Ш. Г. Касимов, О спектральных разложениях функций из класса С. М. Никольского,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 411–414

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 411–414

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА С.М. НИКОЛЬСКОГО

© 2005 г. Ш. Г. Касимов

Посвящается 60-летию академика
Шавката Арифджановича Алимова

Пусть Ω – произвольная N-мерная ограниченная область с гладкой границей класса C^∞ либо $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Определим класс символов $S^m(\Omega)$ как множество функций $a(x,y) \in C^\infty(\Omega \times \{\mathbb{R}^N \setminus 0\})$ таких, что для любого компакта $K \subset\subset \Omega$ и любых мультииндексов α, β выполняется неравенство

$$|D_x^\alpha D_y^\beta a(x,y)| \le \text{const} \cdot (1+|y|)^{m-|\beta|}$$

с постоянной, не зависящей от $x \in K$ и $y \in \mathbb{R}^N \setminus 0$.

Каждому символу $a(x,y) \in S^m(\Omega)$ формула

$$A(x,D)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x,y)\hat{f}(y)\exp(ixy)\,dy,$$

где

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\exp(-ixy)\,dx,$$

ставит в соответствие псевдодифференциальный оператор $A(x,D) \in OPS^m(\Omega)$.

Пусть A – какое-нибудь положительное самосопряженное расширение в $L_2(\Omega)$ эллиптического оператора $A(x,D)$ со скалярными однородными и с постоянными символами (определения этих классов символов см. в [1, с. 45, 70]).

Определим оператор

$$p(tA)f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(z)\exp(iztA)f(x)\,dz,$$

где $\hat{p}(z) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\exp(-i\lambda z)d\lambda$, причем оператор $\exp(iztA)$ понимается, как в спектральной теореме Неймана, т.е. $\exp(iztA) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(izt\lambda)dE_\lambda$, E_λ – разложение единицы, порождаемое оператором A. Всюду через $\sigma_A = \sigma(y)$ будем обозначать символ оператора A.

В частности, если положить

$$p(z) = (1-|z|)_+^s = \begin{cases} (1-|z|)^s & \text{при } |z| \le 1, \\ 0 & \text{при } |z| > 1, \end{cases}$$

$t = \lambda^{-1}$, то получим средние Рисса $E_\lambda^s f(x) = p(\lambda^{-1}A)f(x)$ спектрального разложения $E_\lambda f(x)$ порядка $s \ge 0$.

Спектральная функция и средние Рисса спектральных разложений подробно изучались разными авторами для эллиптических дифференциальных операторов. Особо отметим работу В.А. Ильина [2], посвященную оператору Лапласа, и последующее обобщение этого исследования на случай общего эллиптического дифференциального оператора второго порядка [3, 4]. Им впервые найдены окончательные условия, обеспечивающие равномерную сходимость средних Рисса в классах Соболева–Лиувилля и в классах Бесова [4].

Точные условия равномерной суммируемости средних Рисса спектральных разложений для эллиптических дифференциальных операторов порядка m с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$ установлены в работе [5].

Обозначим символом $\overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$ класс функций, принадлежащих пространству Лиувилля $L_p^\alpha(\Omega)$ и имеющих в Ω компактный носитель, а символом $\overset{o}{H}{}_p^\alpha(\Omega)$ класс функций, принадлежащих пространству Никольского $H_p^\alpha(\Omega)$ и имеющих в Ω компактный носитель (определение этих классов функций см. в [6]).

Основная цель настоящей работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функция* $p(\lambda)$, *определенная в* $\mathbb{R}_+$, *удовлетворяет условиям*

1) $\int_0^\infty |p(\lambda)|\lambda^{N/m-1}d\lambda < \infty$;

2) $p(\lambda) \in C^l(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *и* $|p^{(j)}(\lambda)| \le C(1+\lambda)^{-j}$, $j = \overline{0,l}$, *где* $l = [N/2]+1$;

3) $\int_{\mathbb{R}^N} |Q_\pm(y)|^q dy < \infty$, *где*

$$Q_\pm(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\sigma(\lambda))\sigma(\lambda)|\lambda|^{-\alpha\pm\varepsilon}\exp(-i\lambda y)d\lambda, \quad \varepsilon > 0,$$

