СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXI, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1980

УДК 517.994+551.465.7

Ю. И. ЗАГОРОДНИКОВ, А. Г. ЗАРУБИН

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОКЕАНЕ

Ветровые течения в океане постоянной глубины H описываются уравнениями [1-3]

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial t} - A_L \triangle \overline{M} + A\overline{M} + r|\overline{M}|\overline{M} + gH \nabla \zeta = \vec{f}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \overline{M} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\overline{M}$ есть вектор, компоненты которого состоят из осредненных по вертикали компонент скорости течения, r — коэффициент придонного трения.

Вопросам разрешимости краевых задач для уравнений динамики в линейном случае посвящены работы А. А. Кордзадзе [4,5]. Если в уравнении неразрывности (2) содержится член $\partial\zeta/\partial t$, то такие уравнения изучались в ряде работ Г. И. Марчука, Б. А. Кагана и других. Результаты этих исследований детально приведены в [6]. При исследовании краевых задач для уравнений (1)—(2) применяются методы, которые отличаются от [6].

Цель статьи — доказать существование решений в пространствах С. Л. Соболева, рассмотреть вопросы сходимости метода Галеркина, построить разностную схему численного решения, изучить вопросы устойчивости схемы, скорость сходимости приближенных решений к точному.

§ 1. Теорема существования

Пусть Ω — ограниченная область двумерного пространства R^2 с границей S класса C^2, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ — цилиндрическая область, точки которой обозначаются через

$$(x, t) = (x_1, x_2, t); \; x \in \Omega, \; t \in (0, T), \; S_T = S \times [0, T].$$

В дальнейшем будем использовать обозначения работы [7]. Через $W_q^l(\Omega)$ обозначим пространство функций, имеющих в Ω обобщенные производные до порядка l включительно и принадлежащих $L_q(\Omega)$ вместе со всеми производными. Норма функции $u(x) \in W_q^l(\Omega)$ задается формулой

$$\|u\|_{q,\Omega}^l = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha u\|_{q,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^q \, dx \right)^{1/q},$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}.$$

$W_q^{2,1}(Q_T)$ — пространство функций, имеющих суммируемые с q-й степенью производные до второго порядка включительно по переменной x и первого порядка по t. Норма в $W_q^{2,1}(Q_T)$ — равна

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left(\int_0^T \|D^\alpha u\|_{q,\Omega}^q\, dt\right)^{1/q} + \left(\int_0^T \|D_t u\|_{q\Omega}^q\, dt\right)^{1/q}.$$

Будем рассматривать задачу о нахождении вектор-функций $\bar{u}(x, t)$ и $p(x, t)$, являющихся решениями системы

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} - \nu\bigtriangleup\bar{u} + A\bar{u} + r|\bar{u}|\bar{u} + g\nabla p = \bar{f}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\bar{u} = 0, \tag{1.2}$$

удовлетворяющих на береговой черте S условию прилипания

$$\bar{u}|_s = 0 \tag{1.3}$$

и в начальный момент времени состоянию покоя

$$\bar{u}|_{t=0} = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим через $J(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов, а через $\overset{0}{J}_q(\Omega)$ его замыкание в норме $L_q(\Omega)$. Обозначим через $G_q(\Omega)$ множество всех векторов вида $\nabla\varphi \in L_q(\Omega)$. Тогда (см., например, [7]) имеет место

$$L_q(\Omega) = G_q(\Omega) \dotplus \overset{0}{J}_q(\Omega).$$

Пусть $G_q(Q_T)$ и $\overset{0}{J}_q(Q_T)$ — подпространства $L_q(Q_T)$, состоящие из векторов, почти при всех t принадлежащих $G_q(\Omega)$ и $J_q(\Omega)$ соответственно. Для них справедлива формула

$$L_q(Q_T) = G_q(Q_T) \dotplus \overset{0}{J}_q(Q_T).$$

Рассмотрим совокупность всех соленоидальных векторов из $W_q^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\bar{u}|_{t=0}$, $\bar{u}|_s = 0$. Это будет пространство $\Phi(Q_T)$. Пусть P_J — проектор на $\overset{0}{J}_q(Q_T)$.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $\bar{f}(x, t)$ принадлежит $L_q(Q_T)$ при $q \geqslant 2$ и $\sup\limits_t \|\bar{f}(x, t)\|_{L_q(\Omega)} < \infty$ при $1 < q < 2$. Тогда задача* (1.1)—(1.4) *имеет, по крайней мере, одно решение $\bar{u}(x, t)$ из пространства $W_q^{2,1}(Q_T)$, $\nabla p \in L_q(Q_T)$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\bar{f}(x, t) \in \overset{0}{J}_q(Q_T)$. Нетрудно видеть, что задача (1.1)—(1.2) эквивалентна уравнению

$$\mathscr{L}\bar{u} + \mathscr{K}\bar{u} = \bar{f}, \tag{1.5}$$

где

$$\mathscr{L}\bar{u} = P_J\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\bar{u}, \quad \mathscr{K}\bar{u} = P_J(A\bar{u} + r|\bar{u}|\bar{u}),$$

