А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями, *Журнал СВМО*, 2016, том 18, номер 4, 119–133

https://www.mathnet.ru/svmo633

УДК 517.95

Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями

© **А. В. Калинин** [1] **А. А. Тюхтина** [2]

Аннотация. Изучаются краевые задачи для периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении. Рассматривается случай неоднородных сред, содержащих проводящие, непроводящие и слабопроводящие включения. Исследуется асимптотическая связь решений задач с непроводящими и слабопроводящими включениями.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное магнитное приближение, периодические решения, неоднородные среды, граничные условия электрического и магнитного типа, непроводящие и слабопроводящие включения.

1. Введение

Широкий класс современных технологических проблем приводит к изучению математических задач для квазистационарных электромагнитных полей в физически неоднородных средах [1], [2]. Квазистационарное магнитное приближение для системы уравнений Максвелла используется при проектировании различных электромагнитных устройств [3]–[7] и при решении актуальных задач современной медицины [8].

Актуальность построения и обоснования эффективных численных алгоритмов для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении обуславливает многообразие современных публикаций, посвященных, в частности, изучению вопросов корректности различных постановок задач (см. [2], [9], [10] и библиографию в них).

Доказательство теорем существования и единственности и исследование свойств поставленных краевых и начально-краевых задач опирается на неравенства, связывающие нормы вектор-функции, её ротора и дивергенции [11]–[14]. При рассмотрении неоднородных физических сред могут быть эффективно использованы оценки не для норм, а для скалярных произведений векторных полей. В настоящей работе рассматриваются неравенства для скалярных произведений векторных полей, обобщающие полученные в [11]–[15] оценки.

Типичной в прикладных задачах является ситуация, когда рассматриваемые области содержат проводящие и непроводящие материалы [2]. С целью преодоления при численном решении задач алгоритмических усложнений, связанных с различным описанием полей в проводящих и непроводящих областях [16], в [17], [18] был исследован подход, заключающийся в замене непроводящих областей слабопроводящими с последующим предельным переходом. В настоящей работе этот метод обосновывается для периодических по времени решений краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в области, состоящей из проводника с непроводящими включениями, окруженного слоем изолятора.

[1] Доцент кафедры математической физики и оптимального управления, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; avk@mm.unn.ru

[2] Доцент кафедры математического моделирования экономических процессов, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kalinmm@yandex.ru

2. Постановка задач и основные результаты

Для описания периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении используется следующая система уравнений [2]:

$$\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}), \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x}) = 0, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{x}) = -i\omega\vec{B}(\vec{x}), \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}), \tag{2.4}$$

где $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{J}\colon \Omega \to \mathbb{C}^3$ и $\rho\colon \Omega \to \mathbb{C}^1$ – неизвестные функции, $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Реальные физические поля определяются в этом случае как $Re[\vec{H}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $Re[\vec{B}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $Re[\vec{E}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $Re[\vec{D}(\vec{x})e^{i\omega t}(\vec{x})]$, $Re[\vec{J}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $Re[\rho(\vec{x})e^{i\omega t}] = \mathrm{div}(Re[\vec{D}e^{i\omega t}])$.

В работе предполагается, что $\omega \geq 0$. При $\omega = 0$ уравнения (2.1)-(2.4) образуют стационарную систему уравнений Максвелла, в которой $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{J}$ и ρ – действительные функции.

В линейных средах справедливы материальные соотношения

$$\vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{D} = \epsilon\vec{E},\ \vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{\text{ст}}, \tag{2.5}$$

где μ – тензор магнитной проницаемости среды, ϵ – тензор диэлектрической проницаемости, σ – тензор проводимости, $\vec{J}^{\text{ст}}$ – плотность тока источников.

В работе предполагается, что Ω – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с липшицевой границей Γ, $\vec{\nu}(\vec{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\vec{x} \in \partial\Omega$. Для функций $\vec{u} : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}^3$ через $\vec{u}_\nu$, $\vec{u}_\tau$ обозначаются соответственно нормальная и касательная компоненты функции на границе области.

Система (2.1)–(2.5) рассматривается при двух вариантах краевых условий – условиях магнитного типа

$$\vec{H}_\tau(\vec{x}) = \vec{0},\ \vec{x} \in \Gamma, \tag{2.6}$$

и условиях электрического типа

$$\vec{E}_\tau(\vec{x}) = \vec{0},\ \vec{B}_\nu(\vec{x}) = \vec{0},\ \vec{x} \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Пусть Ω_1, $\Omega_{0,j}$, $j = 1, ..., k$ – гомеоморфные шару области с липшицевыми границами Γ_1 и $\Gamma_{0,j}$ соответственно, такие, что $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\bar{\Omega}_{0,j} \subset \Omega_1$, $\bar{\Omega}_{0,j} \cap \bar{\Omega}_{0,s} = \emptyset$ при $j \neq s$. Обозначим $\Omega_0 = \cup_{j=1}^k \Omega_{0,j}$. Предполагается, что подобласть $\Omega_C = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$ занята проводником, $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, Ω_0 – непроводящим материалом. Положим $\Omega_I = \Omega \setminus \bar{\Omega}_C = (\Omega \setminus \bar{\Omega}_1) \cup \Omega_0$. Через $\vec{\nu}_C(\vec{x})$, $\vec{\nu}_I(\vec{x})$ обозначаются единичные вектора внешней нормали в точке $\vec{x} \in \partial\Omega_C$ и $\vec{x} \in \partial\Omega_I$ соответственно, $\vec{\nu}_C(\vec{x}) + \vec{\nu}_I(\vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Для функций $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{C}^3$, $u : \Omega \to \mathbb{C}^1$ через $\vec{u}_C$, u_C обозначаются их сужения на область Ω_C, через $\vec{u}_I$, u_I – сужения на Ω_I.

Предполагается, что $\vec{J}^{\text{ст}}\colon \Omega \to \mathbb{C}^3$ – заданная суммируемая с квадратом функция, μ, ϵ – самосопряженные непрерывные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям

$$\epsilon_1\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega} \leq (\epsilon\vec{u}, \vec{u})_{2,\Omega} \leq \epsilon_2\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega},\ \mu_1\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega} \leq (\mu\vec{u}, \vec{u})_{2,\Omega} \leq \mu_2\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega},$$

$\sigma = \sigma(\vec{x})$ – симметричная 3×3 матрица измеримых функций $\Omega \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = 0,\ i, j = 1, 2, 3,\ \text{при почти всех}\ \vec{x} \in \Omega_I,$$

$$\sigma_1|\vec{\xi}|^2 \leq (\sigma(\vec{x})\vec{\xi},\vec{\xi}) \leq \sigma_2|\vec{\xi}|^2 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \Omega_C \text{ и всех } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3,$$

где μ_i, σ_i, ε_i, ($i = 1,2$) – заданные положительные числа, через $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ и $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega}$ обозначаются норма и скалярное произведение в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

В работе рассматриваются обобщённые решения краевых задач, для которых все равенства должны выполняться в смысле теории распределений, а граничные условия – в смысле теории следов [14], [19].

