E. V. Zakharov, I. V. Sobyanina, One-dimensional integro-differential equations of problems of diffraction by screens, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1986, Volume 26, Number 4, 632–636

https://www.mathnet.ru/eng/zvmmf4028

УДК 517.958:535.4

ОБ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ЭКРАНАХ

ЗАХАРОВ Е. В., СОБЯНИНА И. В.

(Москва)

В предположении единственности доказано существование решения одномерного сингулярного интегродифференциального уравнения, возникающего в теории дифракции H-поляризованного электромагнитного поля на идеально проводящих экранах. Дано математическое обоснование метода кусочно-постоянной аппроксимации и коллокации для численного решения данного уравнения. Получена равномерная оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

В [1] задача дифракции H-поляризованного электромагнитного поля на цилиндрическом идеально проводящем экране была сведена к решению одномерного сингулярного интегродифференциального уравнения относительно плотности электрического тока $j(t)$, наведенного на поверхности:

$$\frac{1}{4\omega\varepsilon h_\tau(\tau)}\frac{d}{d\tau}\int_{-b}^{b} j(t)\frac{\partial}{\partial t}H_0^{(2)}(kL)\,dt - \tag{1}$$

$$-\frac{\omega\mu}{4h_\tau(\tau)}\int_{-b}^{b} j(t)\,s(\tau,t)\,H_0^{(2)}(kL)\,dt = E_\tau{}^0(\tau),$$

где

$$h_\tau(\tau)=\{[\xi'(\tau)]^2+[\eta'(\tau)]^2\}^{1/2},\qquad s(\tau,\ t)=\xi'(\tau)\,\xi'(t)+\eta'(\tau)\,\eta'(t),$$

$$L(\tau,\ t)=\{[\xi(\tau)-\xi(t)]^2+[\eta(\tau)-\eta(t)]^2\}^{1/2};$$

контур поперечного сечения экрана задан параметрически:

$$\xi=\xi(t),\qquad \eta=\eta(t),\qquad t\in[-b,\ b];$$

$E_\tau{}^0(\tau)$ – известная функция. В [1] предложен и реализован также алгоритм численного решения уравнения (1). В настоящей статье в предположении единственности решения уравнения (1) доказано существование решения в некотором классе функций. Для численного решения (1) методом кусочно-постоянной аппроксимации и коллокации дана оценка скорости сходимости приближенного решения к точному при увеличении числа точек разбиения отрезка $[-b,\ b]$.

1. В дальнейшем удобнее рассматривать (1) в более абстрактной форме:

$$\frac{d}{dx}\int_{-b}^{b}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt+\int_{-b}^{b}K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x),\qquad -b<x<b. \tag{2}$$

Первое слагаемое в левой части уравнения – производная от сингулярного интеграла с ядром Коши, понимаемого в смысле главного значения [2]. Если контур поперечного сечения экрана достаточно гладкий ($\xi''(t)\in H^\mu$, $\eta''(t)\in H^\mu$) и без особых точек ($[\xi'(t)]^2+[\eta'(t)]^2\neq0$), то ядро $K(x,\ t)$ имеет интегрируемую особенность при совпадении аргументов:

$$K(x,\ t)=K_0(x,\ t)\,(|x-t|^\lambda)^{-1},\quad K_0(x,\ t)\in H^\alpha,\quad f(x)\in H^\alpha,\quad \alpha<1-\lambda<\mu, \tag{3}$$

где H^α – пространство Гёльдера с показателем α.

Введем в рассмотрение пространство $H_*^{1,\beta}$ функций $\varphi(x)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $\varphi(-b)=\varphi(b)=0$ таких, что $\varphi'(x)=\varphi'^*(x)\,(b^2-x^2)^{-1/2}$, причем $\varphi'^*(x)\in H^\beta$. Если в $H_*^{1,\beta}$ ввести норму следующим образом:

$$\|\varphi\|_{H_*^{1,\beta}}=\|\varphi\|_C+\|\varphi'^*\|_{H^\beta},$$

где

$$\|\varphi\|_C = \max_{x\in[-b,b]} |\varphi(x)|,$$

$$\|\psi\|_{H^\beta} = \max_{x\in[-b,b]} |\psi(x)| + \max_{x,x_0\in[-b,b]} \frac{|\psi(x)-\psi(x_0)|}{|x-x_0|^\beta},$$

то $H_*^{1,\beta}$ станет банаховым пространством.

