\langle z', z\rangle=\|z\|$. При $A_h z\neq u_\delta$ положим

(3.8а) $\quad \bar{u}=u_\delta-\delta\|A_h z-u_\delta\|^{-1}(A_h z-u_\delta),$

(3.8б) $\quad \bar{A}v=A_h v+h\|A_h z-u_\delta\|^{-1}(A_h z-u_\delta)\langle z', v\rangle \qquad \forall v\in Z.$

При $A_h z=u_\delta$, $h\neq 0$ выберем произвольный оператор $B\in L$, $\|B\|=h$, $\|Bz\|=$ $=h\|z\|$ (например, $Bv=he\langle z', v\rangle$, где $e\in U$, $\|e\|=1$), и положим

(3.9) $\quad \bar{u}=u_\delta-\dfrac{\delta}{h\|z\|}Bz, \qquad \bar{A}=A_h+B.$

При $A_h z=u_\delta$, $h=0$ возьмем $\bar{A}=A_0$ и $\bar{u}$ произвольным, $\|\bar{u}-u_\delta\|=\delta$. Пусть $z=0$. Тогда $\bar{A}$ — любой удовлетворяющий (3.6) оператор. При $u_\delta=0$ вектор $\bar{u}$ произвольный, $\|\bar{u}\|=\delta$; при $u_\delta\neq 0$ положим $\bar{u}=u_\delta(1+\delta\|u_\delta\|^{-1})$.

Очевидны линейность и непрерывность оператора $\bar{A}$. Непосредственной подстановкой проверяются второе равенство (3.7) и равенства (3.6). Так как $(\bar{A}, \bar{u})$ удовлетворяют (3.6), то $\Phi_\eta[z]\geqslant\|\bar{A}z-\bar{u}\|$. С другой стороны, для произвольных $(A, u)\in\Sigma_\eta$ очевидно неравенство $\|Az-u\|\leqslant\|A_h z-$ $-u_\delta\|+h\|z\|+\delta$. Отсюда вытекает (3.7). Лемма доказана.

Таким образом, показано, что

(3.10) $\quad \tilde{\rho}_\eta[A_h, u_\delta]=\inf\limits_{z\in D}(\|A_h z-u_\delta\|+h\|z\|+\delta)=\inf\limits_{z\in D}\Phi_\eta[z].$

В случае нормированного пространства Z минимум в (3.10) может не достигаться на D. В связи с этим отметим, что при вычислении нижней грани в (3.10) с точностью $\varkappa\geqslant 0$, $\varkappa=\varkappa(\eta)$, $\lim\limits_{\eta\to 0}\varkappa(\eta)=0$, функционал $\tilde{\rho}_\eta^{\varkappa}[A_h, u_\delta]=\tilde{\rho}_\eta[A_h, u_\delta]+\varkappa$ будет также р. а. задачи (1.2). Например, в качестве $\tilde{\rho}_\eta^{\varkappa}[A_h, u_\delta]$ можно брать значения функционала (3.7) на векторах $z_{\eta\varkappa}\in D$, для которых справедливо неравенство $\|A_h z_{\eta\varkappa}-u_\delta\|+h\|z_{\eta\varkappa}\|+\delta\leqslant$ $\leqslant\tilde{\rho}_\eta[A_h, u_\delta]+\varkappa$. Важное значение для приложений (см. [5]) имеет тот факт, что построенная таким способом произвольная последовательность $\{z_{\eta\varkappa}^{n}\}$ при $\eta_n\to 0$ является минимизирующей последовательностью функционала $\|A_0 z-u_0\|$.

Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $\Phi_\eta[z]$ в случае рефлексивности пространства Z.

Теорема 3. *Пусть Z — рефлексивное пространство и $h>0$. Тогда найдется по крайней мере один вектор $z_\eta\in D$, доставляющий минимум $\Phi_\eta[z]$ на D.*

Доказательство содержится в [3]. Там же приводится пример, показывающий возможность неединственности задачи минимизации (3.10). Однако можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть Z — рефлексивное, строго нормированное пространство* (см. [11]), *U — строго нормированное банахово пространство, $D\subset Z$ — выпуклое замкнутое множество, $0\in D$, и пусть выполняется неравенство $\mu_D[A_0, u_0]<\|u_0\|$. В этом случае найдутся такие числа $h_0>0$, $\delta_0>0$, что для любых h, δ, $0<h\leqslant h_0$, $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$, при удовлетворяющих* (1.3) *входных данных (A_h, u_δ) задача минимизации* (3.10) *будет иметь единственное решение $z_\eta\in D$.*

Эта теорема является обобщением результатов [7] на случай минимизации на множестве D. Ее доказательство проводится аналогично.

