МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 11, № 4 (1972), 463—470

УДК 519.4

ХОЛЛОВСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП

Л. А. Скорняков

Описываются такие многообразия $\mathfrak{V}$ полугрупп, что всякий ретракт полугруппы, свободной в $\mathfrak{V}$, или одноэлементен или свободен в $\mathfrak{V}$. Библ. 4 назв.

Начнем с необходимых определений. Подполугруппа T полугруппы S называется *ретрактом*, если существует такой гомоморфизм $\varphi : S \to T$, что $\varphi(t) = t$ для всех $t \in T$. Пусть, далее, $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие полугрупп. Полугруппу, свободную в многообразии $\mathfrak{V}$, назовем *$\mathfrak{V}$-свободной*. Многообразие $\mathfrak{V}$ называется *холловским*, если неодноэлементный ретракт $\mathfrak{V}$-свободной полугруппы является $\mathfrak{V}$-свободной полугруппой. Если $\mathfrak{V}$-свободна всякая подполугруппа $\mathfrak{V}$-свободной полугруппы, то многообразие $\mathfrak{V}$ называется *шрайеровым*. Разумеется, всякое шрайерово многообразие является холловским. Многообразие, содержащее все коммутативные полугруппы, называется *надкоммутативным*. Полугруппа с нулем называется *ниль-полугруппой*, если подходящая степень каждого из ее элементов равна нулю. Если все полугруппы многообразия $\mathfrak{V}$ являются нильполугруппами, то $\mathfrak{V}$ называется *ниль-многообразием*. Многообразие называется *групповым*, если все входящие в него полугруппы являются группами.

ТЕОРЕМА. *Холловские многообразия полугрупп исчерпываются следующим списком:*

(а) *шрайеровы многообразия;*

(б) *надкоммутативные многообразия;*

(в) *ниль-многообразия;*

(г) *холловские групповые многообразия экспоненты p^k, где p — простое число.*

З а м е ч а н и е 1. Согласно теореме Ивенса (см. [1]) шрайерово многообразие или является абелевым групповым многообразием экспоненты p, где p — простое, или определяется одним из следующих тождеств: (i) $xy = x$; (ii) $xy = y$; (iii) $xy = zt$.

З а м е ч а н и е 2. Ф. Холл установил ([2], стр. 185, следствие 44.33), что всякое абелево групповое многообразие экспоненты p^k, где p — простое, является холловским. В общем случае вопрос открыт.

Доказательству основной теоремы предпошлем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Всякое надкоммутативное многообразие является холловским.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — свободная полугруппа надкоммутативного многообразия $\mathfrak{B}$ с системой свободных образующих X и φ: $F \to H$ — гомоморфизм полугруппы F на ее ретракт H. Положим $Y = X \cap H$. Заметим, что все тождества, справедливые в многообразии $\mathfrak{B}$, имеют вид $u = v$, где слова u и v различаются лишь порядком входящих в них букв. Поэтому, если $x \in X$ и $\varphi(x) = x_1 \ldots x_n$, где $x_i \in X$, то $\varphi(x_i) \in Y$, поскольку

$$\varphi(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n).$$

Отсюда же вытекает, что полугруппа H порождается множеством Y и, следовательно, $\mathfrak{B}$-свободна.

ЛЕММА 2. *Всякое ниль-многообразие является холловским.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{B}$ — ниль-многообразие, а смысл символов F, X, φ, H и Y аналогичен введенному выше. Обозначим через K подполугруппу полугруппы H, порожденную множеством Y. Как и раньше, будем доказывать, что $H = K$. Если $H \neq K$, то $\varphi(x) \notin K$ для некоторого $x \in X$. Выберем x так, чтобы число букв, входящих в запись элемента $\varphi(x)$, было минимально. Пусть это будут буквы $x_1, \ldots, x_n$. Поскольку

$$\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x),$$

то, например, $\varphi(x_1) \notin K$. Если $\varphi(x_1) = ax_1b$, то слова a и b не могут быть пустыми одновременно. Если не пусто a, то $\varphi(a)^m = 0$ для некоторого m. Но

$$\varphi(x_1) = \varphi(\varphi(x_1)) = \varphi(a)\, \varphi(x_1)\, \varphi(b)$$