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [14], [19]:

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{div}\vec{u} \in L_2(\Omega)\},\ K(\mathrm{div};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{div}\vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{div,\Omega} = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}})d\vec{x} + \int_\Omega (\mathrm{div}\vec{u}\mathrm{div}\overline{\vec{v}})d\vec{x},$$

$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{rot}\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},\ K(\mathrm{rot};\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{rot}\vec{u} = \vec{0}\},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{rot,\Omega} = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}})d\vec{x} + \int_\Omega (\mathrm{rot}\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x}.$$

Через $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $H_0(\mathrm{div};\Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ и $H(\mathrm{div};\Omega)$ соответственно, $K_0(\mathrm{div};\Omega) = K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, $K_0(\mathrm{rot};\Omega) = K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Обобщённая постановка краевых задач основана на следующих утверждениях [14].

Теорема 2.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Отображение $\vec{u} \mapsto \vec{u}\cdot\vec{\nu}$, определенное на $\{\mathcal{D}(\bar{G})\}^3$, может быть продолжено до линейного непрерывного оператора $\gamma_\nu : H(\mathrm{div};G) \to H^{-1/2}(\partial G)$. Для всех $\vec{u} \in H(\mathrm{div};G)$ и $w \in H^1(G)$ верна следующая формула Грина:*

$$<\gamma_\nu\vec{u}, w> = \int_G (\vec{u}\cdot\mathrm{grad}\bar{w})d\vec{x} + \int_G w\mathrm{div}\overline{\vec{u}}d\vec{x}.$$

Ядро оператора γ_ν совпадает с $H_0(\mathrm{div};G)$, $\|\gamma_\nu\| = 1$.

Лемма 2.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Функция $\vec{u} \in H(\mathrm{rot};G)$ лежит в классе $H_0(\mathrm{rot};G)$ тогда и только тогда, когда при всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};G)$*

$$\int_G (\mathrm{rot}\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}})d\vec{x} = \int_G (\mathrm{rot}\vec{v}\cdot\overline{\vec{u}})d\vec{x}.$$

Решением задачи (2.1)–(2.6) называются удовлетворяющие равенствам (2.1), (2.3)–(2.5) функции $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{B} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{J} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{E} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{D} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\rho \in H^{-1}(\Omega)$.

Решением задачи (2.1)–(2.5), (2.7) называются удовлетворяющие равенствам (2.1), (2.3) – (2.5) функции $\vec{H} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{B} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{J} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{E} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{D} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\rho \in H^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что при $\omega > 0$ условие $\vec{B}_\nu(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma$ в (2.7) вытекает из равенства (2.3) и условия $\vec{E}_\tau(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma$.

В работе используются также следующие гильбертовы пространства:

$$K(\mathrm{div}\mu;\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mu\vec{u} \in K(\mathrm{div};\Omega)\},$$

$$K_0(\mathrm{div}\mu;\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mu\vec{u} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)\},$$

$$V^1(\mu;\Omega) = H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div}\mu;\Omega),\ V^2(\mu;\Omega) = H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div}\mu;\Omega),$$

$$V_0^j(\mu;\Omega) = \{\vec{u} \in V^j(\mu;\Omega) : \mathrm{rot}\vec{u}_I = \vec{0}\}, \ j = 1,2, \ (\vec{u},\vec{v})_V = (\vec{u},\vec{v})_{rot,\Omega}.$$

Используя (2.2), (2.5), получаем задачу определения функций $\vec{H} \in V^1(\mu;\Omega)$, $\vec{E} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ или $\vec{H} \in V^2(\mu;\Omega)$, $\vec{E} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ таких, что

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{\text{ст}}, \ \mathrm{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}. \tag{2.8}$$

Предполагается, что функция $\vec{J}^{\text{ст}}$ удовлетворяет в задаче (2.1)–(2.6) условиям

$$\mathrm{div}\vec{J}_I^{\text{ст}} = 0, \ \gamma_\nu(\vec{J}_I^{\text{ст}})(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in \Gamma, \tag{2.9}$$

а в случае задачи (2.1)–(2.5), (2.7) – условиям

$$\mathrm{div}\vec{J}_I^{\text{ст}} = 0, \ \langle\gamma_\nu(\vec{J}_I^{\text{ст}}), 1\rangle_\Gamma = 0. \tag{2.10}$$

Используя лемму 2.1. получаем, что задачи (2.8) сводятся к задачам определения функций $\vec{H} \in V^j(\mu;\Omega)$ таких, что

$$\mathrm{rot}\vec{H}_I = \vec{J}_I^{\text{ст}} \tag{2.11}$$

и для всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu;\Omega)$ справедливо равенство

$$i\omega\int_\Omega(\mu\vec{H}\cdot\overline{\vec{w}})d\vec{x} + \int_{\Omega_C}(\sigma^{-1}\mathrm{rot}\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x} = \int_{\Omega_C}(\sigma^{-1}\vec{J}_C^{\text{ст}}\cdot\mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x}. \tag{2.12}$$

Пусть $\vec{H}$ – решение задачи (2.11), (2.12). Для однозначного определения функции $\vec{E}$ во всей области Ω предположим, что неизвестная функция $\vec{E}$ должна удовлетворять в задаче (2.1)–(2.6) дополнительным условиям

$$\mathrm{div}(\epsilon\vec{E})_I = \rho_0, \ \gamma_\nu(\epsilon\vec{E})(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in \Gamma, \tag{2.13}$$

а в задаче (2.1)–(2.5), (2.7) – условиям

$$\mathrm{div}(\epsilon\vec{E})_I = \rho_0, \ \vec{E}_\tau(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in \Gamma, \ \langle\gamma_\nu(\epsilon\vec{E}), 1\rangle_{\Gamma_1} = Q, \tag{2.14}$$

где $\rho_0 \in L_2(\Omega_I)$ – заданная функция, например, $\rho_0 \equiv 0$ [2], Q – заданная константа.

Если $\omega = 0$, задача (2.1)–(2.6) может рассматриваться также при условиях (2.14).

В работе доказываются следующие утверждения:

Теорема 2.2. *Каждая из задач* (2.11), (2.12) *имеет единственное решение.*

Теорема 2.3. *Задачи* (2.1)–(2.6), (2.13) *и* (2.1)–(2.5), (2.7), (2.14) *имеют единственные решения. При* $\omega = 0$ *существует единственное решении задачи* (2.1)–(2.6), (2.14).

Пусть $\lambda > 0$. Определим тензор σ_λ соотношением

$$\sigma_\lambda(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma(\vec{x}), \ \vec{x} \in \Omega_C, \\ \lambda I, \ \vec{x} \in \Omega_I, \end{cases}$$

где I – единичная матрица.

