Чан Чи Кьет, Об одной задаче с косой производной в пространстве Соболева $W^{s,p}$, $p > 1$,

Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 556–557

https://www.mathnet.ru/de11268

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 556–557

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.2

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $W^{s,p}$, $p > 1$

© 2005 г. **Чан Чи Кьет**

Эта задача впервые была изучена А.В. Бицадзе в работе [1]. После этой работы продолжили исследование таких задач Р.Л. Борелли, Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев, Нгуен Минь Чыонг, Ле Куанг Чунг, Чан Чи Кьет и др. (см., например, [2–4] и приведенную там библиографию). Но во всех этих работах изучение проводилось только в пространствах Соболева $W^{s,2}$. В пространстве $W^{s,p}$, $p \neq 2$, трудность заключается в том, что это пространство не является гильбертовым, в нем нет скалярного произведения и равенства Парсеваля–Live Планшереля.

Настоящая работа посвящена рассмотрению указанной задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа с высшим порядком в пространствах Соболева $W^{s,p}$, $p > 1$. Здесь используется специальное разбиение единицы и классификация многообразий Γ_0 (см. ниже) Ю.В. Егорова и В.А. Кондратьева [2].

Через $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, обозначается пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{s,p} \equiv \|u\|_{s,p}^{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

где s, $s \geq 0$, – целое число.

Естественным образом определяются $W^{s,p}(\Omega)$, $W^{s,p}(\partial\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $\partial\Omega$ – ее гладкая граница.

Рассмотрим задачу с гладкими коэффициентами

$$Au \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) = \sum_{k=1}^{m_j} B_{jk} D_n^{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) = g_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{2}$$

в случаях, когда поле $\vec{v}$ может касаться границы вдоль гладкого $(n-2)$-мерного многообразия Γ_0 и когда Γ_0 не касается $\vec{v}$. Для многообразия Γ_0 первого класса введем дополнительное условие

$$D_n^k u|_{\Gamma_0} = u_{0k}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{3}$$

Предполагается, что задача для дифференциальных операторов A, B_j является эллиптической.

Нам понадобится следующая известная лемма [5].

Лемма 1. *Пусть B_0, B, B' – банаховы пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$. Предполагается, что $B \hookrightarrow B_0$ является компактным вложением и $A : B \to B'$ – ограниченный линейный оператор. Тогда для того, чтобы $\dim\ker A < \infty$ и $\operatorname{Im} A$ замкнут в B', необходимо и достаточно, чтобы выполнялась априорная оценка $\|u\| \leq C(\|Au\|' + \|u\|_0)$, $u \in B$, где C не зависит от u.*

Пусть $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h(x) = 1$ в $d/2$-окрестности многообразия Γ_0, $h(x) = 0$ вне d-окрестности этого многообразия. Пусть $s \geq s_0 = \max(2r, m_j + 1)$, $\pi^{s,p}(\Omega)$ – пространство функций с конечной нормой $\|u\|_{\pi^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{s,p}^{\Omega} + \|\partial hu/\partial v\|_{s,p}^{\Omega} + \|hu\|_{s,p}^{\mathcal{N}}$, где $\mathcal{N}$ – многообразие, имеющее в локальной системе координат уравнение $z^1 = 0$ (см. [2]), и через $G^{s,p}(\partial\Omega)$ обозначим пространство функций, определенных на $\partial\Omega$ с конечной нормой $\|u\|_{G^{s,p}(\partial\Omega)} = \|u\|_{s,p}^{\partial\Omega} + \|hu\|_{s+1,p}^{\partial\Omega}$.