и, следовательно,

$$\varphi(x_1) = \varphi(a)^m \varphi(x_1)\, \varphi(b)^m = 0,$$

что невозможно. Если $\varphi(x_1)$ зависит от буквы y, отличной от $x_1, \ldots, x_n$, то имеем равенство $\varphi(x) = \varphi(\varphi(x))$, где правая часть зависит от y, а левая — не зависит. Полагая $y = 0$, получаем

$$\varphi(x) = 0.$$

Таким образом, $\varphi(x_1)$ зависит лишь от букв $x_2, \ldots, x_n$ и, в силу выбора элемента x, лежит в K, вопреки выбору элемента x_1.

ЛЕММА 3. *Если в холловском многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество*

$$x^m = x^{m+1}, \tag{1}$$

то $\mathfrak{V}$ или шрайерово, или ниль-многообразие.

Доказательство. Пусть F — $\mathfrak{V}$-свободная полугруппа с двумя свободными образующими x и y. Рассмотрим гомоморфизм φ: $F \to F$, определяемый условиями $\varphi(x) = xy^m$ и $\varphi(y) = y$. Ввиду (1),

$$\varphi(xy^m) = xy^m y^m = xy^m$$

и, следовательно, $H = \operatorname{Im}\varphi$ — ретракт. По условию, H — $\mathfrak{V}$-свободная полугруппа. Ввиду (1) элементы из H представимы в форме $y^k (xy^m)^l$, где k, $l \geqslant 0$, а s^0 означает пустое слово. При этом

$$y^h (xy^m)^i \cdot y^k (xy^m)^l = \begin{cases} y^h (xy^m)^{i+l}, & \text{если } i \neq 0, \\ y^{h+k} (xy^m)^l, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Если y^n не входит в систему свободных образующих полугруппы H ни при каком n, то $y = y^k (xy^m)^l$ для некоторого $l \neq 0$, т. е. в многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество

$$y = y^k (xy^m)^l \qquad (l \neq 0). \tag{2}$$

Учитывая (1), получаем

$$y^2 = y^k (xy^m)^l\, y = y^k (xy^m)^l = y, \tag{3}$$

после чего (2) превращается в

$$y = \begin{cases} xy, & \text{если } k = 0, \\ yxy, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

Если $y = yxy$, то, учитывая (3), видим, что H содержит лишь элементы xy и y, что влечет справедливость тождеств $xy=y$ или $xy = x$. В силу замечания 1, $\mathfrak{B}$ — шраерово многообразие. Таким образом, можно считать, что $v = y^n$ является одним из свободных образующих полугруппы H. Если имеется другой свободный образующий, $w = y^k (xy^m)^l$, то

$$wv = wy^n = y^k (xy)^l y^n = y^k (xy^m)^l = w.$$

Значит, в многообразии $\mathfrak{B}$ справедливо тождество $xy = x$, и оно оказывается шрайеровым. В противном случае для некоторого k справедливо тождество $xy^m = y^k$, откуда

$$xy^m = y^m. \tag{4}$$

Теперь рассмотрим гомоморфизм ψ: $F \to F$, определяемый равенствами $\psi(x) = x^m$ и $\psi(y) = y^m$. Ввиду (4) $\mathrm{Im}\psi$ — ретракт в F и содержит лишь элементы x^m и y^m. Если $x^m = y^m$, то ввиду (4) имеем

$$y^m x = x^{m+1} = xy^m = y^m,$$

т. е. $a^m = 0$ во всякой полугруппе из $\mathfrak{B}$. Если же $u = x^m$ и $v = y^m$ — свободные образующие, то

$$uv = x^m y^m = y^m = v,$$

т. е. в многообразии $\mathfrak{B}$ справедливо тождество $xy = y$, и оно оказывается шрайеровым.