Рассмотрим задачи (2.8), в которых тензор σ заменён на σ_λ:

$$\mathrm{rot}\vec{H}_\lambda = \sigma_\lambda\vec{E}_\lambda + \vec{J}^{\text{ст}}, \ \mathrm{rot}\vec{E}_\lambda = -i\omega\mu\vec{H}_\lambda. \tag{2.15}$$

Теорема 2.4. *Система* (2.15) *имеет единственное решение* $\vec{H}_\lambda \in V^1(\mu;\Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *и единственное решение* $\vec{H}_\lambda \in V^2(\mu;\Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Теорема 2.5. *При* $\lambda \to 0$ *решение* $\vec{H}_\lambda \in V^j(\mu;\Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ ($j = 1,2$) *системы* (2.15) *стремится к решению* $\vec{H} \in V^j(\mu;\Omega)$, $\vec{E} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *системы* (2.8) *по норме пространства* $H(\mathrm{rot};\Omega)$. *При* $\lambda < 1$ *справедливы оценки*

$$\|\vec{H}_\lambda - \vec{H}\|_{rot,\Omega} \leq C\sqrt{\lambda}\|\vec{J}^{cm}\|_{2,\Omega},\ \|\vec{E}_\lambda - \vec{E}\|_{rot} \leq C\sqrt{\lambda}\|\vec{J}^{cm}\|_{2,\Omega},$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* λ.

3. Предварительные утверждения

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшицевой границей Γ, $\vec{\nu}(\vec{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\vec{x} \in \Gamma$. Справедливы следующие утверждения [14], [20].

Лемма 3.1. *Для любой функции* $\vec{u} \in K(\mathrm{rot};G)$ *найдется функция* $p \in H^1(G)$ *такая, что* $\vec{u} = \mathrm{grad}p$. *Если при этом* $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};G)$, *то можно взять* $p \in H_0^1(G)$.

Лемма 3.2. *(неравенство Пуанкаре). Найдётся такая постоянная* $T(G) > 0$, *зависящая только от области* G, *что для всех* $p \in H^1(G)$

$$\int_G p^2 d\vec{x} \leq T(G)\left(\int_G (\mathrm{grad}p)^2 d\vec{x} + \left|\int_G p d\vec{x}\right|^2\right).$$

Лемма 3.3. *(неравенство Фридрихса) Пусть* $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $mes(\Gamma_1) > 0$. *Найдётся такая постоянная* $A(G,\Gamma_1) > 0$, *зависящая только от* G *и* Γ_1, *что для всех* $p \in H^1(G)$

$$\int_G p^2 d\vec{x} \leq A(G,\Gamma_1)\left(\int_G (\mathrm{grad}p)^2 d\vec{x} + \left|\int_{\Gamma_1} p d\gamma\right|^2\right). \tag{3.1}$$

Лемма 3.4. *Пусть* $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *удовлетворяет условию* $\langle f, 1\rangle = 0$. *Тогда найдётся функция* $\vec{u} \in K(\mathrm{div};G)$ *такая, что* $\gamma_\nu \vec{u} = f$ *и* $\|\vec{u}\|_{2,G} \leq C_\nu \|f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$, *где константа* $C_\nu > 0$ *зависит только от области* G.

Пусть $B \subset R^3$ – некоторый открытый шар такой, что $\bar{G} \subset B$. Из доказанных в [15] оценок вытекают следующие неравенства.

Лемма 3.5. *Существует такая постоянная* $C_1(B) > 0$ *зависящая только от области* B, *что для всех* $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};B)$, $\vec{v} \in H(\mathrm{div};B)$

$$|(\vec{u},\vec{v})_{2,B}| \leq C_1(B)\left(\|\vec{u}\|_{2,B}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,B} + \|\vec{v}\|_{2,B}\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,B}\right), \tag{3.2}$$

для всех $\vec{u} \in H(\mathrm{rot};B)$, $\vec{v} \in H_0(\mathrm{div};B)$

$$|(\vec{u},\vec{v})_{2,B}| \leq C_1(B)\left(\|\vec{u}\|_{2,B}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,B} + \|\vec{v}\|_{2,B}\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,B} + \|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,B}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,B}\right). \tag{3.3}$$

Далее предполагается, что липшицева область G гомеоморфна шару. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 3.6. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения* E_{div} : $H(\mathrm{div}; G) \to H(\mathrm{div}; B)$ *, удовлетворяющий условию*

$$\mathrm{div} E_{div}(\vec{u})(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in B \setminus \bar{G}, \ \vec{u} \in H(\mathrm{div}; G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H(\mathrm{div}; G)$. Согласно теореме 2.1. $\gamma_\nu \vec{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\|\gamma_\nu \vec{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\vec{u}\|_{div,G}$. Через $\vec{\nu}_e$ обозначается вектор внешней по отношению к области $B \setminus \bar{G}$ нормали к границе $\Gamma \cup \partial B$, $\vec{\nu}_e(\vec{x}) = -\vec{\nu}(\vec{x})$ при $\vec{x} \in \Gamma$. Существует единственное решение $p \in H^1(B \setminus \bar{G})$ задачи Неймана

$$\Delta p(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in B \setminus \bar{G},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_e}(\vec{x}) = -\gamma_\nu \vec{u}(\vec{x}), \ x \in \Gamma, \ \frac{\partial p}{\partial \nu_e}(\vec{x}) = const = \langle \gamma_\nu \vec{u}, mes^{-1}(\partial B) \rangle, \ \vec{x} \in \partial B,$$

удовлетворяющее условию $\int_{B \setminus \bar{G}} p(\vec{x}) d\vec{x} = 0$ [14]. При этом справедливо неравенство

$$\|\mathrm{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}} \leq \|\gamma_0\| (T(B \setminus \bar{G}) + 1)^{1/2} \|\partial p / \partial \nu_e\|_{H^{-1/2}(\Gamma \cup \partial B)},$$

где $T(B \setminus \bar{G})$ – константа из неравенства Пуанкаре, $\gamma_0 : H^1(B \setminus \bar{G}) \to H^{1/2}(\partial B \cup \Gamma)$ – оператор следа. Таким образом, $\|\mathrm{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}} \leq C \|\vec{u}\|_{div,G}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от G и B . Положим

$$E_{div}(\vec{u})(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{u}(\vec{x}), \ \vec{x} \in G, \\ \mathrm{grad} p(\vec{x}), \ \vec{x} \in B \setminus \bar{G}. \end{cases}$$

По построению $E_{div}(\vec{u}) \in H(\mathrm{div}; G)$,

$$\|E_{div}(\vec{u})\|^2_{2,B} = \|\vec{u}\|^2_{2,G} + \|\mathrm{grad} p\|^2_{2, B \setminus \bar{G}} \leq (1 + C^2) \|\vec{u}\|^2_{div,G}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 3.7. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения* E_{rot} : $H(\mathrm{rot}; G) \to H(\mathrm{rot}; B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H(\mathrm{rot}; G)$. Тогда $\vec{F} = \mathrm{rot} \vec{u} \in K(\mathrm{div}; G)$. Применяя лемму 3.6., определяем функцию $E_{div}(\vec{F}) = \vec{F}^* \in K(\mathrm{div}; B)$, причём $\|\vec{F}^*\|_{2,B} \leq \|E_{div}\| \|\vec{F}\|_{2,G}$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма найдётся единственная функция $\vec{u}^* \in H(\mathrm{rot}; B) \cap K_0(\mathrm{div}; B)$, при всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot}; B) \cap K_0(\mathrm{div}; B)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_B (\mathrm{rot} \vec{u}^* \cdot \mathrm{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_B (\vec{F}^* \cdot \mathrm{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Можно показать [15], что из этого равенства вытекает, что $\mathrm{rot} \vec{u}^* = \vec{F}^*$ и при этом, согласно оценке (3.3),

$$\|\vec{u}^*\|_{rot,B} \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2} \|\vec{F}^*\|_{2,B}.$$

