T. L. Anikst, Stabilization of the solutions of a mixed problem for a certain class of polyharmonic equations,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1968, Number 3, 9–16

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 517.544

Т. Л. Аникст

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе исследуется существование при $t \to \infty$ предела функции $u(x, t)$, представляющей в цилиндре $\bar{D}\times[0 \leqslant t < \infty)$ классическое решение уравнения

$$\Delta_x^n u = a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + cu + F(x, t) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{2}$$

и граничных условиях $y \in \Gamma$ (Γ — гладкая граница области D):

$$\Delta_y^q u(y, t) = f_q(y, t), \quad q = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Предполагается, что $\bar{D}$ — односвязная n-мерная область ($n = 2, 3$). Коэффициенты a, b, c — постоянные, причем

$$a = (-1)^{n-1}|a|, \quad b = (-1)^{n-1}|b|. \tag{4}$$

Далее предполагается, что функция $F(x, t)$ в $\bar{D}\times[0 \leqslant t < \infty)$ имеет непрерывные и ограниченные производные по x до порядка $2n$ и по t до пятого порядка включительно; функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x \in \bar{D}$ имеют непрерывные производные порядка $4n$, а функции $f_q(y, t), q = 0, 1, \ldots, n-1$, при $y \in \Gamma$, $0 \leqslant t < \infty$, имеют непрерывные и ограниченные производные по t до седьмого порядка включительно.

Также предполагается, что при $y \in \Gamma$ и $t = 0$ выполняются условия согласования:

$$\begin{gathered} \Delta_y^q \varphi(y) = f_q(y, 0), \quad \Delta_y^q \psi(y) = f'_{qt}(y, 0), \\ \Delta_y^{n+q} \varphi(y) = af''_{qt}(y, 0) + 2bf'_{qt}(y, 0) + cf_q(y, 0) + \Delta_y^q F(y, 0), \\ \Delta_y^{n+q} \psi(y) = af'''_{qt}(y, 0) + 2bf''_{qt}(y, 0) + cf'_{qt}(y, 0) + \Delta_y^q F'_t(y, 0). \end{gathered} \tag{5}$$

В работе автора [1] было получено решение задачи (1) — (5) для конечного цилиндра $\bar{D}\times[0 \leqslant t \leqslant T]$ при отсутствии второго из условий (4). (В дальнейшем ссылки на формулы статьи [1] мы будем снабжать цифрой 1, проставляемой перед номером формулы.)

Ввиду заданной выше ограниченности $f_{qt}^{(k)}(y, t)$, $k \leqslant 7$, $\Delta_y^q F_t^{(k)}(y, t)$, $k \leqslant 5$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$; $\Delta_x^n F_t^{(k)}(x, t)$, $k \leqslant 3$, при $x \in \overline{D}$, $y \in \Gamma$, $0 \leqslant t < \infty$ неравенства (1,31) — (1,36), обеспечивающие равномерную сходимость ряда (1,22), выполняются во всем бесконечном цилиндре $\overline{D} \times [0 \leqslant t < \infty)$. Это значит, что решение смешанной задачи (1) — (5) в бесконечном цилиндре $\overline{D} \times [0 \leqslant t < \infty)$ представляется последовательностью формул (1,7), (1,8), (1,19), (1,22) и решениями уравнений (1,26) при условиях (1,27).

Подставим (1,19) и (1,22) в формулу (1,8); при вычислении $\int_0^t v(x, \tau)\, d\tau$ и $\int_0^t (t-\tau)\, v(x, \tau)\, d\tau$ с помощью (1,19) используем условия (5) и равномерную сходимость ряда (1,22). Положив