Заметим, что из единственности решения дифракционной задачи (см. [3]) непосредственно следует, что уравнение (1) не может иметь двух различных решений, ограниченных на концах отрезка $[-b, b]$. Имеет место

Теорема 1. *Если однородное уравнение, соответствующее* (2), *имеет только тривиальное решение, а правая часть* $f(x)$ *и ядро* $K(x, t)$ *удовлетворяют условию* (3), *то решение уравнения* (2) *существует в классе* $H_*^{1,\beta}$, где

(4) $$\beta=\min\{\alpha-\varepsilon, {}^1/_2-\varepsilon\};$$

здесь $\varepsilon>0$ – *произвольная сколь угодно малая константа.*

Доказательство. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

(5) $$\int_{-b}^{b} \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt + \int_{-b}^{b} K_1(x,t)\varphi(t)\,dt = F(x)+C,$$

где

$$K_1(x,t)=\int_{-b}^{x} K(\xi,t)\,d\xi, \qquad F(x)=\int_{-b}^{x} f(\xi)\,d\xi,$$

C – произвольная константа, причем из условий (3) непосредственно следует $K_1(x, t)\in H^\alpha$, $F'(x)\in H^\alpha$. Уравнение (5) эквивалентно в классе H^α уравнению Фредгольма II рода [2]

(6) $$\varphi(x)-\int_{-b}^{b} N(x,t)\varphi(t)\,dt=\hat F(x), \quad \text{т. е.} \quad \varphi-A\varphi=\hat F,$$

и дополнительному условию

(7) $$\int_{-b}^{b} (b^2-x^2)^{-1/2}\left[\int_{-b}^{b} K_1(x,t)\varphi(t)\,dt-F(x)\right]dx=\pi C,$$

где

(8) $$N(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-x^2}{b^2-\tau^2}\right)^{1/2}\frac{K_1(\tau,t)}{\tau-x}\,d\tau,$$

(9) $$\hat F(x)=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-x^2}{b^2-\tau^2}\right)^{1/2}\frac{F(\tau)+C}{\tau-x}\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-x^2}{b^2-\tau^2}\right)^{1/2}\frac{F(\tau)}{\tau-x}\,d\tau,$$

так как

$$\int_{-b}^{b}(b^2-\tau^2)^{-1/2}\frac{d\tau}{\tau-x}=0.$$

Покажем, что любое решение уравнения (6) из класса H^α принадлежит пространству $H_*^{1,\beta}$, где β определяется формулой (4). Представим $\hat F(x)$ в виде

$$(10)\qquad \hat{F}(x) = -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-b}^{x} d\xi \int\limits_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-\tau^2}{b^2-\xi^2}\right)^{1/2}\frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau.$$

Из (9), (10) на основании свойств сингулярных интегралов [2] имеем $\hat{F}(x)\in H_*^{1,\beta}$. Аналогично из (8) для $N(x,t)$ получаем

$$(11)\qquad N(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-b}^{x} d\xi \int\limits_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-\tau^2}{b^2-\xi^2}\right)^{1/2}\frac{K(\tau,t)}{\tau-\xi}\,d\tau,$$

откуда следует (см. [2]), что функция

$$N_x{}'^*(x,t) = (b^2-x^2)^{1/2}\frac{\partial N(x,t)}{\partial x}$$

имеет такую же особенность при совпадении аргументов, что и $K(x, t)$ из (3), а именно:

$$(12)\qquad N_x{}'^*(x,t) = K_2(x,t)\,(|x-t|^\lambda)^{-1},$$

причем $K_2(x, t)\in H^\beta$. В силу того, что интегральный оператор с ядром (12) переводит пространство $L_\infty[-b, b]$ в $H^\beta[-b, b]$ (см. [4]), для любой функции $\varphi(x)\in H^\alpha$ образ оператора A из (6) принадлежит $H_*^{1,\beta}$, откуда следует, что решение $\varphi=A\varphi+\hat{F}$ уравнения (6) из класса H^α принадлежит классу $H_*^{1,\beta}$. На основании доказанного можно утверждать, что (5) эквивалентно уравнению (6) и функциональному условию (7) в классе $H_*^{1,\beta}$.