Теорема 1. *Пусть Γ_0 – многообразие первого класса и $f \in \pi^{s-2r,p}(\Omega)$, $g_j \in G^{s-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)$, $u_{0k} \in W^{s-k-1/p,p}(\Gamma_0)$. Пусть, кроме того, (f, g_j, u_{0k}) удовлетворяют конечному числу условий вида $F_i(f, g_j, u_{0k}) = 0$, где F_i – функционалы в некотором подпространстве пространства $\pi^{s-2r+1,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^r G^{s-m_j+1-1/p,p}(\partial\Omega) \times \prod_{k=0}^{r-1} W^{s-k-1/p,p}(\Gamma_0)$. Тогда задача (1), (2) имеет решение $u(x) \in \pi^{s,p}(\Omega)$.*

Теорема 2. *Пусть* Γ_0 *– многообразие третьего класса и*

$$f \in W^{s-2r+1,p}(\Omega), \quad g_j \in W^{s-m_j+1-1/p,p}(\partial\Omega).$$

Пусть, кроме того, (f, g_j) *удовлетворяют конечному числу условий вида* $F_i(f, g_j) = 0$, *где* F_i *– функционалы в* $W^{s-2r+1,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{r} W^{s-m_j+1-1/p,p}(\partial\Omega)$. *Тогда задача (1), (2) имеет решение* $u(x) \in W^{s,p}(\Omega)$.

Теорема 3. *i) Пусть* Γ_0 *– многообразие второго или третьего класса. Если* $u(x) \in W^{s,p}(\Omega)$ *является решением задачи (1), (2) и* $f \in W^{s-2r+1,p}(\Omega)$, $g_j \in W^{s-m_j+1-1/p,p}(\partial\Omega)$, *то*

$$\|u\|_{a,p}^{\Omega} \le C\left(\|f\|_{s-2r+1,p}^{\Omega} + \sum_{j=1}^{r} \|g_j\|_{s-m_j+1-1/p,p}^{\partial\Omega} + \|u\|_{s-1,p}^{\Omega}\right),$$

где C *не зависит от* u;

ii) пусть Γ_0 *– многообразие первого класса. Если* $u(x) \in W^{s,p}(\Omega)$ *является решением задачи (1)–(3) и* $f \in W^{s-2r+1,p}(\Omega)$, $g_j \in W^{s-m_j+1-1/p,p}(\partial\Omega)$, $u_{0k} \in W^{s-k-1/p,p}(\Gamma_0)$, *то*

$$\|u\|_{s,p}^{\Omega} \le C\left(\|f\|_{s-2r+1,p}^{\Omega} + \sum_{j=1}^{r} \|g_j\|_{s-m_j+1-1/p,p}^{\partial\Omega} + \sum_{k=0}^{r-1} \|u_{0k}\|_{s-k-1/p,p}^{\Gamma_0} + \|u\|_{s-1,p}^{\Omega}\right),$$

где C *не зависит от* u.

Для доказательства теорем 1–3 надо воспользоваться леммой 1, классическими результатами для эллиптических краевых задач в пространствах Соболева $W^{s,p}$, $p > 1$, из работ [6–8], альтернативой Фредгольма в банаховом пространстве [5] и техникой работ [3–5].

Отметим, что с помощью псевдодифференциальной формы для такой краевой задачи для уравнения Лапласа Ю.В. Егорову удалось получить оценки субэллиптического типа.

Автор выражает глубокую признательность Нгуен Минь Чыонгу за постановку задачи и внимание, проявленное к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 4. С. 749–752.
2. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* // Мат. сб. 1969. Т. 78. № 1. С. 148–176.
3. *Егоров Ю.В., Нгуен Минь Чыонг* // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. Вып. 6. С. 249–250.
4. *Ле Куанг Чунг* // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. Вып. 5. С. 169–170.
5. *Канторович Л.К., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.
6. *Adams R.A.* Sobolev spaces. Academic press, 1975.
7. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* // Comm. Pure and Applied Math. 1959. V. 12. P. 623–627.
8. *Агранович М.С.* // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 3–120.

Институт математики Государственного
центра науки и технологии,
Вьетнам, г. Ханой

Поступила в редакцию
23.06.2004 г.