А. Б. Гулисашвили, О следах функций из пространств С. Л. Соболева и О. В. Бесова и о продолжениях с подмножеств евклидова пространства, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 137–145

А.Б.Гулисашвили

О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С.Л.СОБОЛЕВА И О.В.БЕСОВА И О ПРОДОЛЖЕНИЯХ С ПОДМНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В этой работе дается решение задачи об "ограниченном продолжении" для пространств С.Л.Соболева W_1^m и пространств О.В. Бесова B_1^s [I]. Поясним, что имеется в виду под этой задачей. Обозначим через $\mathcal{H}_\alpha$, $0 \leq \alpha < n$ меру Хаусдорфа размерности α на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а через $B(x,r)$ – шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Из теоремы вложения, доказанной в [6], вытекает следующий результат: пусть E – борелевское подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда условие

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, 0<r<1} \left\{ r^{-\alpha} \mathcal{H}_\alpha (E \cap B(x,r)) \right\} < \infty \tag{I}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы существовал оператор следа

$$Tr : B_1^{n-\alpha} \longrightarrow L_E^1(\mathcal{H}_\alpha) . \tag{2}$$

В (2) через $L_E^1(\mathcal{H}_\alpha)$ обозначено пространство L^1 по мере $\mathcal{H}_\alpha$, индуцированной на E, а оператор следа Tr – это такой ограниченный линейный оператор, что $Tr\, f = f_E$ при $f \in C_0^\infty$, где f_E – сужение f на E. Если $\alpha = m$, где m – целое число, $1 \leq m < n$, то в приведенном выше утверждении пространство B_1^{n-m} можно заменить на более широкое пространство W_1^{n-m}. Решение упомянутой задачи о продолжении состоит в том, что доказывается сюрьективность оператора (2), и следовательно, существование ограниченного продолжения (нелинейного) $Ext : L_E^1(\mathcal{H}_\alpha) \to B_1^{n-\alpha}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть множество E удовлетворяет условию (I). Тогда для любой функции $f \in L_E^1(\mathcal{H}_\alpha)$ существует функция F, $F \in B_1^{n-\alpha}$, такая, что $Tr\, F = f$, и выполнена оценка

$$\| F \|_{B_1^{n-\alpha}} \leq c \| f \|_{L_E^1(\mathcal{H}_\alpha)} ,$$

где постоянная c не зависит от f.

Ясно, что при целом m теорема I справедлива и для прост-

I) Необходимые определения из теории пространств дифференцируемых функций можно найти в [I],[2],[4],[5].

ранства W_1^{n-m} .

ЗАМЕЧАНИЕ I. В книге С.Л.Соболева [I] на стр.8I отмечалась важность изучения поведения функций из пространства W_p^m на многообразиях меньшей, чем n , размерности. Исследования С.Л. Соболева положили начало многочисленным работам о следах. Ссылки на них можно найти в [2], [5] и [I5]. В работе [I2] доказано существование оператора следа $Tr: W_1^1 \longrightarrow L^1_{\mathbb{R}^{n-1}}(\mathcal{H}_{n-1})$ и сюръективность этого оператора. В работах [7] и [I4] изучались следы на приведенной границе $\partial^*\Omega$ области Ω , имеющей конечный периметр, в случае пространства $W_1^1(\Omega)$. Теоремы о продолжении, имеющиеся в [I2] и [I4] , охватываются теоремой I.

Говорят, что функция $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ может быть строго определена в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если существует конечный предел

$$\Lambda F(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{mB(x,r)} \int_{B(x,r)} F(u)\,du , \qquad (3)$$

где m обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}^n$. В работе [II] доказано, что если множество E удовлетворяет условию

$$\mathcal{H}_\alpha(E \cap B(x,r)) < \infty , \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (4)$$

то тогда каждая функция $F \in B_1^{n-\alpha}$ может быть строго определена $\mathcal{H}_\alpha$-почти всюду на E , а если выполнено условие (I), то тогда верно равенство $Tr\,F(y) = \Lambda F(y)$ для $\mathcal{H}_\alpha$-почти всех $y \in E$. При $\alpha = m$ аналогичная теорема верна и для пространства W_1^{n-m} I).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известны некоторые аналоги приведенных выше результатов при $p > 1$. В работах [I0] и [II] доказано, что условие (I) необходимо и достаточно для существования оператора следа $Tr: B_{p,1}^{\frac{n-\alpha}{p}} \longrightarrow L_E^p(\mathcal{H}_\alpha)$, а в [II] , кроме того, доказано, что условие (4) достаточно для существования предела (3) $\mathcal{H}_\alpha$-почти всюду на E у любой функции $F \in B_{p,1}^{\frac{n-\alpha}{p}}$. Ограниченное продолжение из $L^p_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{H}_m)$ в $B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}$ построено в [8] и [9] . В [I0] и [II] получен аналог теоремы I при $p > 1$ для множеств E , удовлетворяющих некоторому дополнительному условию (счетная $(\mathcal{H}_m, m)$ - спрямляемость). Следует отметить также, что в [7], [I4] и [I5] имеются различные частичные результаты о следах в смысле строгой определенности. Наконец, известно, что