Заметим, что функционал $f[z]=\|Az-u\|$ при фиксированных $(A, u)\in W$ является непрерывным и выпуклым на Z. Для определения условий неулучшаемости оценки $\tilde{\rho}_\eta[A_h, u_\delta]$ воспользуемся методами выпуклого анализа, в частности субдифференциальным исчислением (см. [10], [12]).

Теорема 5. *Пусть Z — рефлексивное пространство, $D\subset Z$ — замкнутое выпуклое множество, $h>0$. Если минимум функционала $\Phi_\eta[z]$ на D достигается на векторе $z_\eta\in D$, удовлетворяющем условиям $z_\eta\neq 0$ и $A_h z_\eta\neq u_\delta$, то справедливо равенство*

$$(3.11)\qquad \rho_\eta[A_h, u_\delta]=\tilde{\rho}_\eta[A_h, u_\delta]=\Phi_\eta[z_\eta].$$

Доказательство. На основании леммы 3, существуют такие $(\bar{A}, \bar{u})\in\Sigma_\eta$, для которых $\Phi_\eta[z_\eta]=\|\bar{A}z_\eta-\bar{u}\|$. Покажем, что среди них имеются такие входные данные $\bar{p}_\eta=(\bar{A}_\eta, \bar{u}_\eta)$, что оператор $\bar{A}_\eta$ и вектор $\bar{u}_\eta$ выражаются по формулам (3.8) и точка $(\bar{p}_\eta, z_\eta)$ образует седловую точку функционала $\|Az-u\|$ на множестве $\Sigma_\eta\times D$, т. е. для любых $(A, u)\in\Sigma_\eta$ и $z\in D$ справедливы неравенства

$$(3.12)\qquad \|Az_\eta-u\|\leqslant\|\bar{A}_\eta z_\eta-\bar{u}_\eta\|\leqslant\|\bar{A}_\eta z-u_\eta\|.$$

Согласно [10], из (3.12) следует утверждение теоремы.

Первое неравенство (3.12) непосредственно вытекает из выбора $(\bar{A}_\eta, \bar{u}_\eta)$ (см. лемму 3). Требуется показать, что вектор z_η доставляет минимум функционалу $\|\bar{A}_\eta z-\bar{u}_\eta\|$ на множестве D при фиксированных $(\bar{A}_\eta, \bar{u}_\eta)$. Для этого необходимо и достаточно (см. [12]), чтобы субдифференциал функционала $\|\bar{A}_\eta z-\bar{u}_\eta\|+\delta(z|D)$ в точке z_η содержал нуль $0\in Z'$, где $\delta(z|D)$ — индикаторная функция множества D, равная нулю при $z\in D$ и $+\infty$ при $z\notin D$. По теореме Моро — Рокафеллара, выполняется равенство

$$\partial[\|\bar{A}_\eta z-\bar{u}_\eta\|+\delta(z|D)]=\partial\|\bar{A}_\eta z-\bar{u}_\eta\|+\partial\delta(z|D),\quad z\in D.$$

Используя правило субдифференцирования нормы и сложной функции, формулу для субдифференциала индикаторной функции (см. [12]), приходим к следующему условию: вектор z_η доставляет минимум $\|\bar{A}_\eta z-\bar{u}_\eta\|$ на D, если найдутся такие функционалы $y'\in U'$ и $x'\in Z'$, что справедливы соотношения

$$(3.13)\qquad \|y'\|=1,\quad \langle y', \bar{A}_\eta z_\eta-\bar{u}_\eta\rangle=\|\bar{A}_\eta z_\eta-\bar{u}_\eta\|=\Phi_\eta[z_\eta],$$

$$(3.14)\qquad \langle x', z-z_\eta\rangle\leqslant 0\quad \forall z\in D,$$

$$(3.15)\qquad \bar{A}_\eta' y'+x'=0$$

($\bar{A}_\eta'$ — оператор, сопряженный с $\bar{A}_\eta$). Так как z_η доставляет минимум функционалу $\|A_h z-u_\delta\|+h\|z\|+\delta$ на D и $A_h z_\eta\neq u_\delta$, $z_\eta\neq 0$, то с использованием аналогичных рассуждений доказывается существование функционалов $y_\eta'\in U'$, $z_\eta'\in Z'$, $x_\eta'\in Z'$, обладающих следующими свойствами:

$$(3.16)\qquad \|y_\eta'\|=1,\quad \langle y_\eta', A_h z_\eta-u_\delta\rangle=\|A_h z_\eta-u_\delta\|,$$

$$(3.17)\qquad \|z_\eta'\|=1,\quad \langle z_\eta', z_\eta\rangle=\|z_\eta\|,$$

$$(3.18)\qquad \langle x_\eta', z-z_\eta\rangle\leqslant 0\quad \forall z\in D,$$

$$(3.19)\qquad A_h' y_\eta'+h z_\eta'+x_\eta'=0.$$

Положим $y'=y_\eta'$ в (3.13), $x'=x_\eta'$ в (3.14), $z'=z_\eta'$ в (3.8) и докажем соотношения (3.13)–(3.15). Из (3.8) и (3.17) имеем

$$\bar{A}_\eta z_\eta - \bar{u}_\eta = (A_h z_\eta - u_\delta)\|A_h z_\eta - u_\delta\|^{-1}(\|A_h z_\eta - u_\delta\| + h\|z_\eta\| + \delta).$$