причем операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{K}$ действуют из $\Phi(Q_T)$ в $\overset{0}{J}_q(Q_T)$. Из вида оператора $\mathscr{K}$ и теорем вложения для пространства $W_q^{2,1}$ (см., например, [8]) легко получить, что оператор $\mathscr{K}$ вполне непрерывен. Известно [7], что оператор $\mathscr{L}$ имеет непрерывный обратный. Тогда уравнение (1.5) эквивалентно уравнению

$$\bar{u} = -\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{K}\bar{u} - \bar{f}).$$

Применим к этому уравнению принцип Лере — Шаудера [9]. Пусть $\bar{u}(\lambda)$ всевозможные решения всевозможных уравнений

$$\bar{u}(\lambda) = -\lambda\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{K}\bar{u}(\lambda) - \bar{f}).$$

Для решений $\bar{u}(\lambda)$ справедливо тождество

$$\frac{\partial \bar{u}(\lambda)}{\partial t} - \nu \Delta \bar{u}(\lambda) + g \nabla p(\lambda) + \lambda (r |\bar{u}(\lambda)| \bar{u}(\lambda) + A\bar{u}(\lambda)) = \lambda \bar{f},$$

$$\operatorname{div} \bar{u}(\lambda) = 0.$$

Умножим на $\bar{u}(\lambda)$ и проинтегрируем по цилиндру $\Omega \times [0, t]$, тогда получаем

$$\|\bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu \int_0^t \|\nabla \bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\Omega)} dt \leqslant \int_0^t \int_\Omega |\bar{f}| |\bar{u}(\lambda)| \, dxdt. \tag{1.6}$$

Пусть $q \geqslant 2$. Применим к правой части неравенство Коши. Имеем

$$\|\bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\bar{f}\|_{L_2(Q_t)} \cdot \|\bar{u}(\lambda)\|_{L_2(Q_t)} \leqslant c(\Omega, T) \|\bar{f}\|_{L_q(Q_T)} \cdot \sup_t \|\bar{u}(\lambda)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда при $q \geqslant 2$ следует априорная оценка решений

$$\sup_t \|\bar{u}(\lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c. \tag{1.7}$$

Пусть $1 < q < 2$. Тогда

$$\int_0^t \int_\Omega |\bar{f}| |\bar{u}(\lambda)| \, dxdt \leqslant \int_0^t \left(\int_\Omega |\bar{f}|^q dx \right)^{1/q} \cdot \left(\int_\Omega |\bar{u}(\lambda)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_t \|\bar{f}\|_{L_q(\Omega)} \cdot \int_0^t \left(\int_\Omega |\bar{u}(\lambda)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} dt. \tag{1.8}$$

Оценим последний интеграл с помощью мультипликативных неравенств, полученных Гальярдо [10] и Ниренбергом [11]. Имеем

$$\int_0^t \left(\int_\Omega |\bar{u}(\lambda)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} dt \leqslant c \int_0^t \|\bar{u}(\lambda)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2(q-1)}{q}} \cdot \|\nabla \bar{u}(\lambda)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2-q}{q}} dt.$$

Отсюда и из неравенства Юнга получаем

$$\int_0^t \|\bar{u}(\lambda)\|_{L_{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} dt \leqslant c \Bigg(c(\varepsilon) \int_0^t \|\bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\Omega)} dt +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \left(\|\nabla \bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\omega)} \right)^{\frac{2-q}{2}} dt, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.9}$$

Из неравенств (1.6), (1.8) и (1.9) при малых $\varepsilon > 0$ вытекает

$$\|\bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant c \sup_t \|\bar{f}\|_{L_q(\Omega)} \cdot \int_0^t \|\bar{u}(\lambda)\|^2_{L_2(\Omega)} dt + c.$$

Из данного неравенства и леммы Гроуолла следует априорная оценка типа (1.7) для $1 < q < 2$.

Далее,

$$\|\bar u(\lambda)\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \leqslant \|\mathscr{L}^{-1}\|\left(\|\mathscr{K}\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} + \|\bar f\|_{L_q(Q_T)}\right), \tag{1.10}$$

где $1 < q < \infty$. Оценим норму $\|\mathscr{K}\bar u(\lambda)\|$.