ЛЕММА 4. *Если в холловском многообразии $\mathfrak{B}$ справедливо тождество*

$$x = x^{m+1}, \tag{5}$$

то или $m = 1$, или $\mathfrak{B}$ шрайерово или же $\mathfrak{B}$ групповое, причем $m = p^k$, где p — простое.

Доказательство. Из (5) очевидно следует тождество

$$x^{mk} = x^m. \tag{6}$$

Кроме того, можно считать, что тождества $x = x^{m'+1}$, где $1 \leqslant m' < m$, не справедливы в $\mathfrak{B}$. Пусть F — $\mathfrak{B}$-свободная полугруппа с двумя свободными образующими x и y. Рассмотрим гомоморфизм φ: $F \to F$ определяемый условиями $\varphi(x) = xy$ и $\varphi(y) = y^m$. Ввиду (5) имеем

$$\varphi(xy) = xyy^m = xy.$$

Из (6) вытекает

$$\varphi(y^m) = (y^m)^m = y^m.$$

Следовательно, $H = \operatorname{Im} \varphi$ — ретракт в F. По условию, H — $\mathfrak{B}$-свободная полугруппа. Ввиду (5) элементы из H представимы в форме $(xy)^i$, y^m или $y^m (xy)^k$, причем $1 \leqslant i$, $k \leqslant m$. Допустим, что система свободных образующих полугруппы H содержит два различных элемента, u и v. Если $u = u^i v^k$, где $1 \leqslant i$, $k \leqslant m$, то $i = 1$. Действительно, данное соотношение является тождеством многообразия $\mathfrak{B}$. Полагая $v = u^m$ и учитывая (5) и (6), получаем $u = u^i$. Неравенство $i \neq 1$ противоречит выбору m. Если $u = y^m (xy)^k$ и $v = y^m (xy)^l$, то ввиду (5)

$$u^l = y^m (xy)^{kl} = v^k.$$

Снова применяя (5), получаем

$$u = u^{m-l+1} v^k,$$

что в силу показанного выше влечет $l = m$. Аналогично устанавливается, что $k = m$. Таким образом, $k = m = l$, вопреки выбору u и v. Точно так же разбирается случай, когда $u = (xy)^k$ и $v = (xy)^l$. Если $u = y^m$, а $v = y^m (xy)^k$ или $v = (xy)^i$, то ввиду (5)

$$vu = vy^m = v,$$

и многообразие $\mathfrak{B}$ оказывается шрайеровым в силу замечания 1. Допустим, наконец, что $u = y^m (xy)^k$, причем $k \geqslant 0$, и $v = (xy)^l$. Если $k = 0$, то согласно (5)

$$vu = (xy)^l y^m = v,$$

и шрайеровость многообразия $\mathfrak{B}$ вытекает из замечания 1. Если же $k \neq 0$, то, учитывая (5), получим

$$vu^l = (xy)^{l+kl} = v^{k+1}.$$

Отсюда

$$v = v^{m-k+1} u^l$$

и, как показано выше, $m - k + 1 = 1$, т. е. $k = m$. Таким образом, $u = y^m (xy)^m$ и ввиду (5)

$$vu = (xy)^l y^m (xy)^m = (xy)^l (xy)^m = (xy)^l = v,$$

что, как и выше, влечет шрайеровость многообразия $\mathfrak{V}$. Предположим теперь, что полугруппа H содержит лишь один свободный образующий u. Тогда

$$u^k = xy, \tag{7}$$

и

$$u^l = y^m, \tag{8}$$

где $1 \leqslant k,\ l \leqslant m$. Согласно (5)