Отсюда, учитывая (3.16), получаем (3.13). Неравенство (3.14) вытекает из (3.18). Далее, справедливо равенство $\bar{A}_\eta' y_\eta' + x_\eta' = A_h' y_\eta' + h z_\eta' \|A_h z_\eta - u_\delta\|^{-1}\langle y_\eta', A_h z_\eta - u_\delta\rangle + x_\eta' = A_h' y_\eta' + h z_\eta' + x_\eta' = 0$. Формула (3.15), а вместе с ней и теорема 5 доказаны.

Замечание 2. Теорема 5 остается в силе при $z_\eta=0$, $0\in D$, если U – рефлексивное пространство. В этом случае вместо (3.17) функционал z_η' должен принадлежать замкнутому единичному шару сопряженного пространства $Z': \|z_\eta'\|\leqslant 1$. Полагаем $\bar{A}_\eta v = A_h v + h e\langle z_\eta', v\rangle$ для любого $v\in Z$, где $e\in U$, $\|e\|=1$ и $\langle y_\eta', e\rangle = 1$ (именно в этом месте нужна рефлексивность пространства U), $\bar{u}_\eta = u_\delta(1+\delta\|u_\delta\|^{-1})$. Оператор $\bar{A}_\eta$ удовлетворяет неравенству $\|\bar{A}_\eta - A_h\|\leqslant h$. На основании (3.19) справедливо равенство $\bar{A}_\eta' y_\eta' + x_\eta' = A_h' y_\eta' + h z_\eta' \langle y_\eta', e\rangle + x_\eta' = 0$.

В качестве элементарного примера нарушения равенства (3.11) приведем случай рефлексивных пространств Z и U, $Z=U$; $A_0=E$ – тождественный оператор, $0<h<0.5$; A_h – произвольный оператор из L, $\|A_h - A_0\|\leqslant h$. Тогда любой оператор A из Σ_η обратимый и, следовательно, выполняется равенство $\rho_\eta[A_h, u_\delta]=0$.

§ 4. Численная реализация метода

Рассмотрим эффективный алгоритм минимизации функционала $\Phi_\eta[z]$ на всем пространстве Z. Согласно [7, с. 1128] можно доказать следующее

Предложение А. *В условиях теоремы 4 при $D=Z$ задача (3.10) эквивалентна задаче минимизации функционала Тихонова*

$$M_\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^q + \alpha\|z\|^r, \qquad q\geqslant 1, \quad r>1,$$

с выбором параметра регуляризации $\alpha\geqslant 0$ из «принципа наименьшей оценки невязки»

$$(4.1)\qquad \psi(\alpha) = \|A_h z_\alpha - u_\delta\| + h|z_\alpha| \to \min, \qquad z_\alpha = \arg\min_{z\in Z} M_\alpha[z].$$

Функция $\Psi(\alpha)$ достигает минимума на $[0, +\infty)$ в единственной точке α_0, и $z_{\alpha_0} = z_\eta$.

Для гильбертовых пространств Z и U этот результат можно усилить.

Теорема 6. *Пусть Z, U – гильбертовы пространства, $D=Z$, $h>0$. Метод наименьшей оценки невязки эквивалентен следующему принципу наименьшей оценки невязки. Если*

$$(4.2)\qquad h\|u_\delta\| \geqslant \|A_h' u_\delta\|,$$

то полагаем $z_\eta=0$; в противном случае решаем уравнение

$$(4.3)\qquad (A_h' A_h + \alpha E) z = A_h' u_\delta$$

с выбором параметра регуляризации $\alpha\geqslant 0$ из условия (4.1); при этом функция $\psi(\alpha)$ непрерывно дифференцируема для $\alpha>0$, имеет единственную точку α_0 локального минимума, являющуюся также точкой глобального минимума на $[0, +\infty)$, и вектор $z_{\alpha_0} = z_\eta$. Если $\alpha_0 \neq 0$, то α_0 – единственное решение уравнения

$$(4.4)\qquad \alpha\|z_\alpha\| = h\|A_h z_\alpha - u_\delta\|;$$

если $\alpha_0=0$, то для любого $\alpha>0$ справедливо неравенство

(4.5) $$\alpha\|z_\alpha\|-h\|A_h z_\alpha-u_\delta\|>0.$$

Доказательство будет опираться на следующие леммы.