Имеем

$$\|\mathscr{K}\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant l\|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} + r\||\bar u(\lambda)|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\||\bar u(\lambda)|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant 2^{1/q}\left(\|\bar u_x(\lambda)\|^2_{L_{2q}(Q_T)} + \|\bar u_y(\lambda)\|^2_{L_{2q}(Q_T)}\right).$$

Если применить к каждому слагаемому мультипликативное неравенство, то будем иметь

$$\||\bar u(\lambda)|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant c\left(\int_0^T \|\bar u_x(\lambda)\|_{L_2}^{2q(1-\theta)}\cdot\left(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha\bar u_x(\lambda)\|_{L_q}\right)^{2q\theta}dt\right)^{1/q} +$$
$$+ c\left(\int_0^T \|\bar u_y(\lambda)\|_{L_2}^{2q(1-\theta)}\cdot\left(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha\bar u_y(\lambda)\|_{L_q}\right)^{2q\theta}dt\right)^{1/q}.$$

Здесь $\bar u_x$, $\bar u_y$ компоненты вектора $\bar u$, $\theta = (q-1)/(3q-2)$. Отсюда

$$\||\bar u(\lambda)|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant c\sup_t\|\bar u(\lambda)\|_{L_2}^{2(1-\theta)}\cdot\sum_{|\alpha|=2}\left(\left(\int_0^T\|D^\alpha\bar u_x\|_{L_q}^{2q\theta}dt\right)^{1/q} +\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^T\|D^\alpha\bar u_y\|_{L_q}^{2q\theta}dt\right)^{1/q}\right). \tag{1.11}$$

Так как $2\theta < 1$, то можно применить неравенство Гельдера, тогда

$$\||\bar u(\lambda)|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant c\sup_t\|\bar u(\lambda)\|_{L_2}^{2(1-\theta)}\cdot\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha\bar u(\lambda)\|^{2\theta}_{L_q(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant c\sup_t\|\bar u(\lambda)\|_{L_2}^{2(1-\theta)}\cdot\|\bar u(\lambda)\|^{2\theta}_{W_q^{2,1}}. \tag{1.12}$$

Аналогично для $2 < q < \infty$:

$$\|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant c\sup_t\|\bar u(\lambda)\|_{L_2(\Omega)}^{1-\theta_1}\cdot\|\bar u(\lambda)\cdot\|^{\theta_1}_{W_q^{2,1}(Q_T)}, \tag{1.13}$$

где $\theta_1 = (q-2)/(3q-2)$.

Если $1 < q \leqslant 2$, то

$$\|\bar u(\lambda)\|_{L_q(Q_T)} \leqslant c\sup_t\|\bar u(\lambda)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Из неравенств (1.10)—(1.14) и априорной оценки (1.7) следует равномерная ограниченность $\|\bar u(\lambda)\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}$.

Теорема доказана.

Пусть $\bar u(x, t)$ и $\bar v(x, t)$ произвольные вектор-функции из $\Phi(Q_T)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(\mathscr{K}\bar u - \mathscr{K}\bar v, \bar u - \bar v)_{L_2(Q_T)} \geqslant r\int_0^T\int_\Omega|\bar u||\bar v|(|\bar u| + |\bar v|)\,dxdt \geqslant 0.$$

Отсюда следует единственность решения задачи (1.1)—(1.4).

§ 2. Метод Бубнова — Галеркина

Рассмотрим метод Бубнова — Галеркина для задачи (1.1)—(1.4), когда $\bar{f}$ принадлежит $L_2(Q_T)$. Пусть $\tilde{\Delta}$ есть расширение по Фридрихсу оператора — $\nu P_J \Delta$. Как известно (см., например, ([12])), оператор $\tilde{\Delta}$ имеет полную ортогональную систему вектор-функций в $W_2^1(\Omega) \cap \mathring{J}_2(\Omega)$. Спектр оператора $\tilde{\Delta}$ дискретен, причем $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$. Собственные функции φ_s принадлежат пространству $W_q^2(\Omega)$, $q > 1$. Обозначим через $\mathring{J}_2^n(\Omega)$ линейную оболочку вектор-функций φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Оператор ортогонального проектирования пространства $\mathring{J}_2(\Omega)$ на $\mathring{J}_2^n(\Omega)$ обозначим через P_n.

В подпространстве $\mathring{J}_2^n(\Omega)$ рассмотрим задачу

$$\frac{d\bar{U}_n}{dt} + \tilde{\Delta}\bar{U}_n(t) + P_n \mathscr{K} \bar{U}_n(t) = P_n \bar{f}, \tag{2.1}$$

$$\bar{U}_n(0) = 0, \tag{2.2}$$

где $\bar{U}_n(t) = \bar{u}_n(x, t)$ — функция со значениями в банаховом пространстве $\mathring{J}_2(\Omega)$.