$$u = u^{m+1-l}u^l = u^{m+1-l}y^m = u^{m+1-l},$$

что в силу выбора m влечет $l = m$. С помощью (5) — (8) получим

$$xy = (xy)^{m+1} = u^{k(m+1)} = u^{km}u^k = y^m (xy).$$

Таким образом, в многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество

$$xy = y^m (xy). \tag{9}$$

Учитывая вид элементов полугруппы H, будем иметь $u = y^m$ или $u = (xy)^h$. В первом случае ввиду (6) и (7) получаем

$$y^m = y^{mk} = u^k = xy.$$

Полагая $x = y^m$, приходим к равенству

$$y^m = y^{m+1} = y,$$

противоречащему выбору m. Во втором случае с помощью (6) и (8), получаем

$$(xy)^m = (xy)^{hm} = u^m = y^m,$$

откуда

$$y = yy^m = y (xy)^m = (yx)^m y.$$

Применяя (9), приходим к тождеству

$$x^m y = x^m (yx)^m y = (yx)^m y = y. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим гомоморфизм $\psi : F \to F$, где $\psi (x) = x^m$ и $\psi (y) = y^m$. Из (10) вытекает, что полугруппа $\operatorname{Im} \psi_m$ —

ретракт в F и что она содержит лишь элементы x^m и y^m. Если они различны, то они являются свободными образующими и, ввиду (10), в многообразии $\mathfrak{V}$ оказывается справедливым тождество $uv = v$, обеспечивающее его шрайеровость. В противном случае в многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество

$$x^m = y^m. \tag{11}$$

Из справедливости тождеств (10) и (11) вытекает, что $\mathfrak{V}$ — групповое многообразие (см. [4], стр. 487, п. 4.4). При этом циклическая группа G порядка m гомоморфно отображается на $\mathfrak{V}$-свободную полугруппу. В силу выбора m $\mathfrak{V}$-свободной полугруппой оказывается сама группа G. Если $m = kl$, где k и l взаимно просты, то циклическая группа порядка k, будучи ретрактом группы G, сама является свободной. Но тогда в многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество $x = x^{k+1}$, что противоречит выбору m. Таким образом, $m = p^h$, где p — простое.

Доказательство теоремы. Ввиду лемм 1 и 2 ясно, что многообразия, указанные в формулировке, являются холловскими. Рассмотрим теперь холловское многообразие $\mathfrak{V}$, не являющееся надкоммутативным. В силу результатов Ивенса (см. [3], стр. 1105) в многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество

$$x^m = x^{m+n}.$$

Пусть F — $\mathfrak{V}$-свободная полугруппа с одним свободным образующим x. Ввиду [4] (стр. 156, п. 3.11) F содержит подгруппу и, следовательно, идемпотент x^k. Рассмотрим гомоморфизм φ: $F \to F$, где $\varphi(x) = x^{k+1}$. В силу выбора k

$$\varphi(x^{k+1}) = (x^{k+1})^{k+1} = x^{k^2}x^{2k}x = x^{k+1}.$$

Следовательно, подполугруппа H, порожденная элементом x^{k+1} оказывается ретрактом в F, а потому одноэлементна или свободна. В первом случае имеем

$$x^{2k+2} = (x^{k+1})^2 = x^{k+1},$$

откуда, еще раз учитывая [4] (стр. 156, п. 3.11) получаем

$$x^{m+1} = x^{2k+2+m-1} = x^{k+m} = x^m.$$

Во втором случае допустим, что $u = x^{(k+1)h}$ — свободный образующий полугруппы H. Но тогда

$$u^{k+1} = x^{(k+1)^2 h} = x^{(k+1)h} = u.$$

Таким образом, в многообразии $\mathfrak{V}$ справедливо тождество (1) или (5), и остается применить лемму 3 или 4.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
11.V.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Evans T., Schreier varietes of semigroups, Math. Z., **112**, № 4 (1969), 296—299.
[2] Нейман Х., Многообразия групп, М., 1969.
[3] Evans T., A condition for a cancellation semigroup to bea group, Amer. Math. Monthly, 73, № 10 (1966), 1104—1106.
[4] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.