Таким образом, построен линейный ограниченный оператор, ставящий в соответствие функции $\vec{F} = \mathrm{rot} \vec{u} \in K(\mathrm{div}; G)$ функцию $\vec{u}^* \in H(\mathrm{rot}; B)$ такую, что

$$\mathrm{rot} \vec{u}^*(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}), \ \vec{x} \in G. \tag{3.4}$$

Обозначим построенный оператор через $E^* : K(\mathrm{div}; G) \to H(\mathrm{rot}; B)$. В соответствии с (3.4) можно записать

$$\mathrm{rot}E^*(\mathrm{rot}\vec{u})(\vec{x}) = \mathrm{rot}\vec{u}(\vec{x}),\ \vec{x} \in G.$$

Очевидно, $\|E^*\| \le (1 + C_1^2(B))^{1/2}\|E_{div}\|$. Из леммы 3.1. следует, что для некоторого $q \in H^1(G)$, удовлетворяющего условию $\int_G q(\vec{x})d\vec{x} = 0$, выполнено

$$\vec{u}(\vec{x}) - E^*(\mathrm{rot}\vec{u})(\vec{x}) = \mathrm{grad}q(\vec{x}),\ \vec{x} \in G.$$

Определим $q^* \in H^1(B)$ как

$$q^*(\vec{x}) = \begin{cases} q(\vec{x}),\ \vec{x} \in G, \\ \tilde{q}(\vec{x}),\ \vec{x} \in B \setminus G, \end{cases}$$

где $\tilde{q}$ – решение задачи

$$\Delta\tilde{q}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in B \setminus \bar{G},\ \tilde{q}(\vec{x}) = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Gamma,\ \tilde{q}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial B.$$

Тогда, согласно теореме 2.1.,

$$\|\mathrm{grad}\tilde{q}\|_{2,B\setminus\bar{G}} \le \|\gamma_0\|(T(G)+1)^{1/2}\|\mathrm{grad}q\|_{2,G} \le \|\gamma_0\|(T(G)+1)^{1/2}(\|\vec{u}\|_{2,G} + \|E^*(\mathrm{rot}\vec{u})\|_{2,G}) \le$$

$$\le \|\gamma_0\|(T^2(G)+1)^{1/2}(1 + (1 + C_1^2(B))^{1/2}\|E_{div}\|)\|\vec{u}\|_{rot,G}.$$

Поэтому

$$\|\mathrm{grad}q^*\|_{2,G}^2 = \|\mathrm{grad}q\|_{2,G}^2 + \|\mathrm{grad}\tilde{q}\|_{2,B\setminus\bar{G}}^2 \le C(G,B)\|\vec{u}\|_{rot,G}^2,$$

где $C(G,B) = (1 + (1 + C_1^2(B))\|E_{div}\|^2)(1 + 2\|\gamma_0\|^2(T(G)+1))$. Положив

$$E_{rot}(\vec{u}) = E^*(\mathrm{rot}\vec{u}) + \mathrm{grad}q^*(\vec{x}),$$

получим утверждение леммы, $\|E_{rot}\| \le (1 + C_1^2(B))^{1/2}\|E_{div}\| + C^{1/2}(G,B)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из лемм 3.5.–3.7. вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – открытое ограниченное множество с липшицевой границей, гомеоморфное шару. Существует постоянная $C(G) > 0$, зависящая только от области G такая, что неравенство*

$$|(\vec{u},\vec{v})_{2,G}| \le C(G)\left(\|\vec{u}\|_{2,G}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G}\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,G} + \|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,G}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G}\right) \tag{3.5}$$

выполняется для любых $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot}; G)$, $\vec{v} \in H(\mathrm{div}; G)$, а также для любых $\vec{u} \in H(\mathrm{rot}; G)$, $\vec{v} \in H_0(\mathrm{div}; G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot}; G)$, $\vec{v} \in H(\mathrm{div}; G)$. Функцию $\vec{u}$ продолжаем нулём до функции из $H_0(\mathrm{rot}; B)$. Положим $\vec{v}^* = E_{div}(\vec{v})$. Применяя неравенство (3.2), получим

$$|(\vec{u},\vec{v}^*)_{2,B}| \le C_1(B)\left(\|\vec{u}\|_{2,B}\|\mathrm{div}\vec{v}^*\|_{2,B} + \|\vec{v}^*\|_{2,B}\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,B}\right).$$

Учитывая, что в левой части неравенства можно перейти к интегрированию по области G, $\|\vec{u}\|_{2,B} = \|\vec{u}\|_{2,G}$, $\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,B} = \|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,G}$, получаем

$$|(\vec{u},\vec{v})_{2,G}| \le C_1(B)\left(\|\vec{u}\|_{2,G}\|\mathrm{div}\vec{v}^*\|_{2,B} + \|\vec{v}^*\|_{2,B}\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,G}\right) \le$$

$$\le C_1(B)\left(\|\vec{u}\|_{2,G}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|E_{div}\|(\|\vec{v}\|_{2,G} + \|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G})\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,G}\right).$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.5), где в качестве $C(G)$ можно взять $C(G) = C_1(B)\max\{1, \|E_{div}\|\}$.

Пусть $\vec{u} \in H(\mathrm{rot}; G)$, $\vec{v} \in H_0(\mathrm{div}; G)$. Функцию $\vec{v}$ продолжаем нулём до функции из $H_0(\mathrm{div}; B)$. Положим $\vec{u}^* = E_{rot}(\vec{u})$. Применяя неравенство (3.3), получим

$$|(\vec{u}^*, \vec{v})_{2,B}| \le C_1(B)\left(\|\vec{u}^*\|_{2,B}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,B} + \|\vec{v}\|_{2,B}\|\mathrm{rot}\vec{u}^*\|_{2,B} + \|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,B}\|\mathrm{rot}\vec{u}^*\|_{2,B}\right).$$

Учитывая, что в левой части неравенства можно перейти к интегрированию по области G, $\|\vec{v}\|_{2,B} = \|\vec{v}\|_{2,G}$, $\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,B} = \|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G}$, получаем

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2,G}| \le C_1(B)\left(\|\vec{u}^*\|_{2,B}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G}\|\mathrm{rot}\vec{u}^*\|_{2,B} + \|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G}\|\mathrm{rot}\vec{u}^*\|_{2,B}\right) \le$$

$$\le C_1(B)\left(\|E_{rot}\|\|\vec{u}\|_{rot,G}\|\mathrm{div}\vec{v}\|_{2,G} + \|E_{div}\|\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,G}\|\vec{v}\|_{div,G}\right).$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.5), где в качестве $C(G)$ можно взять $C(G) = C_1(B)(\|E_{div}\| + \|E_{rot}\|)$.
Доказательство закончено.