Докажем эквивалентность уравнений (2) и (6) в классе $H_*^{1,\beta}$. Пусть $\varphi_0(x)\in H_*^{1,\beta}$ – решение (6), тогда $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (5) при $C=C_0$ (константа C_0 однозначно определяется из условия (7)), а следовательно, $\varphi_0(x)$ – решение уравнения (2), так как последнее получено в результате дифференцирования правой и левой частей (5). Заметим, что в классе функций $H_*^{1,\beta}$ первое слагаемое в левой части (2) имеет смысл (см. [5]). Пусть теперь $\varphi_0(x)$ – решение уравнения (2). Заменив x в (2) на ξ и проинтегрировав правую и левую части по ξ от $-b$ до x, получим, что $\varphi_0(x)$ является решением уравнения (5) с константой

$$C = \int\limits_{-b}^{b}\frac{\varphi_0(t)}{b+t}\,dt.$$

Последний интеграл существует, так как $\varphi_0(x)\in H_*^{1,\beta}$. Но из сказанного выше следует, что $\varphi_0(x)$ – решение уравнения (6). Итак, эквивалентность (2) и (6) в классе $H_*^{1,\beta}$ доказана.

Оператор A с ядром (11) компактен в пространстве $H_*^{1,\beta}$, следовательно, из условия теоремы о единственности решения уравнения (2) и из доказанной эквивалентности (2) и (6) в банаховом пространстве $H_*^{1,\beta}$ согласно альтернативе Фредгольма следует существование решения (6), а значит, и (2) при любой правой части, удовлетворяющей условию (3). Теорема доказана.

2. Перейдем к анализу алгоритма численного решения уравнения (2), основанного на методе кусочно-постоянной аппроксимации и коллокации [1].

Пусть точки $x_1=-b, x_2,\ldots, x_{n+1}=b$ разбивают отрезок $[-b, b]$ на n равных частей $[x_i, x_{i+1}]$ длиной $h=2b/n$, $x_i=-b+h(i-1)$. Будем искать решение (2) в виде линейной комбинации базисных функций $\lambda_i(t)$ с неизвестными коэффициентами $\varphi_n(x_{0i})$:

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_n(x_{0i})\lambda_i(t),$$

где $\varphi_n(x_{0i})$ – значение приближенного решения в узлах интерполяции при $x_{0i}=x_i+h/2$, $i=1, 2,\ldots, n$,

$$\lambda_i(t)=\begin{cases}1, & t\in[x_i,x_{i+1}],\\ 0, & t\bar{\in}[x_i,x_{i+1}].\end{cases}$$

Подставив $\varphi_n(t)$ в (2) и потребовав равенства левой и правой частей (2) в n точках коллокации x_{0j}, $j=1, 2,\dots, n$, совпадающих с узлами интерполяции, получим систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\varphi_n(x_{0i})$. Поскольку

$$\frac{d}{dx}\int_{-b}^{b}\frac{\lambda_i(t)}{t-x}\,dt=(x-x_{i+1})^{-1}-(x-x_i)^{-1},$$

то система имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(x_{0i})\left[(x_{0j}-x_{i+1})^{-1}-(x_{0j}-x_i)^{-1}\right]+ \tag{13}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(x_{0i})\int_{x_i}^{x_{i+1}}K(x_{0j},t)\,dt=f(x_{0j}).$$

В этом методе, как и в методе саморегуляризации, который используется для решения уравнений Фредгольма I рода со слабой особенностью в ядре, важным моментом является выбор точек коллокации, совпадающих с узлами интерполяции искомой функции, находящимися в середине частичных отрезков разбиения. Как видно из (13), коэффициенты матрицы растут по модулю при приближении к главной диагонали. Заметим, что аналогичные системы возникают в задачах аэродинамики при решении уравнения Прандтля методом дискретных вихрей [6]. Справедлива

Теорема 2. *Пусть уравнение* (2) *имеет единственное решение* $\varphi(x)$. *Тогда система линейных алгебраических уравнений* (13) *однозначно разрешима при достаточно большом числе точек разбиения* n *и решение* $\varphi_n(x_{0i})$ *системы* (13) *сходится к точному решению* $\varphi(x_{0i})$ *уравнения* (2) *во всех точках коллокации* x_{0i}, $i=1, 2,\dots$ $\dots, n$, *при* $n\to\infty$, *причем справедлива равномерная оценка*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varphi_n(x_{0i})-\varphi(x_{0i})|\leqslant Ch^\beta, \tag{14}$$

где h — *длина частичного отрезка разбиения,* C — *здесь и далее некоторая константа, не зависящая от* h, β *определяется формулой* (4).