$1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$. *Пусть* $v(t,x) = p(tA)u(x)$. *Тогда для любой непрерывной функции* $u(x) \in \overset{o}{H}{}_p^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha - N/p < m$ *(соответственно* $u(x) \in \overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$, $0 \le \alpha - N/p < m$, $\varepsilon = 0$) *с компактным носителем выполняется включение*

$$v(t,x) \in C^{(\alpha-N/p)/m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \times H_p^\alpha(M) \quad (v(t,x) \in C^{(\alpha-N/p)/m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \times L_p^\alpha(M)) \tag{1}$$

для любого компакта $M \subset\subset \Omega$.

Доказательство. Из работы [7] известно, что при любом $t > 0$ оператор $p(tA)$ равномерно ограниченно отображает класс функций $\overset{o}{H}{}_p^\alpha(\Omega)$ в $H_p^\alpha(M)$ (соответственно $\overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$ в $L_p^\alpha(M)$), т.е. при любом компакте $M \subset\subset \Omega$ и равномерно ограниченно по $t > 0$ получаем

$$v(t,x) \in H_p^\alpha(M) \quad (v(t,x) \in L_p^\alpha(M)).$$

Докажем, что $v(t,x) \in C^{(\alpha-N/p)/m}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ при любом $x \in M$. В самом деле, если $u(x) \in \overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$, то имеем

$$v(t_2,x) - v(t_1,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [p(t_2\sigma(y)) - p(t_1\sigma(y))]\exp(ixy)\hat{u}(y)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\int\limits_{t_1}^{t_2} p'(\tau\sigma(y))\sigma(y)d\tau\right]\exp(ixy)\hat{u}(y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\tau\sigma(y))\sigma(y)\exp(ixy)\hat{u}(y)dy\right]d\tau.$$

Так как $y^\nu\hat{u}(y) = \widehat{D^\nu u}(y)$, поэтому $|y|^\alpha\hat{u}(y) = \widehat{Bu}(y)$, где символ псевдодифференциального оператора $B = (-\Delta)^{\alpha/2}$ имеет вид $b(y) = |y|^\alpha$. Если $u(x) \in \overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$, то $Bu \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Тогда

$$|v(t_2,x) - v(t_1,x)| \le \int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\tau\sigma(y))\sigma(y)\exp(ixy)\hat{u}(y)dy\right|d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\tau\sigma(y))\sigma(y)|y|^{-\alpha}\exp(ixy)\widehat{Bu}(y)dy\right|d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} Q_1(\tau, y-x)Bu(y)dy\right|d\tau,$$

где

$$Q_1(\tau,y) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\tau\sigma(\lambda))\sigma(\lambda)|\lambda|^{-\alpha}\exp(-i\lambda y)d\lambda.$$

Отсюда

$$|v(t_2,x) - v(t_1,x)| \le \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Q_1(\tau,y)|^q dy\right)^{1/q} d\tau \|Bu(y)\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2}$$

С учетом однородности функции $\sigma(y)$ получаем

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Q_1(\tau, y)|^q dy\right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\sigma(\tau^{1/m}\lambda))\frac{\sigma(\tau^{1/m}\lambda)|\tau^{1/m}\lambda|^{-\alpha}}{\tau^{1-\alpha/m+N/m}}\exp\left(-i\tau^{1/m}\lambda\frac{1}{\tau^{1/m}}y\right)d(\tau^{1/m}\lambda)\right|^q dy\right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\sigma(\lambda))\frac{\sigma(\lambda)|\lambda|^{-\alpha}}{\tau^{1-\alpha/m+N/m}}\exp\left(-i\lambda\frac{1}{\tau^{1/m}}y\right)d\lambda\right|^q dy\right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} p'(\sigma(\lambda))\frac{\sigma(\lambda)|\lambda|^{-\alpha}}{\tau^{1-\alpha/m+N/(mp)}}\exp(-i\lambda y)d\lambda\right|^q dy\right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\frac{1}{\tau^{1-\alpha/m+N/(mp)}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Q(y)|^q dy\right)^{1/q},$$