$$E_q(y, t) = af''_{qt}(y, t) + 2bf'_{qt}(y, t) + cf_q(y, t) + \Delta_y^q F(y, t), \tag{6}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & \int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial \Delta_y^{n-q-1} G(x, y)}{\partial \nu_y} f_q(y, t)\, d_y \Gamma - \int_D G(x, x_1) F(x_1, t)\, d_{x_1} D - \\ & - \int_D G(x, x_1) \int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial \Delta_y^{n-q-1} G(x_1, y)}{\partial \nu_y} [E_q(y, t) - \Delta_y^q F(y, t)]\, d_y \Gamma d_{x_1} D + \\ & + \int_D \int_D G(x, x_1) G(x_1, x_2) \int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial \Delta_y^{n-q-1} G(x_2, y)}{\partial \nu_y} \times \\ & \times [aE''_{qt}(y, t) + 2bE'_{qt}(y, t) + cE_q(y, t)]\, d_y \Gamma d_{x_1} D d_{x_2} D - \\ & - \int_D G(x, x_1) \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1) \left[aT_k(t) + 2b \int_0^t T_k(\tau)\, d\tau + c \int_0^t (t-\tau) T_k(\tau)\, d\tau \right] d_{x_1} D - \\ & - \int_D \int_D \int_D G(x, x_1) G(x_1, x_2) G(x_2, x_3) \Delta_{x_3}^{2n} [(2b+ct)\psi(x_3) + c\varphi(x_3)]\, d_{x_1} D b_{x_2} D d_{x_3} D. \end{aligned} \tag{7}$$

Последний интеграл получен в результате применения формулы (1,5)

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial \Delta_y^{n-q-1} G(x_2, y)}{\partial \nu_y} \Delta_y^q [(2b+ct)\psi(y) + c\varphi(y)]\, d_y \Gamma = \\ & = \int_D G(x_2, x_3) \Delta_{x_3}^n [(2b+ct)\psi(x_3) + c\varphi(x_3)] d_{x_3} D + (2b+ct)\psi(x_2) + c\varphi(x_2) \end{aligned}$$

и той, которая получается из нее при замене ψ и φ на $\Delta^n \psi$ и $\Delta^n \varphi$ соответственно. Интегрируя дважды по t равенство (1,26) с учетом (1,27), получим

$$\int_0^t T_k(\tau)\, d\tau = \frac{r'_k(t)}{\lambda_k (c + \lambda_k)} - \frac{aT'_k(t) + 2bT_k(t)}{c + \lambda_k}, \tag{8}$$

$$\int_0^t (t-\tau)\,T_k(\tau)\,d\tau = \frac{r_k(t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)} - \frac{2br_k'(t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)^2} +$$

$$+\frac{2b\,[aT_k'(t)+2bT_k(t)]}{(c+\lambda_k)^2} - \frac{aT_k(t)}{c+\lambda_k}. \tag{9}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1)\left[aT_k(t) + 2b\int_0^t T_k(\tau)\,d\tau + c\int_0^t (t-\tau)\,T_k(\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1)\left[\frac{cr_k(t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)} + \frac{2br_k'(t)}{(c+\lambda_k)^2} +\right.$$

$$\left.+\frac{a\lambda_k^2+(ac-4b^2)\lambda_k}{(c+\lambda_k)^2}\,T_k(t) - \frac{2ab}{(c+\lambda_k)^2}\,T_k'(t)\right]. \tag{10}$$

На основании (1,21), (1,25) и (6) можно написать

$$r_k(t) = -\int_D\int_D S_k(x_2)\,G(x_2, x_3)\,\Delta_{x_3}^{2n}\,[(2b+ct)\,\psi(x_3) + c\varphi(x_3)]\,d_{x_2}D\,d_{x_3}D -$$

$$-\int_D S_k(x_2)\,\Delta_{x_2}^{2n}\,[t\psi(x_2) + \varphi(x_2)]\,d_{x_2}D + \int_D S_k(x_2)\,\Delta_{x_2}^{n}F(x_2, t)\,d_{x_2}D +$$

$$+\int_D S_k(x_2)\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}\,G(x_2, y)}{\partial\nu_y}\times$$

$$\times[aE_{qt}''(y, t) + 2bE_{qt}'(y, t) + cE_q(y, t)]\,d_y\Gamma\,d_{x_2}D. \tag{11}$$

Дифференцируя (11) по t, получим

$$r_k'(t) = -\int_D\int_D S_k(x_2)\,G(x_2, x_3)\,\Delta_{x_3}^{2n}\,c\psi(x_3)\,d_{x_3}D -$$

$$-\int_D S_k(x_2)\,\Delta_{x_2}^{2n}\,\psi(x_2)\,d_{x_2}D + \int_D S_k(x_2)\,\Delta_{x_2}^{n}F_t'(x_2, t)\,d_{x_2}D +$$

$$+\int_D S_k(x_2)\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}\,G(x_2, y)}{\partial\nu_y}\times$$

$$\times[aE_{qt}'''(y, t) + 2bE_{qt}''(y, t) + cE_{qt}'(y, t)]\,d_y\Gamma\,d_{x_2}D. \tag{12}$$