Пусть $\eta : \{L_2(G)\}^3 \to \{L_2(G)\}^3$ – непрерывный линейный самосопряженный оператор такой, что при некоторых η_1, $\eta_2 > 0$

$$\eta_1\|\vec{u}\|^2_{2,G} \le (\eta\vec{u}, \vec{u})_{2,G} \le \eta_2\|\vec{u}\|^2_{2,G}$$

для всех $\vec{u} \in \{L_2(G)\}^3$. Обозначим через $\{L_2(\eta; G)\}^3$ пространство $\{L_2(G)\}^3$, снабженное скалярным произведением $(\vec{u}, \vec{v})_\eta = (\eta\vec{u}, \vec{v})_{2,G}$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.8. *Ортогональное дополнение к $K(\mathrm{div}\eta; G)$ в $\{L_2(\eta; G)\}^3$ совпадает с подпространством $K_0(\mathrm{rot}; G)$.*

Лемма 3.9. *Ортогональное дополнение к $K_0(\mathrm{div}\eta; G)$ в $\{L_2(\eta; G)\}^3$ совпадает с подпространством $K(\mathrm{rot}; G)$.*

Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлеворяет условиям, сформулированным при постановке краевых задач.

Лемма 3.10. *Пусть $K_{0,I}(\mathrm{div}; \Omega_I) = \{\vec{w} \in K(\mathrm{div}; \Omega_I) : \langle\gamma_\nu\vec{w}, 1\rangle_\Gamma = 0\}$. Существует линейный непрерывный оператор продолжения $E^C_{div} : K_{0,I}(\mathrm{div}; \Omega_I) \to K(\mathrm{div}; \Omega)$. Если при этом $\vec{w}_\nu(\vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \Gamma$, то $E^C_{div}\vec{w} \in K_0(\mathrm{div}; \Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\vec{w} \in K_{0,I}(\mathrm{div}; \Omega_I)$. Тогда $\langle\gamma_{\nu_I}\vec{w}, 1\rangle_{\Gamma_j} = 0$, $j = 0, 1$. Существует единственное решение $p \in H^1(\Omega_C)$ задачи Неймана

$$\Delta p(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Omega_C,\ \frac{\partial p(\vec{x})}{\partial\nu_C} = -\gamma_{\nu_I}\vec{w}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

такое, что $\int_{\Omega_C} p d\vec{x} = 0$. Для любой функции $q \in H^1(\Omega_C)$

$$\int_{\Omega_C}(\mathrm{grad}p \cdot \mathrm{grad}q)d\vec{x} = -\langle\gamma_{\nu_I}\vec{w}, \gamma_0 q\rangle.$$

Поэтому

$$\|\mathrm{grad}p\|_{2,\Omega_C} \le C\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I},$$

где $C = \|\gamma_0\|(1 + T(\Omega_C))^{1/2}$, $\gamma_0 : H^1(\Omega_C) \to H^{1/2}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ – оператор следа.

Определим функцию $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$ соотношением

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{cases} \mathrm{grad}p(\vec{x}), \ \vec{x} \in \Omega_C, \\ \vec{w}(\vec{x}), \ \vec{x} \in \Omega_I. \end{cases}$$

Положим $E^C_{div}\vec{w} = \vec{v}$,

$$\|E^C_{div}\vec{w}\| = \|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{C^2+1}\|\vec{w}\|_{2,\Omega_I}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 3.11. *Найдётся такая постоянная $T(\Omega_C,\Omega_I) > 0$, зависящая только от областей Ω_C, Ω_I, что для всех функций $\vec{w} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, удовлетворяющих условиям $\vec{w}_I \in K_{0,I}(\mathrm{div};\Omega_I)$ и таких, что либо $\vec{w}_\nu(\vec{x}) = 0$, либо $\vec{w}_\tau(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \in \Gamma$, справедливо неравенство*

$$\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \leq T(\Omega_C,\Omega_I)\left(\|\vec{w}_C\|_{2,\Omega_C} + \|\mathrm{rot}\vec{w}\|_{2,\Omega}\right). \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{w}$ удовлетворяет условиям леммы. Положим, в соответствии с леммой 3.10., $\vec{v} = E^C_{div}\vec{w}_I \in K(\mathrm{div};\Omega)$. При этом, по условию, либо $\vec{w} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, либо $\vec{v} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Применяя к функциям $\vec{v}$, $\vec{w}$ неравенство (3.5), получаем

$$(\vec{w},\vec{v})_{2,\Omega} = (\vec{v}_C,\vec{w}_C)_{2,\Omega_C} + \|\vec{w}_I\|^2_{2,\Omega_I} \leq C(\Omega)\|\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\vec{w}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega)\|E^C_{div}\|\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}\|\mathrm{rot}\vec{w}\|_{2,\Omega},$$

$$\|\vec{w}_I\|^2_{2,\Omega_I} \leq C(\Omega)\|E^C_{div}\|\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}\|\mathrm{rot}\vec{w}\|_{2,\Omega} + \|E^C_{div}\|\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}\|\vec{w}_C\|_{2,\Omega}.$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.6), где можно взять

$$T(\Omega_C,\Omega_I) = (C(\Omega)+1)\|E^C_{div}\|$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Доказательство основных результатов

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2.

Пусть $\vec{v} \in V^j(\mu;\Omega)$. Применяя неравенство (3.5) к функциям $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mu\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$ или $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mu\vec{v} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$, получаем

$$\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C_1\|\mathrm{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega}, \tag{4.1}$$

где $C_1 = \mu_2\mu_1^{-1}C(\Omega)$. В частности, если $\vec{v} \in V^j_0(\mu;\Omega)$, $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C_1\|\mathrm{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega_C}$.

Согласно лемме 3.10., найдётся функция $\vec{J}_1 \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$ (соответственно, $\vec{J}_1 \in K(\mathrm{div};\Omega)$) такая, что $\vec{J}_{1I} = \vec{J}^{\text{ст}}_I$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма, возможность применения которой вытекает из неравенства (4.1), найдётся единственная функция $\vec{H}_1 \in V^j(\mu;\Omega)$, при всех $\vec{v} \in V^j(\mu;\Omega)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega (\mathrm{rot}\vec{H}_1 \cdot \mathrm{rot}\bar{\vec{v}})d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{J}_1 \cdot \mathrm{rot}\bar{\vec{v}})d\vec{x}.$$

Из лемм 3.8., 3.9. следует, что равенство справедливо для всех $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ или $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ соответственно, поэтому $\mathrm{rot}\vec{H}_1 - \vec{J}_1 \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega) = \{\vec{0}\}$ или $\mathrm{rot}\vec{H}_1 - \vec{J}_1 \in K_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega) = \{\vec{0}\}$, то есть $\mathrm{rot}\vec{H}_1 = \vec{J}_1$.

Будем искать решение $\vec{H} \in V^j(\mu;\Omega)$ задачи (2.11), (2.12) в виде $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1$. Тогда $\vec{H}_0 \in V_0^j(\mu;\Omega)$ и при всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu;\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H}_0 \cdot \overline{\vec{v}})d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1}\mathrm{rot}\vec{H}_0 \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x} =$$

$$= \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1}\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x} - \int_\Omega (\sigma^{-1}\mathrm{rot}\vec{H}_1 \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x} - i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H}_1 \cdot \overline{\vec{v}})d\vec{x}. \tag{4.2}$$

Из (4.1) вытекает, что билинейная форма $a(\vec{u},\vec{v}) = i\omega\int_\Omega(\mu\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}})d\vec{x} + \int_{\Omega_C}(\sigma^{-1}\mathrm{rot}\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x}$ коэрцитивна на $V_0^j(\mu;\Omega)$. Следовательно, задача (4.2) имеет единственное решение.