Доказательство. По доказанной выше эквивалентности уравнений (2) и (6), $\varphi(x)$ является решением уравнения Фредгольма II рода (6). По блочному методу заменим уравнение (6) функциональным уравнением

$$\tilde{\varphi}(x)-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}(x_{0j})\int_{x_j}^{x_{j+1}}N(x,t)\,dt=\hat{F}(x),\quad\text{т. е.}\quad \tilde{\varphi}-\tilde{A}\tilde{\varphi}=\hat{F}. \tag{15}$$

В силу того что $\hat{F}(x)\in H^{1,\beta}_{*}$, а ядро $N(x,t)$ имеет вид (11), (12), уравнения (6), (15) можно рассматривать как операторные в пространстве $H^{1,\beta}_{*}$, причем операторы A и $\tilde{A}$ близки по норме [4]:

$$\|A-\tilde{A}\|_{H^{1,\beta}_{*}}\leqslant Ch^\beta. \tag{16}$$

Из оценки (16) следует, что при достаточно больших n уравнение (15) однозначно разрешимо в силу однозначной разрешимости (6), причем имеет место неравенство

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{H^{1,\beta}_{*}}\leqslant Ch^\beta. \tag{17}$$

Для нахождения решения (15) необходимо и достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений, которая получается при $x=x_{0i}$, $i=1, 2,\dots, n$:

$$(18) \qquad \tilde{\varphi}(x_{0i})-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}(x_{0j})\int_{x_j}^{x_{j+1}}N(x_{0i},t)\,dt=\hat{F}(x_{0i}), \quad \text{т. е.} \quad (E-\tilde{A}_n)\tilde{\varphi}_n=\hat{F}_n,$$

где E – единичная матрица. Из эквивалентности (18), (15) следует (см. [7]), что норма обратной матрицы ограничена независимо от n, так как уравнение (6) является уравнением Фредгольма II рода, и, как следствие (17), справедлива оценка

$$(19) \qquad \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{\tilde{\varphi}}(x_{0i})-\varphi(x_{0i})|\leqslant Ch^{\beta}.$$

Обращая главную часть исходной системы (13), которая представлена первой суммой, так, как это сделано в [6] при обосновании метода дискретных вихрей, и используя основные оценки, полученные в [6], приведем систему (13) к эквивалентной системе алгебраических уравнений:

$$(20) \qquad \varphi_n(x_{0i})-\left[\sum_{j=1}^{n}\varphi_n(x_{0j})\right]\frac{1}{\pi^2}\int_{-b}^{x_{0i}}d\xi\int_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-x_0^2}{b^2-\xi^2}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left[(x_0-\xi)^{-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}K(x_0,\tau)\,d\tau\right]dx_0=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-b}^{x_{0i}}d\xi\int_{-b}^{b}\left(\frac{b^2-x_0^2}{b^2-\xi^2}\right)^{1/2}\frac{f(x_0)}{x_0-\xi}\,dx_0+\theta_n(x_{0i}),$$

где

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\theta_n(x_{0i})|\leqslant Ch^{\beta}.$$

Сравнивая системы (18) и (20) и учитывая ограниченность нормы обратной матрицы $(E-\tilde{A}_n)^{-1}$ и оценку (19), получаем, что система линейных алгебраических уравнений (20), а следовательно, и исходная система (13) однозначно разрешимы при достаточно больших n, причем скорость сходимости приближенного решения к точному решению уравнения (2) может быть оценена с помощью неравенства (14):

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varphi_n(x_{0i})-\varphi(x_{0i})|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varphi_n(x_{0i})-\tilde{\tilde{\varphi}}(x_{0i})|+$$

$$+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{\tilde{\varphi}}(x_{0i})-\varphi(x_{0i})|\leqslant Ch^{\beta},$$

где β, $0<\beta<1$, определяется по формуле (4). Теорема доказана.

Литература

1. *Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В.* Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких цилиндрических экранах.– Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 338–341.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. *Хенл Х., Мауэ П., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
4. *Бакушинский А. Б.* Некоторые вопросы приближенного решения интегральных уравнений со «слабой» особенностью.– В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. X. М.: Изд-во МГУ, 1968, с. 9–15.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
6. *Лифанов И. К.* О методе дискретных вихрей для крыла бесконечного размаха и уравнении Прандтля для крыла конечного размаха.– Изв. вузов. Матем., 1980, № 6, с. 44–51.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 28.VI.1984