Учитывая симметрию функции $G(x_2, x_3)$ по (1,6) и равенство

$$\int_D S_k(x_2)\,G(x_2, x_3)\,d_{x_3}D = \frac{1}{\lambda_k}S_k(x_3),$$

а также используя (11) и (12), после приведения некоторых дробей к общим знаменателям получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1)\left[\frac{cr_k(t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)}+\frac{2br_k'(t)}{(c+\lambda_k)^2}\right]=$$

$$=-\int_D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x_1)\,S_k(x_3)}{\lambda_k^2}\,\Delta_{x_3}^{2n}\left[(2b+ct)\,\psi(x_3)+c\varphi(x_3)\right]d_{x_3}D+$$

$$+\int_D \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1)\,S_k(x_2)\left[\frac{c\Delta_{x_2}^{n}F(x_2,\,t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)}+\frac{2b\Delta_{x_2}^{n}F_t'(x_2,\,t)}{(c+\lambda_k)^2}\right]d_{x_2}D+$$

$$+\int_D \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1)\,S_k(x_2)\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}G(x_2,\,y)}{\partial\nu_y}\times$$

$$\times\left[\frac{acE_{qt}''(y,\,t)+2bcE_{qt}'(y,\,t)+c^2E_q(y,\,t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2abE_{qt}'''(y,\,t)+4b^2E_{qt}''(y,\,t)+2bcE_{qt}'(y,\,t)}{(c+\lambda_k)^2}\right]d_y\Gamma d_{x_2}D. \qquad (13)$$

Применяя известную билинейную формулу Гильберта — Шмидта [2], будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x_1)\,S_k(x_3)}{\lambda_k^2}=\int_D G(x_1,\,x_2)\,G(x_2,\,x_3)\,d_{x_2}D. \qquad (14)$$

Преобразуем правую часть (10), подставив в нее (13) с учетом (14). Подставляя затем преобразованное выражение (10) в (7), после уничтожения членов, содержащих тройное интегрирование по области D, получим следующее представление функции $u(x,\,t)$, достаточно удобное для предельного перехода:

$$u(x,\,t)=\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}G(x,\,y)}{\partial\nu_y}\,f_q(y,\,t)\,d_y\Gamma-\int_D G(x,\,x_1)\,F(x_1,t)\,d_{x_1}D-$$

$$-\int_D G(x,\,x_1)\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}G(x_1,\,y)}{\partial\nu_y}\left[E_q(y,\,t)-\Delta_y^{q}F(y,\,t)\right]d_y\Gamma+$$

$$+\int_D\int_D G(x,\,x_1)\,G(x_1,\,x_2)\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}G(x_2,\,y)}{\partial\nu_y}\times$$

$$\times\left[aE_{qt}''(y,\,t)+2bE_{qt}'(y,\,t)+cE_q(y,\,t)\right]d_y\Gamma d_{x_1}D d_{x_2}D-$$

$$-\int_D\int_D G(x,\,x_1)\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_1)\,S_k(x_2)\int_\Gamma \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}G(x_2,\,y)}{\partial\nu_y}\times$$

$$\times\left[\frac{acE_{qt}''(y,\,t)+2bcE_{qt}'(y,\,t)+c^2E_q(y,\,t)}{\lambda_k(c+\lambda_k)}+\right.$$

$$+\frac{2abE'''_{qt}(y,t)+4b^2E''_{qt}(y,t)+2bcE'_{qt}(y,t)}{(c+\lambda_k)^2}\Bigg]\,d_y\Gamma d_{x_1}Dd_{x_2}D+$$

$$+\int\limits_D G(x,x_1)\sum_{k=1}^{\infty}S_k(x_1)\left[\frac{a\lambda_k^2+(ac+4b^2)\lambda_k}{(c+\lambda_k)^2}T_k(t)+\frac{2ab\lambda_k}{(c+\lambda_k)^2}T_k'(t)\right]d_{x_1}D. \tag{15}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если в уравнении* (1) *коэффициент* $c=0$ *и если существуют следующие пределы* ($x\in\overline{D}$, $y\in\Gamma$):