Решения задачи (2.1)—(2.2) называют приближенными решениями, построенными по методу Бубнова — Галеркина. Ясно, что функция $\bar{U}_n(t) = \bar{u}_n(x, t)$ представима в виде

$$\bar{U}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, \varphi_i(x), \tag{2.3}$$

где $c_i(t)$ определяются как решения системы n нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dc_j}{dt} + \sum_{i=1}^{n} c_i (\tilde{\Delta}\varphi_i, \varphi_j) + \left(\mathscr{K}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\right), \varphi_j\right) = (\bar{f}, \varphi_j),$$

$$c_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Если $\bar{f}(x, t)$ принадлежит пространству $\mathring{J}_2(\Omega)$, то существует единственное решение $\bar{u}_n(x, t)$ задачи* (2.1)—(2.2). *Приближенные решения $\bar{u}_n(x, t)$, построенные по методу Бубнова — Галеркина, сходятся по норме пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$ к решению задачи* (1.1)—(1.4), *причем имеет место оценка скорости сходимости*

$$\int_0^T \|\bar{u} - \bar{u}_n\|^2_{W_2^1(\Omega)} dt \leqslant \frac{\text{const}}{\lambda_{n+1}}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из свойств операторов $\tilde{\Delta}$ и $\mathscr{K}$, которые указаны в теореме 1, а также из работы ([13]), следует существование и единственность приближенных решений, построенных по методу Бубнова — Галеркина, причем решения $\bar{u}_n(x, t)$ сходятся по норме пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$ к точному решению $\bar{u}(x, t)$. Для решений $\bar{u}_n(x, t)$ и $u(x, t)$ имеем тождество

$$\frac{\partial(\bar{u} - \bar{u}_n)}{\partial t} + \tilde{\Delta}(\bar{u} - \bar{u}_n) + \mathscr{K}\bar{u} - \mathscr{K}\bar{u}_n = \bar{f} - P_n \bar{f}, \tag{2.5}$$

$$\bar u(x,0)=\bar u_n(x,0)=0,\quad (\bar u(x,t)-\bar u_n(x,t))|_S=0.$$

Воздействуем на (2.5) оператором $\tilde\Delta^{-1}$. Тогда

$$\tilde\Delta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\bar u-\bar u_n)\right)+(\bar u-\bar u_n)+\tilde\Delta^{-1}(\mathcal{K}\bar u-\mathcal{K}\bar u_n)+$$
$$+\tilde\Delta^{-1}(I-P_n)\mathcal{K}\bar u_n=\tilde\Delta^{-1}(I-P_n)\bar f.$$

Умножим скалярно на $\tilde\Delta(\bar u-\bar u_n)$, используя самосопряженность и свойства монотонности оператора $\mathcal{K}$; получаем

$$1/2\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(\bar u-\bar u_n)^2dx+\|\tilde\Delta^{1/2}(\bar u-\bar u_n)\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega\tilde\Delta^{-1}(P_n-I)(\mathcal{K}\bar u_n-\bar f)\,\tilde\Delta(\bar u-\bar u_n)\,dx.$$

Отсюда

$$\int_0^T\|\tilde\Delta^{1/2}(\bar u-\bar u_n)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant\left(\int_0^T\|\tilde\Delta(\bar u-\bar u_n)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\right)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^T\|\tilde\Delta^{-1}(P_n-I)(\mathcal{K}\bar u_n-\bar f)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\right)^{1/2}.$$

Так как $\bar u_n(x,t)$ сходятся по норме пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$, то они равномерно ограничены; следовательно,

$$\int_0^T\|\tilde\Delta^{1/2}(\bar u-\bar u_n)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant c\left(\int_0^T\|\tilde\Delta^{-1}(P_n-I)(\mathcal{K}\bar u_n-\bar f)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\right)^{1/2}.\quad(2.6)$$

Пусть $\bar v(x,t)$ — произвольный элемент из $W_2^{2,1}\cap\overset{\circ}{J}_2$, тогда

$$\int_0^T\|\tilde\Delta^{-1}(I-P_n)\bar v\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant c\lambda_{n+1}^{-2}\int_0^T\|\bar v\|^2_{L_2(\Omega)}dt.$$

Отсюда и из (2.6) вытекает при $\bar v=\mathcal{K}\bar u_n-\bar f$, что

$$\int_0^T\|\tilde\Delta^{-1}(I-P_n)\bar v\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant c\lambda_{n+1}^{-1}\|\mathcal{K}\bar u_n-f\|_{L_2(Q_T)}.\quad(2.7)$$

Из равномерной ограниченности норм $\|\bar u_n\|_{W_2^{2,1}}$, а также из неравенства (2.7), получаем

$$\int_0^T\|\tilde\Delta^{1/2}(\bar u-\bar u_n)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\leqslant c\lambda_{n+1}^{-1}.\quad(2.8)$$

Теорема доказана.

§ 3. Метод сеток

В данном параграфе будем рассматривать метод сеток численного решения задачи (1.1)—(1.4) в случае, когда Ω — квадрат $\{0<x_1<1;\ 0<x_2<1\}$. Нас будут интересовать вопросы устойчивости схемы и скорость сходимости приближенных решений.