Предположим, $\vec{h} \in V^j(\mu;\Omega)$ – разность двух решений задачи (2.11), (2.12). Тогда $\vec{h} \in V_0^j(\mu;\Omega)$ и для всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu;\Omega)$

$$i\omega \int_\Omega (\mu\vec{h} \cdot \overline{\vec{v}})d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1}\mathrm{rot}\vec{h} \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x} = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{h} = 0$ и единственность решения установлена.
Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.3.

Пусть $\vec{H} \in V^j(\mu;\Omega)$, $j = 1,2$ – решение задачи (2.11), (2.12). Положим $\vec{E}^c = \sigma^{-1}(\mathrm{rot}\vec{H} - \vec{J}^{\text{ст}})$. Рассмотрим произвольную функцию $\vec{w} \in \{\mathcal{D}(\Omega_C)\}^3$. Продолжая её нулём в Ω_I, получаем функцию из $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Согласно леммам 3.8., 3.9., $\vec{w} = \vec{v} + \mathrm{grad}\phi$, где либо $\mathrm{div}\mu\vec{v} = 0$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$, либо $\mu\vec{v} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$ при $j = 1,2$ соответственно. Так как $\mathrm{rot}\vec{w} = \mathrm{rot}\vec{v}$, $\vec{v} \in V_0^j(\mu;\Omega)$. Таким образом,

$$\int_{\Omega_C} (\vec{E}^c \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{w}})d\vec{x} = -i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H} \cdot \overline{\vec{v}})d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega_C} (\mu\vec{H} \cdot \overline{\vec{w}})d\vec{x},$$

следовательно, $\mathrm{rot}\vec{E}^c = -i\omega\mu\vec{H}$.

В случае задачи (2.1)–(2.6), (2.13) нужно найти функцию $\vec{E} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ такую, что

$$\vec{E}_C = \vec{E}^c,\ \mathrm{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H},\ \mathrm{div}\varepsilon\vec{E}_I = \rho_0,\ \gamma_\nu\epsilon\vec{E}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Gamma. \tag{4.3}$$

Согласно лемме Лакса-Мильграма, возможность применения которой вытекает из неравенства (3.5), существует единственная функция $\vec{e} \in K_0(\mathrm{div}\varepsilon;\Omega) \cap H(\mathrm{rot};\Omega)$, при всех $\vec{v} \in K_0(\mathrm{div}\epsilon;\Omega) \cap H(\mathrm{rot};\Omega)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega (\mathrm{rot}\vec{e} \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x} = -i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H} \cdot \mathrm{rot}\overline{\vec{v}})d\vec{x}.$$

Ввиду леммы 3.9. это равенство справедливо для всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, следовательно, согласно лемме 2.1. $\mathrm{rot}\vec{e} + i\omega\mu\vec{H} \in K_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$. Таким образом, $\mathrm{rot}\vec{e} = -i\omega\mu\vec{H}$.

Согласно лемме 3.1. $\vec{E}^c - \vec{e}_C = \mathrm{grad}p_c$, $p_c \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p_c d\vec{x} = 0$.

Пусть $p_0 \in H^1(\Omega_0)$, $p_1 \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ – решения задач Дирихле

$$\mathrm{div}\epsilon\mathrm{grad}p_0(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega_0,\ p_0(\vec{x}) = p_c(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Gamma_0, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{div}\epsilon\mathrm{grad}p_1(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1,\ p_1(\vec{x}) = p_c(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Gamma_1,\ p_1(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Gamma. \tag{4.5}$$

Пусть, далее,

$$H_1 = \{q \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1) : q(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma_1\},$$

функция $p_2 \in H_1$ при всех $q \in H_1$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} (\epsilon \mathrm{grad} p_2 \cdot \mathrm{grad}\bar{q}) d\vec{x} = -\langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \mathrm{grad} p_1), q\rangle_\Gamma.$$

Функцию $\psi \in H^1(\Omega)$ определим выражением

$$\psi(\vec{x}) = \begin{cases} p_c(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega_C, \\ p_0(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega_0, \\ p_1(\vec{x}) + p_2(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1. \end{cases}$$

Тогда функция $\vec{E} = \vec{e} + \mathrm{grad}\psi$ – решение задачи (4.3).

Если $\vec{u}$ – разность двух решений задачи (4.3), то $\vec{u} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{u}_C = 0$, $\mathrm{div}\epsilon\vec{u}_I = 0$, $\gamma_\nu(\epsilon\vec{u}) = 0$. Согласно лемме 3.10., найдётся функция $\vec{v} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \varepsilon\vec{u}_I$. Тогда

$$0 = (\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega} = (\epsilon\vec{u}_I, \vec{u}_I)_{2,\Omega_I},$$

то есть $\vec{u}_I = 0$ и, следовательно, $\vec{u} = 0$.

Рассмотрим теперь задачу (2.1)–(2.5), (2.7), (2.14) и, при $\omega = 0$, задачу (2.1)–(2.6), (2.14). Функция $\vec{E} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ должна удовлетворять условиям

$$\vec{E}_C = \vec{E}^c,\ \mathrm{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H},\ \mathrm{div}\varepsilon\vec{E}_I = \rho_0,\ \langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon\vec{E}), 1\rangle_{\Gamma_1} = Q. \tag{4.6}$$

Определим функцию $\vec{e} \in K(\mathrm{div}\epsilon;\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ такую, что $\mathrm{rot}\vec{e} = -i\omega\mu\vec{H}$, $\vec{E}^c - \vec{e}_C = \mathrm{grad}p_c + \alpha$, где $p_c \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p_c d\vec{x} = 0$, α – произвольная константа.

Пусть $p_0 \in H^1(\Omega_0)$, $p_1 \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ – решения задач (4.4), (4.5). Положим $Q_1 = Q - \langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \mathrm{grad} p_1), 1\rangle_{\Gamma_1}$, $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ определим выражением

$$\phi_1(\vec{x}) = \begin{cases} p_c(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega_C, \\ p_0(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega_0, \\ p_1(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1 \end{cases}$$

Обозначим

$$H_2 = \{\psi \in H_0^1(\Omega) : \psi(\vec{x}) = const,\ \vec{x} \in \Omega_1\}$$

– гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \xi)_{H_2} = \int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} (\mathrm{grad}\psi \cdot \mathrm{grad}\xi) d\vec{x}.$$

Рассмотрим задачу определения функции $\phi_2 \in H_2$, при всех $\psi \in H_2$ удовлетворяющей равенству

$$\int_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1} (\epsilon \mathrm{grad}\phi_2 \cdot \mathrm{grad}\psi) d\vec{x} = \psi_1 Q_1, \tag{4.7}$$

где $\psi_1 = \psi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega_1$. Согласно неравенству Фридрихса (3.1) , $\psi_1^2 mes(\Omega_1) \leq A(\Omega,\Gamma)\|\psi\|_{H_2}^2$ для всех $\psi \in H_2$, линейный функционал $l : H_2 \to R^1$, $l(\psi) = Q_1\psi_1$ – непрерывный. Таким образом, задача (4.7) имеет единственное решение. Из (4.7) следует, что

$$\mathrm{div}\epsilon \mathrm{grad}\phi_2(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Omega_I,\ \langle \gamma_\nu(\epsilon \mathrm{grad}\phi_2), 1\rangle_\Gamma = Q_1.$$

Следовательно, $\vec{E} = \vec{e} + \mathrm{grad}(\phi_1 + \phi_2)$ – решение задачи (4.6).