$$\lim_{t\to\infty}F(x,t)=F_\infty(x),\quad \lim_{t\to\infty}f_q(y,t)=f_{q\infty}(y), \tag{16}$$

$$\lim_{t\to\infty}\Delta_x^n F_t^{(k)}(x,t)=0\quad (k=1,2),$$

$$\lim_{t\to\infty}\Delta_y^n F_t^{(k)}(y,t)=0\quad (k=1-4), \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty}f_{qt}^{(k)}(y,t)=0\quad (k=1-6,\quad q=0,1,\ldots,n-1),$$

то решение задачи (1) — (5) *имеет предел* $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=u_\infty(x)$, *представляющий решение граничной задачи*

$$\Delta_x^n u_\infty(x)=F_\infty(x),\quad \Delta_y^q u_\infty(x)=f_{q\infty}(y),\ q=0,1,\ldots,n-1. \tag{18}$$

Доказательство теоремы осуществляется путем непосредственного перехода к пределу при $t\to\infty$ в формуле (15), с учетом равномерной сходимости входящих в нее рядов и возможности перехода к пределу под знаком интеграла по области (последнее обосновывается, например, в [2]).

Прежде всего исследуем $\lim\limits_{t\to\infty}T_k(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty}T_k'(t)$. Величины $T_k(t)$ определяются как решения уравнений (1,26) при начальных условиях (1,27). Ввиду наличия условий (4) имеем $\frac{b}{a}>0$. При $|c+\lambda_k|<\frac{b^2}{|a|}$ будем иметь

$$T_k(t)=A_ke^{a_kt}+B_ke^{b_kt}+\frac{1}{\lambda_k(a_k-b_k)}\int\limits_0^1 r_k''(\tau)\left[e^{a_k(t-\tau)}-e^{b_k(t-\tau)}\right]d\tau, \tag{19}$$

где A_k и B_k — постоянные, определяемые начальными условиями (1,27) $a_k=-\frac{b}{a}+\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c+\lambda_k}{a}}$, $b_k=-\frac{b}{a}-\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c+\lambda_k}{a}}$. При $|c+\lambda_k|=\frac{b^2}{|a|}$ получим

$$T_k(t)=(A_k+B_kt)e^{-\frac{b}{a}t}+\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t r_k''(\tau)(t-\tau)e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)}d\tau, \tag{20}$$

где A_k, B_k — постоянные, определяемые начальными условиями (1,27). Так как $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k|=\infty$, то можно найти такое натуральное число N_1, что при всех $k>N_1$ будем иметь $|c+\lambda_k|>\frac{b^2}{|a|}$. Тогда

$$T_k(t)=\left[\frac{r_k(0)}{a\lambda_k}\cos\alpha_kt+\frac{ar_k'(0)-2br_k(0)}{a^2\alpha_k\lambda_k}\sin\alpha_kt\right]e^{-\frac{b}{a}t}+$$

$$+\frac{1}{\alpha_k \lambda_k}\int_0^t r_k''(\tau)\, e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)} \sin \alpha_k (t-\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

где $\alpha_k=\sqrt{\frac{c+\lambda_k}{a}-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Исходя из формул (19), (20), (21) и учитывая, что ввиду условий (4) и $\lambda_k=(-1)^{n-1}|\lambda_k|$ имеют место неравенства $\frac{b}{a}>0$, $\frac{\lambda_k}{a}>0$, а при $c=0$ еще и $a_k<0$, $b_k<0$, заключаем, что предел $\lim\limits_{t\to\infty} T_k(t)$ зависит только от пределов интегралов, содержащихся в этих формулах.

Покажем, что при $t\to\infty$ пределы интегралов, содержащихся в формулах (19), (20), (21), равны нулю. На основании (1,21) и (1,25), а также условия (17) при $c=0$ находим, что $\lim\limits_{t\to\infty} r_k''(t)=0$.