На множестве $\bar Q_T=\Omega\times[0,T]$ введем сетку с шагами $\tau=T/N_1$, $h=1/N_2$ по временной и пространственным переменным соответственно, которая порождает сеточные подмножества $Q_{\tau,h} = m_\tau \times \omega_h$ множества Q_T. Введем необходимые сеточные пространства

$$(\varphi_{\tau,h}(t), \Psi_{\tau,h}(t))_{L_2(h)} = h^2 \cdot \sum_{x\in\omega_h} \varphi_{\tau,h}(t, x)\,\Psi_{\tau,h}(t, x),$$

$$\|\varphi_{\tau,h}(t)\|_{L_p(h)} = \left(h^2 \sum_{x\in\omega_h} |\varphi_{\tau,h}(t, x)|^p\right)^{1/p},$$

$$\|\varphi_{\tau,h}(t)\|_{W_p^1(h)} = \left(\|\varphi_{\tau,h}(t)\|_{L_p(h)}^p + \sum_{i=1}^{2} \|\partial_i\varphi_{\tau,h}(t)\|_{L_p(h)}^p\right)^{1/p},$$

где $\partial_i\varphi_{\tau,h}$ — разностное отношение с шагом вперед по пространственной переменной x_i. Здесь предполагается, что сеточные функции продолжены нулем на $[0, T]_\tau \times S_h$ и суммирование в нормах, содержащих разностные отношения, распространяется на все те точки ω_h, где эти разности определены.

Каждая из введенных норм есть сеточная функция переменного t. Множество всех сеточных функций превращается в банахово пространство $C([0, T]_\tau, E)$, если ввести норму

$$\|\varphi_{\tau,h}\|_{C([0,T]_\tau,E)} = \max_{1\leqslant i\leqslant N_1} \|\varphi_{\tau,h}(\tau_i)\|_E.$$

Сеточную вектор-функцию $\bar{u}_{\tau,h}(t, x)$ определим как вектор с координатами $u_{1\tau,h}(t, x)$, $u_{2\tau,h}(t, x)$. По аналогии с сеточными функциями введем скалярное произведение и нормы для сеточных вектор-функций.

Будем рассматривать сеточные вектор-функции при фиксированном t. Введем разностные операторы:

$$\mathrm{grad}_h = (\bar\partial_1, \bar\partial_2), \quad \mathrm{div}_h = \sum_{i=1}^{2} \partial_i,$$

где $\partial_i\bar{u}_{\tau,h}$ — разностное отношение с шагом назад по пространственной переменной x_i. Обозначим через $H(h)$ подпространство сеточных вектор-функций $\bar{u}_{\tau,h}$, удовлетворяющих (при продолжении нулем на S_h) условию $\mathrm{div}_h\,\bar{u}_{\tau,h} = 0$. Пространство $H(h)$ является сеточным аналогом пространства соленоидальних векторов $H(\Omega)$ ([12]). Через $G(h)$ обозначим подпространство сеточных вектор-функций $\bar{v}_{\tau,h}$, представимых в виде $\bar{v}_{\tau,h} = \mathrm{grad}_h\,\varphi_{\tau,h}$, где $\varphi_{\tau,h}$ — некоторая определенная на ω_h сеточная функция. На множество функций $\varphi_{\tau,h}$ налагается дополнительное ограничение: каждая компонента вектор-функции $\mathrm{grad}_h\,\varphi_{\tau,h}$ определена на своем более широком, чем ω_h, множестве, и требуется, чтобы эти избыточные значения компоненты равнялись нулю. Известно ([14]), что имеет место разложение

$$L_2(h) = H(h) \oplus G(h).$$

Рассмотрим вектор-функцию $\bar{u}(t, x)$. Каждой вектор-функции, следуя ([12]), поставим в соответствие сеточную вектор-функцию $[\bar{u}(t, x)]_h$ по формулам

$$\begin{aligned} [u_1(t, x)]_h &= h^{-1} \int_{x_2}^{x_2+h} u_1(t, x_1, y)\,dy, \\ [u_2(t, x)]_h &= h^{-1} \int_{x_1}^{x_1+h} u_2(t, \bar{x}, x_2)\,d\bar{x}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $x \in \omega_h$. Оператор, заданный формулами (3.1), переводит вектор-функцию $\bar{u}(t, x) \in H(\Omega)$ в сеточные функции $[\bar{u}(t, x)]_h \in H(h)$.

Задаче (1.1)—(1.4) поставим в соответствие разностную задачу

$$\partial_0 \bar{u}_{\tau,h}(t,x) - \nu\Delta_h \bar{u}_{\tau,h}(t,x) + A\bar{u}_{\tau,h}(t-\tau,x) + r|\bar{u}_{\tau,h}(t-\tau,x)|\bar{u}_{\tau,h}(t,x) -$$

$$- g\,\mathrm{grad}_h p_{\tau,h}(t,x) = \bar{f}_{\tau,h}(t,x),\ (t,x)\in[0,T]_\tau\times\omega_h, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{div}_h \bar{u}_{\tau,h}(t,x) = 0,\quad (t,x)\in[0,T]_\tau\times\omega_h, \tag{3.3}$$

$$\bar{u}_{\tau,h}(0,x) = 0,\quad x\in\omega_h,\quad \bar{u}_{\tau,h}(t,x) = 0,\quad (t,x)\in[0,T]_\tau\times S_h. \tag{3.4}$$

Здесь $\Delta_h = \sum_{i=1}^{2} \bar{\partial}_i\partial_i$, $\bar{f}_{\tau,h}(t,x) = [\bar{f}(t,x)]_h$, $\bar{\partial}_0 \bar{u}_{\tau,h}$ — разностное отношение с шагом назад по временной переменной.

