И. М. Кричевер, Потенциалы с нулевым коэффициентом отражения на фоне конечнозонных, *Функц. анализ и его прил.*, 1975, том 9, выпуск 2, 77–78

*Функциональный анализ и его приложения,*
т. 9, вып. 2, 1975, 77—78.

# ПОТЕНЦИАЛЫ С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ НА ФОНЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ

И. М. Кричевер

В самое последнее время с различных точек зрения был изучен класс конечнозонных потенциалов $u(x)$ оператора Штурма — Лиувилля $-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$ (см. [1], [2], [3]). В настоящей заметке дается алгебро-геометрическая конструкция потенциалов, частным случаем которых являются как конечнозонные, так и хорошо известные быстро убывающие потенциалы с нулевым коэффициентом отражения. В общем случае эти потенциалы соответствуют безотражательным потенциалам на фоне конечнозонных. Построение теории рассеяния для ассимптотически конечнозонных потенциалов будет дано в следующей работе.

Следует отметить, что для безотражательных потенциалов идея настоящей конструкции совпадает с идеей интерполяции [4], на которую автору было указано А. Б. Шабатом и которая стимулировала дальнейшие исследования.

**1.** Пусть $E$ — рациональная функция с простыми полюсами на гладкой алгебраической кривой $X$. Комплексная функция $u(x)$, $x\in(a, b)$, *обладает правильными аналитическими свойствами*, если существуют $\pi\colon Y\to X$ — двулистная накрывающая $X$ и функция $\Psi(x, P)$, $P\in Y$, такая что: 1°) вне полюсов $\widetilde{E}=\pi^*E$ она мероморфна, причем ее полюса не зависят от $x$; 2°) в окрестности полюсов $\widetilde{E}$ $\Psi(x, P)\,e^{i\sqrt{\widetilde{E}}(x-x_0)}$ — регулярная функция со значением в этих полюсах 1;

$$3^\circ)\qquad -\Psi''(x, P)+u(x)\Psi(x, P)=\widetilde{E}(P)\Psi(x, P). \tag{1}$$

Прежде чем сформулировать первую теорему, введем для каждого эффективного дивизора $D=\sum k_sP_s\geqslant 0$, т. е. $k_s\geqslant 0$, на $Y$ понятие допустимого дивизора. Пусть $T$ — инволюция $Y$, переставляющая листы, $D^+=T^*D$, а $-2D_\infty$ — дивизор полюсов $\widetilde{E}$. Обозначим через $\mathfrak{L}_-(\mathfrak{D})$ подпространство нечетных относительно $T^*$ функций из линейного пространства дивизора $\mathfrak{D}=D+D^++D_\infty$ $\mathfrak{L}(\mathfrak{D})$. Напомним, что линейным пространством дивизора называется пространство таких рациональных функций, что сумма этого дивизора с дивизорами нулей и полюсов их есть эффективный дивизор. Дивизор $d\geqslant 0$ допустим для $D$, если $\deg d=\dim\mathfrak{L}_-(\mathfrak{D})-1$, а $\dim(\mathfrak{L}_-(\mathfrak{D})\cap\mathfrak{L}(\mathfrak{D}-d))=1$.

Теорема 1. *Функция $\Psi(x, P)$, удовлетворяющая условиям 1°) и 2°), тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (1) с некоторым потенциалом $u(x)$, когда найдется допустимый для дивизора ее полюсов $D$ дивизор $d=\sum l_s\varkappa_s$ такой, что*

$$\frac{d^i}{dz^i}(\Psi(\Psi^+)^{-1})|_{\varkappa_s}=1,\qquad i=0,\ldots,l_s-1. \tag{2}$$

*Здесь* $\Psi^+=T^*\Psi$.

В предположениях теоремы при всех $x$ вронскиан $F=\Psi'\Psi^+-\Psi\Psi^{+\prime}\in\mathfrak{L}_-(\mathfrak{D})$. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что $F$ не зависит от $x$. При этом в нулях $F$ выполнены равенства (2). (Условимся выбирать среди них допустимый для $D$ дивизор $d$ на верхнем листе.) Наоборот, по определению $d$ из (2) следует постоянство $F$.

Определение. Дивизоры $D, d$ будут называться *данными рассеяния* для $u(x)$.

Теорема 2. *Для произвольного набора данных рассеяния тогда и только тогда разрешима обратная задача, когда $E$ — функция с одним простым полюсом на рациональной кривой.*

Доказательство теоремы 2 следует из сравнения размерности пространства, образованного функциями $\Psi(x, P)$, удовлетворяющими условиям 1°), 2°), с дивизором полюсов $D$, при фиксированном $x$, и числа уравнений (2), т. е. $\deg d$.