Доказательство равенства нулю пределов интегралов в (19) и (20) при $t\to\infty$ одинаково и основано на том, что $\lim\limits_{t\to\infty} e^{p(t-\tau)}=0$ при фиксированном τ, где $p<0$ $\left(p=-\frac{b}{a},\ a_k,\ b_k\right)$. Поэтому ограничимся рассмотрением интеграла (21). Очевидно, что

$$\left|\int_0^t r_k''(\tau)\, e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)} \sin\alpha_k(t-\tau)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{b}{a}(t-t_1)}\int_0^{t_1}|r_k''(\tau)|\, d\tau+|r_k''(\bar t)|\int_{t_1}^t e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)}\, d\tau \leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant e^{-\frac{b}{a}(t-t_1)}\int_0^{t_1}|r_k''(\tau)|\, d\tau+\frac{a}{b}|r_k''(\bar t)|,$$

где $0<t_1<\bar t<t$. Для произвольно заданного $\varepsilon>0$ можно найти такие t_1 и $T>t_1$, что будут выполняться следующие неравенства:

$$|r_k''(\bar t)|<\frac{\varepsilon b}{2a}, \text{ где } \bar t>t_1,$$

$$e^{-\frac{b}{a}(t-t_1)}<\frac{\varepsilon}{2I_\varepsilon}, \text{ где } t>T,\ I_\varepsilon=\int_0^{t_1}|r_k''(\tau)|\, d\tau. \tag{23}$$

На основании (22) и (23) заключаем, что для произвольно заданного $\varepsilon>0$ можно найти $T>0$ такое, что при $t>T$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int_0^t r_k''(\tau)\, e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)} \sin\alpha_k(t-\tau)\, d\tau\right|<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t r_k''(\tau)\, e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)} \sin\alpha_k(t-\tau)\, d\tau=0. \tag{24}$$

Аналогично можно показать, что и

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t r_k''(\tau)\, e^{a_k(t-\tau)}\, d\tau=\lim_{t\to\infty}\int_0^t r_k''(\tau)\, e^{b_k(t-\tau)}\, d\tau=0, \tag{25}$$

а также

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t r_k''(\tau)(t-\tau)\,e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)}\,d\tau=0, \tag{26}$$

учитывая, что $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\tau)\,e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)}=0$. Переходя в формулах (19), (20), (21) к пределу при $t\to\infty$ с учетом соответственно (24), (25) и (26), получим

$$\lim_{t\to\infty} T_k(t)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty). \tag{27}$$

Дифференцируя по t (19), (20), (21) и переходя в полученных равенствах к пределу при $t\to\infty$ с учетом (24), (25), (26) и того, что $\frac{b}{a}>0$, $a_k<0$, $b_k<0$, найдем также

$$\lim_{t\to\infty} T_k'(t)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty). \tag{28}$$

На основании (6) с учетом условий (17) заключаем, что при $c=0$ будет

$$\lim_{t\to\infty} E_{qt}^{(k)}(y,\ t)=0,\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{29}$$

Теперь, переходя к пределу при $t\to\infty$ в формуле (15) с учетом (16), (27) — (29) и $c=0$, найдем, что $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\ t)=u_\infty(x)$ существует, причем

$$u_\infty(x)=\int_\Gamma\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\partial\Delta_y^{n-q-1}G(x,y)}{\partial\nu_y}\,f_{q\infty}(y)\,d_y\Gamma-\int_D G(x,\ x_1)\,F_\infty(x_1)\,d_{x_1}D. \tag{30}$$

Сопоставление (30) с (1,5) или с формулой (11) из [3] показывает, что $u_\infty(x)$ является решением граничной задачи (18), что и доказывает теорему.

Рассмотренная теорема не исчерпывает вопроса о стабилизации решения задачи (1) — (5). Возможны и другие достаточные условия существования предела $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\ t)$. Например, имеет место

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) $c=(-1)^{n-1}|c|$ *либо* $|c|<|\lambda_1|$, *где* λ_1 — *наименьшее по абсолютной величине собственное число задачи* $\Delta^n S(x)+\lambda S(x)=0$, $x\in\bar D$, $\Delta^q S(y)=0$, $y\in\Gamma$, $q=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, *и если существуют пределы* $(x\in\bar D,\ y\in\Gamma)$:

$$\lim_{t\to\infty} F(x,\ t)=F_\infty(x),\ \lim_{t\to\infty}\Delta_x^n F_t^{(k)}(x,\ t)=0\ (k=1,\ 2), \tag{31}$$

$$\lim_{\to\infty}\Delta_y^q F_t^{(k)}(y,\ t)=0\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 4),$$

$$\lim_{t\to\infty} f_{qt}^{(k)}(y,\ t)=0\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 6;\ q=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

то существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\ t)=u_\infty(x)$, *причем* $u_\infty(x)$ *является решением граничной задачи*

$$\Delta^n u_\infty(x)=F_\infty(x);\ \Delta^q u_\infty(y)=0\ (q=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{32}$$

Доказательство этой теоремы проводится совершенно так же, как и доказательство первой теоремы. Опираясь на формулы (1,21), (1,25) и условия (31), заключаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} r_k''(t)=0$, Затем, используя неравенства (22), (23) и условия $\frac{b}{a} > 0$, $|c| < |\lambda_k|$ или $c = (-1)^{n-1}|c|$, получаем формулы (24) — (26). Далее, при помощи формул (19) — (21) с учетом (24) — (26) получаем (27) и (28), а на основании условий (31) получаем (29). Наконец, используя (27) — (29) и переходя к пределу в равенстве (15) при $t \to \infty$, находим, что

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = u_\infty(x) = -\int_D G(x, x_1) F_\infty(x_1)\, d_{x_1} D. \tag{33}$$

Сопоставление (33) с формулой (11) из [3] показывает, что $u_\infty(x)$ является решением граничной задачи (32).

Аналогичные результаты для волнового уравнения были получены Л. Г. Магнарадзе [4] и П. В. Черпаковым [5]. Поведение решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка при $t \to \infty$ исследовал также А. Г. Рамм [6].

г. Баку

Поступило
29 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Аникст Т. Л. Об одной смешанной задаче для одного класса полигармонических уравнений. Изв. вузов, Матем., 1966, № 3, с. 3—11.

2. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1954.

3. Аникст Т. Л. Об одном классе краевых задач для уравнения полигармонического типа. Учен. зап. Азербайджанск. ун-та, № 3, 1960, с. 27—33.

4. Магнарадзе Л. Г. Задача Дирихле как предельный случай задачи Коши—Дирихле для волнового уравнения, уравнения теплопроводности и аналогичных. Тр. Матем. ин-та ГрузССР, т. XI, 1942, с. 73—96.

5. Черпаков П. В. О некоторых соотношениях между решениями уравнений математической физики. Тр. Воронежск. ун-та, т. 61, 1962, с. 97—102.

6. Рамм А. Г. О поведении решения краевой задачи для гиперболического уравнения при $t \to \infty$. Изв. вузов, Матем., 1966, № 1, с. 124—138.

И. Х. БЕККЕР. О ГОЛОМОРФАХ НЕРЕДУЦИРОВАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматривается вопрос о характеристичности абелевых групп различных классов в своих голоморфах. Пусть $A(\Gamma)$ — группа всех автоморфизмов голоморфа Γ абелевой группы G. Группа G называется голоморфно разложимой, если из того, что $(g, \varphi) \in G^{\theta}$, $\theta \in A(\Gamma)$ следует (g, ε), $(0, \varphi) \in G^{\theta}$. Пусть π есть множество простых чисел, к которому относятся примарные компоненты G_p группы G вида $G_p = C(p^\infty) + \sum_{i=1}^{m_p}\{g_i\}$ ($C(p^\infty)$ — группа типа p^∞, $1 \leqslant m_p < \infty$); $G = G_p + G^{(p)}$. Доказана следующая

Теорема. *Смешанная нередуцированная голоморфно разложимая группа G характеристична в своем голоморфе, если она удовлетворяет одному из условий:* 1) $\pi = \varnothing$; 2) $\pi \neq \varnothing$ *и* $pG \neq G^{(p)}$ для $p \in \pi$.

В частности, всякая нередуцированная группа G без кручения характеристична в своем голоморфе. Смешанная нередуцированная группа G с автоморфизмом $g \to 2g$, $g \in G$, имеет совершенный голоморф тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из условий: 1) $\pi = \varnothing$; 2) $\pi \neq \varnothing$ и $pG^{(p)} \neq G^{(p)}$ для $p \in \pi$. (Работа поступила в журнал „Математика“ 23. VI. 1967.)