Лемма. *При достаточно малом* τ_0 *и при всех* $\tau\leqslant\tau_0$ *решение задачи* (3.2)—(3.4) *существует и единственно.*

Доказательство. Система (3.2)—(3.4) является линейной алгебраической системой относительно $\bar{u}_{\tau,h}(t,x)$ при каждом фиксированном t. Поэтому существование и единственность ее решения будет следовать из априорной оценки

$$\|\bar{u}_{\tau,h}\|_{C([0,T]_\tau, W_2^1(h))} \leqslant c. \tag{3.5}$$

Пусть P_h — оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(h)$ на $H(h)$. Тогда задача (3.2)—(3.4) эквивалентна задаче

$$\bar{\partial}_0 \bar{u}_{\tau,h}(i\tau) + \nu B_h \bar{u}_{\tau,h}(i\tau) + P_h A\bar{u}_{\tau,h}((i-1)\tau) + \tag{3.6}$$

$$+ rP_h|\bar{u}_{\tau,h}((i-1)\tau)|\bar{u}_{\tau,h}(i\tau) = P_h\bar{f}_{\tau,h}(i\tau),\ 0\leqslant i\leqslant N_1,\ \bar{u}_{\tau,h}(0) = 0, \tag{3.7}$$

рассматриваемой в $H(h)$. Здесь $B_h = -P_h\Delta$ является положительно определенным самосопряженным оператором. Следовательно, существуют операторы

$$R_{\tau,h}(i) = (I + \tau\nu B_h)^{-i}.$$

Из (3.6) нетрудно получить следующее выражение:

$$\bar{u}_{\tau,h}(i\tau) = \tau\sum_{j=1}^{i} R_{\tau,h}(i+1-j)\,P_h\bar{f}_{\tau,h}(j\tau) -$$

$$- r\tau\sum_{j=1}^{i} R_{\tau,h}(i+1-j)\,P_h\left(|\bar{u}_{\tau,h}((j-1)\tau)|\,\bar{u}_{\tau,h}(j\tau)\right) - \tag{3.8}$$

$$-\tau\sum_{j=1}^{i} R_{\tau,h}(i+1-j)\,P_hA\bar{u}_{\tau,h}((j-1)\tau).$$

Это уравнение с неравномерно ограниченной по h нелинейностью в $H(h)$. Обозначим через $\bar{v}_{\tau,h} = B_h^{1/2}\bar{u}_{\tau,h}$. Как показано в ([14]), оператор $B_h^{-1/2}$ является ограниченным (равномерно по h) оператором из $H(h)$ в $W_2^1(h)$ и, следовательно, в силу разностных теорем вложения (см., например ([15])) в $L_p(h)$ при $2\leqslant p<\infty$. Это приводит к оценке

$$\left\|\,|B_h^{-1/2}\bar{v}_{\tau,h}((j-1)\tau)|\,B_h^{-1/2}\bar{v}_{\tau,h}(j\tau)\right\|_{L_2(h)} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\bar{v}_{\tau,h}((j-1)\tau)\|_{L_2(h)}\cdot\|\bar{v}_{\tau,h}(j\tau)\|_{L_2(h)}. \tag{3.9}$$

Из спектрального представления функций самосопряженного оператора следует

$$\|B_h^{1/2}R_{\tau,h}(i)\|_{H(h)\to H(h)} \leqslant c\,(1/2)\,(i\tau)^{-1/2}. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.9) и (3.10) вытекает

$$\left\| B_h^{1/2}\tau \sum_{j=1}^{i} R_{\tau,h}(i+1-j)\, P_h\left(\left| B_h^{-1/2}\bar v_{\tau,h}((j-1)\tau) \right| \cdot B_h^{-1/2}\bar v_{\tau,h}(j\tau) \right) \right\|_{H(h)} \leqslant$$

$$\leqslant c\tau \sum_{j=1}^{i} ((i+1-j)\tau)^{-1/2} \cdot \left\| \bar v_{\tau,h}((j-1)\tau) \right\|_{L_2(h)} \cdot \left\| \bar v_{\tau,h}(j\tau) \right\|_{L_2(h)}. \qquad (3.11)$$