Пусть $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{rot};\Omega)$ – разность двух решений задачи (4.6), тогда $\vec{u}_C = 0$. Так как $\langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon\vec{u}), 1\rangle_{\Gamma_j} = 0$, $j = 0, 1$, согласно лемме 3.4. найдётся функция $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \epsilon\vec{u}_I$. Таким образом, $0 = (\vec{v}, \vec{u})_{2,\Omega} = (\epsilon\vec{u}_I, \vec{u}_I)_{2,\Omega_I}$, $\vec{u}_I = 0$.

Пусть теперь $\vec{H} \in V^1(\mu;\Omega)$, $\vec{E} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ – решение системы (2.8). Положим $\vec{B} = \mu\vec{H} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{J} = \mathrm{rot}\vec{H} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Очевидно, выполнены соотношения (2.1), (2.3), (2.5). Пользуясь соотношением (2.4), определим функционал $\rho \in H^{-1}(\Omega)$. Таким образом, найдено решение задачи (2.1) – (2.6). Решение задачи (2.1)–(2.5), (2.7) строится аналогично. Единственность решения задач вытекает из единственности определения $\vec{H}$ и $\vec{E}$.

Доказательство теоремы 2.4.

Задачи (2.15) сводятся к задачам поиска функций $\vec{H}_\lambda \in V^j(\mu;\Omega)$, $j = 1, 2$, при всех $\vec{v} \in V^j(\sigma_\lambda;\Omega)$ удовлетворяющим равенству

$$i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H} \cdot \bar{\vec{v}})d\vec{x} + \int_\Omega (\sigma_\lambda^{-1}\mathrm{rot}\vec{H} \cdot \mathrm{rot}\bar{\vec{v}})d\vec{x} = \int_\Omega (\sigma_\lambda^{-1}\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \mathrm{rot}\bar{\vec{v}})d\vec{x}. \tag{4.8}$$

Из леммы Лакса-Мильграма вытекает, что задача (4.8) имеет единственное решение. Положим $\vec{E}_\lambda = \sigma_\lambda^{-1}(\mathrm{rot}\vec{H}_\lambda - \vec{J}^{\text{ст}})$. Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Согласно леммам 3.8., 3.9. $\vec{\psi} = \vec{v} + \mathrm{grad}\phi$, где либо $\mu\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$, либо $\mu\vec{v} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$. Поскольку $\mathrm{rot}\vec{\psi} = \mathrm{rot}\vec{v}$, $\vec{v} \in V^j(\mu;\Omega)$. Получаем

$$\int_\Omega (\vec{E}_\lambda \cdot \mathrm{rot}\vec{\psi})d\vec{x} = \int_\Omega (\sigma_\lambda^{-1}(\mathrm{rot}\vec{H}_\lambda - \vec{J}^{\text{ст}}) \cdot \mathrm{rot}\vec{v})d\vec{x} = -i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H} \cdot \vec{v})d\vec{x} = -i\omega \int_\Omega (\mu\vec{H} \cdot \vec{\psi})d\vec{x},$$

то есть $\vec{H}$, $\vec{E}$ – решение (2.15).

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.5.

Пусть $\vec{H}_\lambda \in V^1(\mu;\Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ – решение системы (2.15). Случай, когда $\vec{H}_\lambda \in V^2(\mu;\Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, рассматривается аналогично. Из (2.15) вытекает, что $\vec{E}_\lambda$ удовлетворяет условиям леммы 3.11.,

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega} \le (T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2}(\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\mathrm{rot}\vec{E}\|_{2,\Omega}).$$

Пусть $\omega > 0$. Тогда для всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$

$$i\omega \int_\Omega (\sigma_\lambda\vec{E}_\lambda \cdot \bar{\vec{v}})d\vec{x} + \int_\Omega (\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\bar{\vec{v}})d\vec{x} = -i\omega \int_\Omega (\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \bar{\vec{v}})d\vec{x}. \tag{4.9}$$

Положив в (4.9) $\vec{v} = \vec{E}_\lambda$, получаем

$$\sigma_1\|\vec{E}_\lambda\|^2_{2,\Omega_C} + \lambda\|\vec{E}_\lambda\|^2_{2,\Omega_I} + (\omega\mu_2)^{-1}\|\mathrm{rot}\vec{E}_\lambda\|^2_{2,\Omega} \le (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 2)^{1/2}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega}(\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\mathrm{rot}\vec{E}\|_{2,\Omega}),$$

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\mathrm{rot}\vec{E}\|_{2,\Omega} \le C_1\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_1 = 2(2T(\Omega_C, \Omega_I) + 2)^{1/2} \max\{\sigma_1^{-1}, \omega\mu_2\}$.

Обозначим $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\lambda_1}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\lambda_2}$ при произвольных λ_1, $\lambda_2 > 0$. Из равенств (4.9) вытекает, что для всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$

$$i\omega \int_{\Omega_C} (\sigma(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \bar{\vec{v}})d\vec{x} + i\omega\lambda_2 \int_{\Omega_I} ((\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \bar{\vec{v}})d\vec{x} + \int_\Omega (\mu^{-1}\mathrm{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \mathrm{rot}\bar{\vec{v}})d\vec{x} =$$

$$= i\omega(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1 \cdot \bar{\vec{v}})d\vec{x}.$$

Положив $\vec{v}=\vec{E}_2-\vec{E}_1$, получаем

$$\omega\sigma_1\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|^2_{2,\Omega_C}+\omega\lambda_2\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|^2_{2,\Omega_I}+\mu_2^{-1}\|\mathrm{rot}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\|^2_{2,\Omega}\le$$

$$\le\sqrt{2}\omega|\lambda_1-\lambda_2|\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I},$$

$$\omega\sigma_1\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|^2_{2,\Omega_C}+\frac{1}{2}\omega\lambda_2\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|^2_{2,\Omega_I}+\mu_2^{-1}\|\mathrm{rot}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\|^2_{2,\Omega}\le$$

$$\le\omega\frac{|\lambda_1-\lambda_2|^2}{\lambda_2}\|\vec{E}_1\|^2_{2,\Omega_I}\le\omega\frac{|\lambda_1-\lambda_2|^2}{\lambda_2}C_1^2T^2(\Omega_C,\Omega_I)\|\vec{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,\Omega}.$$

Пусть, без ограничения общности, $\lambda_2>\lambda_1$. Тогда

$$\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|^2_{rot,\Omega}\le(2T^2(\Omega_C,\Omega_I)+1)(\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|^2_{2,\Omega_C}+\|\mathrm{rot}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\|^2_{2,\Omega})\le C_2^2|\lambda_1-\lambda_2|\|\vec{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,\Omega},$$

где $C_2^2=(2T^2(\Omega_C,\Omega_I)+1)C_1^2T^2(\Omega_C,\Omega_I)\max\{\sigma_1^{-1},\mu_2\omega\}$.