Лемма 4. *В условиях теоремы 6 для равенства нулю вектора z_η необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (4.2).

Доказательство. Представим $\Phi_\eta[z]$ в виде суммы $\Phi_1[z]=\|A_h z-u_\delta\|$ и $\Phi_2[z]=h\|z\|+\delta$. Если $u_\delta=0$, то очевидно, что $z_\eta=0$ – единственное решение задачи (3.10). При $u_\delta\neq 0$ функции $\Phi_1[z]$, $\Phi_2[z]$ выпуклые, непрерывные, $\Phi_1[z]$ непрерывно дифференцируема по Фреше в окрестности $z=0$ и $\Phi_1'[0]=-A_h'u_\delta\|u_\delta\|^{-1}$. В соответствии с [10], нуль является точкой минимума $\Phi_\eta[z]$ тогда и только тогда, когда $h\|z\|\geqslant(A_h'u_\delta\|u_\delta\|^{-1}, z)$ для любых векторов $z\in Z$. Отсюда легко получается утверждение леммы.

Лемма 5. *Если $A_h z_\eta\neq u_\delta$ и $z_\eta\neq 0$, то вектор z_η является решением уравнения*

(4.6) $$\frac{A_h'A_h z-A_h'u_\delta}{\|A_h z-u_\delta\|}+h\frac{z}{\|z\|}=0$$

и всякое решение этого уравнения минимизирует функционал $\Phi_\eta[z]$.

Утверждение очевидно следует из результатов [10].

Доказательство теоремы 6. Если выполняется неравенство (4.2), то, в силу леммы 4, $z_\eta=0$. Рассмотрим второй случай. Уравнение (4.3) является уравнением Эйлера для функционала $M_\alpha[z]$. Эквивалентность метода наименьшей оценки невязки задаче (4.3), (4.2) и единственность точки минимума α_0 вытекает из предложения А. Функция $\Psi(\alpha)$ непрерывно дифференцируема при $\alpha>0$ и

$$\Psi'(\alpha)=0.5((A_h'A_h+\alpha E)^{-1}z_\alpha, z_\alpha)\left(\frac{\alpha}{\|A_h z_\alpha-u_\delta\|}-\frac{h}{\|z_\alpha\|}\right),$$

где оператор $(A_h'A_h+\alpha E)^{-1}$ положительно-определенный (см. [2]). Завершение доказательства теоремы легко получается из леммы 5, единственности решения α_0 задачи (4.1), формул (4.3)–(4.5) и того факта, что решение z_α уравнения (4.3) стремится при $\alpha\to 0$ к нормальному решению уравнения $A_h z=u_\delta$, если таковое существует [2].

Устойчивость конечномерной аппроксимации метода наименьшей оценки невязки, т. е. сходимость решений конечномерных задач, аппроксимирующих задачу (3.10), к решению z_η, непосредственно вытекает из результатов работы [11]. Для численной реализации метода можно, например, воспользоваться пакетом программ на ФОРТРАНе, приведенным в [2]. При этом необходимы лишь незначительные переделки и добавления. Отметим, что данный метод успешно применялся для численного решения некоторых эллиптических краевых задач с помощью интегральных уравнений I рода (см. [5]).

Автор выражает глубокую признательность А. Х. Пергамент и А. Г. Яголе за полезные замечания по теме данной работы.

Литература

1. *Морозов В. А.* О вычислении нижних граней функционалов по приближенной информации. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 4, с. 1045–1049.
2. *Тихонов А. Н. и др.* Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
3. *Ягола А. Г.* О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач в рефлексивных пространствах. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 3, с. 586–596.

4. *Тихонов А. Н., Кочетов И. И., Пергамент А. Х.* Некоторые аспекты применения метода регуляризации при решении краевых задач для эллиптических уравнений. – В кн.: Газовая и волновая динамика. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 29–34.
5. *Венцель Э. С., Кобылинский В. Г., Левин А. М.* Применение метода регуляризации для численного решения задачи изгиба тонких упругих пластинок. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, т. 24, № 2, с. 323–328.
6. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
7. *Левин А. М.* О регуляризации вычисления нижних граней функционалов. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, т. 24, № 8, с. 1123–1128.
8. *Кочиков И. В., Матвиенко А. Н., Ягола А. Г.* Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, т. 24, № 7, с. 1087–1090.
9. *Тихонов А. Н.* О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений. – Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 3, с. 549–554.
10. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
11. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
12. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 10.IX.1984