Аналогично

$$\left\| B_h^{1/2}\tau \sum_{j=1}^{i} R_{\tau,h}(i+1-j)\, P_h A B_h^{-1/2} \bar v_{\tau,h}((j-1)\tau) \right\|_{H(h)} \leqslant$$

$$\leqslant c\tau \sum_{j=1}^{i} ((i+1-j)\tau)^{-1/2} \left\| \bar v_{\tau,h}((j-1)\tau) \right\|_{L_2(h)}. \qquad (3.12)$$

Нетрудно получить, что

$$\left\| B_h^{1/2}\tau \sum_{j=1}^{i} R_{\tau,h}(i+1-j)\, P_h \bar f_{\tau,h}(j\tau) \right\|_{H(h)} \leqslant$$

$$\leqslant (2v^{-1})^{1/2} \left(\tau \sum_{j=1}^{i} \left\| \bar f_{\tau,h}(j\tau) \right\|^2_{L_2(h)} \right)^{1/2} \leqslant c. \qquad (3.13)$$

Обозначим через

$$a_i = \left\| \bar v_{\tau,h}(i\tau) \right\|_{L_2(h)}.$$

Оценки (3.10)—(3.13) позволяют получить из (3.8) неравенство

$$a_i \leqslant c\tau \sum_{j=1}^{i} ((i+1-j)\tau)^{-1/2} (a_j a_{j-1} + a_{j-1}) + c$$

с суммируемой особенностью. Отсюда при достаточно малых τ приходим к оценке (3.5). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $\bar u(t, x)$, $p(t, x)$ такое решение задачи* (1.1)—(1.4), *что*

$$\bar u_{tt}(t, x) \in C([0, T], C(\Omega)),$$
$$\bar u_t(t, x) \in C([0, T], C^3(\Omega)),$$
$$p(t, x) \in C([0, T], C^2(\Omega)).$$

Тогда существует достаточно малое τ_0 такое, что при всех $\tau \leqslant \tau_0$ и любом h справедлива оценка

$$\left\| \bar u - \bar u_{\tau,h} \right\|_{C([0,T]_\tau,\, W_2^1(h))} \leqslant M\left(\tau + h^{1/2}\right), \qquad (3.14)$$

где постоянная M не зависит от h и τ.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar z_{\tau,h} = \bar u_{\tau,h} - [\bar u]_h$. Обозначим через $\bar v_{\tau,h} = B_h^{1/2} \bar z_{\tau h}$. Тогда для $\bar v_{\tau,h}$ справедливо равенство

$$v_{\tau,h}(i\tau) = -r\tau \sum_{j=1}^{i} B_h^{1/2} R_{\tau,h}(i+1-j)\, P_h \Big\{ \Big(\left| B_h^{-1/2} B_h^{1/2} \bar u_{\tau,h}((j-1)\tau) - \right.$$

$$\left. - B_h^{-1/2} B_h^{1/2} [\bar u(j-1)\tau]_h \right| \Big) \cdot B_h^{-1/2} \bar v_{\tau,h}(j\tau) + \Big(\left| B_h^{-1/2} B_h^{1/2} \bar u_{\tau,h}(j\tau) \right| -$$

$$- B_h^{-1/2} B_h^{1/2} [\bar u_{\tau,h}(j\tau)]_h \Big) [\bar u((j-1)\tau)]_h + \left| [\bar u(j\tau)]_h \right| B_h^{-1/2} \bar v_{\tau,h}((j-1)\tau) \Big\} -$$

$$-\tau \sum_{j=1}^{i} B_h^{1/2} R_{\tau,h}(i+1-j)\, P_h A B_h^{-1/2} \bar v_{\tau,h}((j-1)\tau) +$$

$$+ \tau \sum_{j=1}^{i} B_h^{1/2} R_{\tau,h}(i+1-j)\, P_h \bar \Psi_{\tau,h}(j),$$

где

$$\overline{\Psi}_{\tau,h}(j) = \nu\{\Delta_h[\overline{u}(j\tau)]_h - [\Delta\overline{u}(j\tau)]_h\} + \{r[\,|\overline{u}(j\tau)|\,\overline{u}(j\tau)]_h - r[\,|\overline{u}(j\tau)|\,]_h[\overline{u}(j\tau)]_h + A[\overline{u}(j\tau)]_h - A[\overline{u}((j-1)\tau]_h + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \overline{\partial}_0\right)[\overline{u}(j\tau)]_h + g([\operatorname{grad} p(j\tau)]_h - \operatorname{grad}_h p(j\tau))\Big\}. \quad (3.16)$$

Правая часть равенства (3.15) представляет сумму трех слагаемых $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$. Оценим каждое из них.