На гиперэллиптической кривой рода $g$ для дивизора $D$ степени $N$ существует допустимый дивизор $d$ тогда и только тогда, когда $N\geqslant g$. При этом $\deg d=N-g$. Конечнозонным потенциалам отвечает условие $\deg D=g$. Тогда $\deg d=0$ и $u(x)$ однозначно определяется дивизором $D$. Случаю безотражательных потенциалов соответствует гиперэлллиптическая кривая рода 0.

Замечание. Легко получить «формулу следов» для $u(x)$, задаваемого дивизорами $D$ и $d = \sum \varkappa_s$ на гиперэллиптической кривой $\Gamma_g \left( y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (E - E_i) \right)$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2g+1} E_i + 2 \sum_{s=1}^{N-g} \widetilde{E}(\varkappa_s) - 2 \sum_{k=1}^{N} \gamma_k(x).$$

Здесь $\gamma_k(x)$ — значения $\widetilde{E}$ в нулях $\Psi(x, P)$.

Следствие. *Пусть* $-\infty = E_0 \leqslant \ldots \leqslant E_{2g+1} < \infty$ *вещественны,* $\varkappa_s$ *принадлежат интервалам* $(E_{2n}, E_{2n+1})$, *точки* $D$ *лежат по одной в каждом из получившихся отрезков, тогда* $u(x)$ *— гладкая вещественная функция при* $x \to \pm\infty$, *экспоненциально стремящаяся к конечнозонным потенциалам* $u_{\pm}(x)$. *Потенциал* $u_+(x)$ *задается эффективным дивизором, эквивалентным* $D - d$, *а* $u_-(x)$ *— дивизором, эквивалентным* $D - d^+$.

Таким образом, дивизор $d$ задает сдвиг на множестве конечнозонных потенциалов. Для того чтобы он был нулевым ($u_+(x) = u_-(x)$), необходимо, чтобы $\deg d \geqslant g + 1$. (Наше внимание на наличие сдвига в случае солитонных возмущений однозонных потенциалов, изучение которых с иных позиций было предпринято в [5], было обращено В. Б. Матвеевым.)

2. В этом пункте даются явные формулы для $k$-солитонного потенциала на фоне $n$-зонного, а также аналог закона суперпозиции безотражательных потенциалов [1].

Пусть потенциал $u(x)$ задан дивизорами $D = P_1 + \ldots + P_{n+k}$ и $d = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_k$ на гиперэллиптической кривой $\Gamma_n$. Обозначим через $u_i(x)$ $n$-зонные потенциалы, задаваемые дивизорами $P_1 + \ldots + P_{n-1} + P_{n+i}$, $0 \leqslant i \leqslant k$; $\Psi_i(x, P)$ — соответствующие им блоховские функции.

Теорема 3. *Пусть* $K(x) = \int_{x_0}^{x} u(x)\,dx$, $K_i(x) = \int_{x_0}^{x} u_i(x)\,dx$, *тогда* $K(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) K_i(x)$, *где* $a_i(x)$ *— решения системы*

$$\sum_i a_i(x) (\Psi_i(x, \varkappa_s) - \Psi_i^+(x, \varkappa_s)) = 0, \qquad \sum_i a_i(x) = 1. \tag{3}$$

Функции $a_i(x)$ являются рациональными функциями $\Psi_i(x, \varkappa_s) - \Psi_i^+(x, \varkappa_s)$. Они в свою очередь рационально выражаются через односолитонные потенциалы на фоне $n$-зонных. Лишь громоздкость получающихся выражений заставляет нас ограничиться формулировкой теоремы.

Теорема 4. *$K(x)$ есть рациональная функция от интегралов от $n$-зонных потенциалов и односолитонных на фоне $n$-зонных.*

Для получения эффективных формул в случае $k$-солитонных возмущений однозонных потенциалов надо, кроме теоремы 3, использовать то, что блоховская функция, соответствующая однозонному потенциалу, задаваемому точкой $z_0$, есть

$$\Psi(x, z) = \frac{\sigma(z - z_0 - i(x - x_0))}{\sigma(z - z_0)} e^{i\zeta(z)(x - x_0)}.$$

Здесь $\sigma(z) = \sigma(z \mid \omega, \omega')$ и $\zeta(z) = \zeta(z \mid \omega, \omega')$ — $\sigma$- и $\zeta$-функции Вейерштрасса.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 23 августа 1974 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. П., Функц. анализ 8, вып. 3 (1974), 54—66. 2. Дубровин Б. А., Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 65—66. 3. Итс А. Р., Матвеев В. Б., Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 69—70. 4. Шабат А. Б., Динамика сплошной среды, вып. 5 (1970), Новосибирск, 130—145. 5. Кузнецов Е. А., Михайлов А. В., препринт № 19, ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР, Новосибирск, 1974.