где $Q(y) = \int_{\mathbb{R}^N} p'(\sigma(\lambda))\sigma(\lambda)|\lambda|^{-\alpha}\exp(-i\lambda y)d\lambda$. Тогда из неравенства (2) получаем

$$|v(t_2,x) - v(t_1,x)| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha/m+N/(mp)}}\frac{1}{(2\pi)^N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Q(y)|^q dy\right)^{1/q}\|Bu(y)\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\frac{m}{\alpha - N/p}(t_2^{\alpha/m-N/(mp)} - t_1^{\alpha/m-N/(mp)})\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Q(y)|^q dy\right)^{1/q}\|Bu(y)\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^N}\frac{m}{\alpha - N/p}C(t_2 - t_1)^{(\alpha-N/p)/m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Q(y)|^q dy\right)^{1/q}\|Bu(y)\|_{L_p(\mathbb{R}^N)},$$

где C не зависит от t_1 и t_2. Поэтому если $u(x) \in \overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$, то выполняется неравенство

$$|v(t_2,x) - v(t_1,x)| \leq \text{const}\cdot|t_2 - t_1|^{(\alpha-N/p)/m}\|u\|_{L_p^\alpha(\mathbb{R}^N)}. \tag{3}$$

Применяя метод вещественной интерполяции, имеем $H_p^\alpha = (L_p^{\alpha_0}, L_p^{\alpha_1})_{\theta,\infty}$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$. Следовательно, учитывая (3), получаем неравенство

$$|v(t_2,x) - v(t_1,x)| \leq \text{const}\cdot|t_2 - t_1|^{(\alpha-N/p)/m}\|u\|_{H_p^\alpha(\mathbb{R}^N)}$$

для любой функции $u(x) \in \overset{o}{H}{}_p^\alpha(\Omega)$ с компактным носителем. Таким образом, если $u(x) \in \overset{o}{H}{}_p^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha - N/p < m$ (соответственно $u(x) \in \overset{o}{L}{}_p^\alpha(\Omega)$, $0 \leq \alpha - N/p < m$), $1 \leq p \leq \infty$, с компактным носителем, то выполняется включение $v(t,x) \in C^{(\alpha-N/p)/m}(\mathbb{R}_+)\times H_p^\alpha(M)$ $(v(t,x) \in C^{(\alpha-N/p)/m}(\mathbb{R}_+)\times L_p^\alpha(M))$. Теорема доказана.

Пример. Если $p(\lambda) = \exp(-\lambda)$ при $\lambda \geq 0$, то функция

$$v(t,x) = p(tA)u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp(-t\sigma(y))\hat{u}(y)\exp(ixy)dy$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0, \quad x \in R^N, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad v|_{t=0} = u(x).$$

Пусть $N = 1$, $A = -d^2/dx^2$. Тогда

$$v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) u(y)dy.$$

Если $M = [0,1]$, $u(x) = x^\alpha(1-x)^\alpha$ при $0 \le x \le 1$, $u(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > 1$, то $u(x) \in C_0^\alpha(\mathbb{R})$. Далее,

$$v(t,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) y^\alpha(1-y)^\alpha dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\sqrt{t})^\alpha \int\limits_0^{1/(2\sqrt{t})} \exp(-y^2) y^\alpha (1-2\sqrt{t}y)^\alpha dy.$$

Отсюда получим

$$v(t,0) - v(0,0) \sim \mathrm{const} \cdot t^{\alpha/2} \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Этот пример показывает неулучшаемость теоремы при $p = \infty$, $m = 2$.

Автор выражает благодарность Ш.А. Алимову за внимание, проявленное к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М., 1985.
2. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2. С. 61–120.
3. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 49–73.
4. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
5. *Алимов Ш.А.* // Мат. сб. 1976. Т. 101 (143). № 1 (9). С. 3–20.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
7. *Касимов Ш.Г.* // Докл. АН РУз. 2002. № 4. С. 6–10.
8. *Касимов Ш.Г.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1371–1375.

Национальный университет Узбекистана,
г. Ташкент

Поступила в редакцию
07.07.2003 г.