Как и при доказательстве леммы, приходим к оценкам

$$\|\mathcal{I}_1\|_{L_2(h)} \leqslant c\tau\sum_{j=1}^{i}[(i+1-j)\tau]^{-1/2}\cdot\left(\|\overline{v}_{\tau,h}(j\tau)\|_{L_2(h)}\cdot\|\overline{v}_{\tau,h}((j-1)\tau)\|_{L_2(h)} + \|\overline{v}_{\tau,h}(j\tau)\|_{L_2(h)} + \|\overline{v}_{\tau,h}((j-1)\tau)\|_{L_2(h)}\right), \quad (3.17)$$

$$\|\mathcal{I}_2\|_{L_2(h)} \leqslant c\tau\sum_{j=1}^{i}[(i+1-j)\tau]^{-1/2}\|\overline{v}_{\tau,h}((j-1)\tau)\|_{L_2(h)}.$$

Рассмотрим $\Psi_2(j)$. В силу предположения гладкости решения нетрудно получить оценку

$$\|\Psi_2(j)\|_{L_2(h)} \leqslant c(\tau+h). \quad (3.18)$$

Отсюда вытекает, что

$$\left\|\tau\sum_{j=1}^{i}B_h^{1/2}R_{\tau,h}(i+1-j)P_h\Psi_2(j)\right\|_{L_2(h)} \leqslant c(\tau+h). \quad (3.19)$$

Для нормы

$$\left\|\tau\sum_{j=1}^{i}B_h^{1/2}R_{\tau,h}(i+1-j)P_h\Psi_2(j)\right\|_{L_2(h)}$$

справедлива оценка [16]

$$\left\|\tau\sum_{j=1}^{i}B_h^{1/2}R_{\tau,h}(i+1-j)P_h\Psi_1(j)\right\|_{L_2(h)} \leqslant c(\tau+h^{1/2}).$$

Итак, установлена оценка

$$\|\mathcal{I}_3\|_{L_2(h)} \leqslant c(\tau+h^{1/2}). \quad (3.20)$$

Объединив оценки (3.17), (3.20), приходим к неравенству

$$a_i \leqslant c(\tau+h^{1/2}) + c\tau\sum_{j=1}^{i}[(i+1-j)\tau]^{-1/2}(a_ja_{j-1}+a_j+a_{j-1}),$$

где $a_i = \|B_h^{1/2}\overline{z}_{\tau,h}(i\tau)\|_{L_2(h)}$, из которого вытекает оценка

$$\|B_h^{1/2}\overline{z}_{\tau,h}(i\tau)\|_{L_2(h)} \leqslant c(\tau+h^{1/2}) \quad (3.21)$$

при достаточно малых τ.

Из оценки (3.21) и оценки

$$\|\bar{u} - [\bar{u}]_h\|_{C\left([0,T]_\tau, W_2^1(h)\right)} \leqslant ch^{1/2}$$

следует, что

$$\|\bar{u} - \bar{u}_{\tau,h}\|_{C\left([0,T]_\tau, W_2^1(h)\right)} \leqslant c\,(\tau + h^{1/2}).$$

Теорема доказана.

Владивосток,
Дальневосточный государственный университет
Хабаровск,
Хабаровский институт народного хозяйства

Статья поступила 6 декабря 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Саркисян А. С.* Основы теории и расчет океанических течений. Л., Гидрометеоиздат, 1966.
2 *Каменкович В. М.* Основы динамики океана. Л., Гидрометеоиздат, 1973.
3 *Кочергин В. П.* Введение в теорию и методы расчета океанических течений. Новосибирск, изд. Новосиб. ун-та, 1971.
4 *Кордзадзе А. А.* О разрешимости одной стационарной задачи динамики бароклинного океана.— Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 2, с. 308—311.
5 *Кордзадзе А. А.* О разрешимости задач динамики океана с учетом ветровых течений.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 1, с. 52—55.
6 *Марчук Г. И., Каган Б. А.* Океанические приливы. Л., Гидрометеоиздат, 1977.
7 *Солонников В. А.* Оценки решений нестационарной системы Навье — Стокса.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1973, т. 38. Л., «Наука», с. 153—231.
8 *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем.— Труды МИАН СССР, 1967, т. 11, № 5. Л., «Наука», с. 137—160.
9 *Красносельский М. А.* Топологические методы и теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
10 *Gagliardo E.* Ulterori proprieta di alcune classi di funzioni in pin variabili.— Ricerche di Mat., 1959, № 8, с. 24—51.
11 *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations.— Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 1959, v. 13, p. 509—530.
12 *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
13 *Зарубин А. Г., Тиунчик М. Ф.* О приближенных решениях одного класса нелинейных нестационарных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 11, с. 1966—1974.
14 *Загородников Ю. И., Соболевский П. Е.* О применении метода дробных степеней операторов к исследованию двумерной разностной задачи для уравнений Навье — Стокса.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 2, с. 281—284.
15 *Дьяконов Е. Г.* Разностные методы решения краевых задач. Вып. 1. М., Изд-во МГУ, 1971.
16 *Загородников Ю. И., Соболевский П. Е.* О некоторых разностных методах приближенного решения нестационарных уравнений Навье — Стокса.— Сиб. мат. ж., 1977, т. 18, № 1, с. 81—96.