Пусть теперь $\omega=0$. Из (2.15) следует, что $\vec{E}_\lambda\in K(\mathrm{rot};\Omega)$. Используя лемму 2.1. получаем, что для всех $\vec{g}\in K(\mathrm{rot};\Omega)$

$$0=\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{E}_\lambda\cdot\vec{g})d\vec{x}+\lambda\int_{\Omega_I}(\vec{E}_\lambda\cdot\vec{g})d\vec{x}+\int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{g})d\vec{x}. \tag{4.10}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C}\le\sigma_1^{-1}(T^2(\Omega_C,\Omega_I)+1)^{1/2}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega},\ \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_I}\le C_3\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_3=T(\Omega_C,\Omega_I)\sigma_1^{-1}(T^2(\Omega_C,\Omega_I)+1)^{1/2}$.

Для λ_1, $\lambda_2>0$ и $\vec{E}_1=\vec{E}_{\lambda_1}$, $\vec{E}_2=\vec{E}_{\lambda_2}$ из (4.10) получаем

$$\int_{\Omega_C}(\sigma(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\vec{g})d\vec{x}+\lambda_2\int_{\Omega_I}((\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\vec{g})d\vec{x}=(\lambda_1-\lambda_2)\int_{\Omega_I}(\vec{E}_1\cdot\vec{g})d\vec{x}$$

при любой функции $\vec{g}\in K(\mathrm{rot};\Omega)$. Следовательно,

$$\sigma_1\int_{\Omega_C}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)^2d\vec{x}+\frac{\lambda_2}{2}\int_{\Omega_I}(\vec{E}_2-\vec{E}_1)^2d\vec{x}\le\frac{|\lambda_1-\lambda_2|^2}{2\lambda_2}\int_{\Omega_I}(\vec{E}_1)^2d\vec{x}.$$

Пусть $\lambda_1<\lambda_2$. Тогда

$$\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|_{2,\Omega}=\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|_{rot,\Omega}\le C_4\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_4=((T^2(\Omega_C,\Omega_I)+1)/(2\sigma_1))^{1/2}C_3$.

Из (2.15) и оценки (3.5) следует, что

$$\|\mathrm{rot}(\vec{H}_{\lambda_2}-\vec{H}_{\lambda_1})\|_{2,\Omega}\le\max\{\lambda_2,\sigma_2\}\|\vec{E}_2-\vec{E}_1\|_{2,\Omega}+|\lambda_2-\lambda_1|\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I},$$

то есть при λ_2, $\lambda_1\le 1$ получаем, используя оценку (3.5):

$$\|\vec{H}_{\lambda_2}-\vec{H}_{\lambda_1}\|_{\mathrm{rot},\Omega}\le C_5\sqrt{|\lambda_2-\lambda_1|}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_5=(C^2(\Omega)\mu_2^2\mu_1^{-2}+1)^{1/2}(\max\{1,\sigma_2\}C_2+C_1T(\Omega_C,\Omega_I))$, если $\omega>0$ и $C_5=(C^2(\Omega)\mu_2^2\mu_1^{-2}+1)^{1/2}(\max\{1,\sigma_2\}C_4+C_3)$ при $\omega=0$.

Таким образом, $\vec{H}_\lambda$, $\vec{E}_\lambda$ стремятся при $\lambda\to 0$ в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ к некоторым $\vec{h}\in V^1(\mu;\Omega)$, $\vec{e}\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ соответственно. Переходя к пределу при $\lambda\to 0$ в (2.15) получаем, что $\vec{h}=\vec{H}$, $\vec{e}=\vec{E}$ – решение системы (2.8).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части (код проекта 2664) и проектной части (код проекта 1727) государственного задания в 2014-2016 гг., а также поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Дата поступления 30.11.2016

Список литературы

1. М. П. Галанин, Ю. П. Попов, *Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах*, Наука, Физматлит, М., 1995, 316 с.
2. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010.
3. J. D. Lavers, "State of the art of numerical modeling for induction processes", *COMPEL*, **27** (2008), 335–349.
4. A. Bermudes, R. Rodriguez, P. Salgado, "FEM for 3D eddy current problems in bounded domains subject to realistic boundary conditions. An application to metallurgical electrodes", *Arch. Comput. Methods Engrg.*, **12** (2005), 67–114.
5. R. Y. Tang, S. H. Wang, Y. Li, X. L. Wang, X. Cui, "Transient simulation of power transformers using 3-D finite element model coupled to electric circuit equations", *IEEE Trans. Magn.*, **36** (2000), 1417–1420.
6. M. T. Thompson, "Eddy current magnetic levitation. Models and experiments", *IEEE Potentials*, **19** (2000), 40–44.
7. B. A. Auld, J. C. Moulder, "Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation", *J. Nondestr. Eval.*, **18** (1999), 3–36.
8. S. Baillet, J. C. Mosher, R. M. Leahy, "Electromagnetic brain mapping", *IEEE Signal Process. Magaz.*, **18** (2001), 14–30.
9. Ж.-Л. Кулон, Ж.-К. Сабоннадьер, *САПР в электротехнике*, Мир, М., 1988, 208 с.
10. A. Bossavit, *Computational electromagnetism. Variational formulations, complementarity, edge elements*, Academic Press, Boston, 1998.
11. H. Weyl, "The method of orthogonal projection in potential theory", *Duke Math. J.*, **7** (1940), 411–444.
12. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, "Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа", *Труды МИАН СССР*, **59** (1960), 5–36.
13. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980, 384 с.
14. V. Girault, P. Raviart P., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springler-Verlag, N.Y., 1986.
15. А. В. Калинин, А. А. Калинкина, "Lp - оценки векторных полей", *Известия Вузов. Математика*, 2004, № 3, 26–35.
16. Z. Chen, Q. Du, J. Zou, "Finite element methods with matching and nonmatching meshes for Maxwell equations with discontinuous coefficients", *SIAM J. Numer. Anal.*, **37**:5 (2000), 1642–1570.

17. А. В. Калинин, С. Ф. Морозов, “Стационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1999, № 1(20), 48–62.

18. А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, “Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач для эллиптических уравнений”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского*, 2010, № 2, 117–123.

19. M. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, 1996.

20. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media with non-conductive and low conductive inclusions

© A. B. Kalinin[3], A. A. Tiukhtina[4]

Abstract. Boundary value problems for the time-periodic solutions of quasi-stationary magnetic approximation for Maxwell equations are studied. The case of inhomogeneous media containing a conducting, non-conducting and low-conducting inclusions is considered. The asymptotic connection of the solutions of problems with non-conducting and low-conducting inclusions is investigated.

Key Words: Maxwell equations, quasistationary magnetic approximation, periodic solutions, inhomogeneous media, electric and magnetic boundary conditions, non-conducting and low-conducting inclusions

[3] Associate Professor of Mathematical Physics and Optimal Control Department, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; avk@mm.unn.ru

[4] Associate Professor of Mathematical Modelling of Economical Processes Department, Institute of Economics and Entrepreneurship, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; kalinmm@yandex.ru