I) В работе [II] на стр.53 имеется опечатка. Пропущено условие $\xi < 1$ в определении максимальной функции $M f$.

линейных операторов продолжения

$$\mathrm{Ext}: L^1_{\mathbb{R}^{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow W^1_1 \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}: L^p_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{H}_m) \longrightarrow B_{p,1}^{\frac{n-m}{p}}$$

не существует (см.соответственно [13] и [8]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть δ, $\delta \subset \mathbb{R}^n$, таково, что $0 < \mathcal{H}_\alpha(\delta) < \infty$. Определим для любого натурального числа i и числа $a > 0$ множество

$$E(a,i) = \{ x \in \delta : \mathcal{H}_\alpha(\delta \cap c(x,j)) \leq a 2^{-j\alpha},\ j \geq i \},$$

где через $C(x,j)$ обозначены все замкнутые двоичные кубы ранга j, содержащие точку x. Докажем, что существует a_0, зависящее только от n и α, для которого

$$\mathcal{H}_\alpha(E(a_0,i)) = 0,\quad i \geq 1\ . \tag{5}$$

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство теоремы 2.I0.I9 (2) в [I6], но приспособлено для двоичных кубов.

Рассмотрим покрытие $\{c_m\}$, $m \geq 1$ множества $E(a,i)$ при помощи семейства произвольных замкнутых кубов с ребрами, параллельными осям координат, и пусть $\mathrm{diam}\ c_m \leq 2^{-i-1}$, $m \geq 1$. Тогда существуют натуральные числа i_m, для которых $2^{-i_m-1} \leq \mathrm{diam}\ C_m \leq 2^{-i_m}$, $m \geq 1$, и следовательно, существует семейство $\{\mathcal{D}_k\}$, $k \geq 1$ двоичных кубов, покрывающее $E(a,i)$, и такое, что $\sum\limits_k (\mathrm{diam}\,\mathcal{D}_k)^\alpha \leq c \sum\limits_m (\mathrm{diam}\ C_m)^\alpha$, $\mathrm{diam}\ \mathcal{D}_k \leq 2^{-i}$, $k \geq 1$, где c зависит только от n и α. Имеем

$$\mathcal{H}_\alpha(E(a,i)) \leq \sum_k \mathcal{H}_\alpha(\delta \cap \mathcal{D}_k) \leq a(\sqrt{n})^{-\alpha} \sum_k (\mathrm{diam}\,\mathcal{D}_k)^\alpha \leq a c (\sqrt{n})^{-\alpha} \sum_m (\mathrm{diam}\, C_m)^\alpha.$$

Отсюда $\mathcal{H}_\alpha(E(a,i)) \leq a c'(\sqrt{n})^{-\alpha} \mathcal{H}_\alpha(E(a,i))$, и если мы возьмем a_0 таким, что $a_0 c'(\sqrt{n})^{-\alpha} < 1$, то получим (5), ввиду того, что $\mathcal{H}_\alpha(E(a,i)) < \infty$.

Из равенства (5) вытекает, что для $\mathcal{H}_\alpha$-почти всех $x \in \delta$ существует последовательность двоичных кубов $C_k(x)$, $k \geq 1$, такая, что $x \in C_k(x)$, $k \geq 1$; $\mathrm{diam}\ C_k(x) \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$; $a_1(\mathrm{diam}\ C_k(x))^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha(\delta \cap C_k(x))$, $k \geq 1$, причем a_1 зависит только от n и α. Применяя теорему 2.I0.I8(3) из [I6] и теорему Витали о покрытиях для мер общего вида (см. [3], стр.232), получаем последовательность попарно не пересекающихся двоичных кубов $\{C_k\}$, $k \geq 1$, такую, что

$$\mathcal{H}_\alpha(\sigma\setminus\bigcup_k C_k)=0;\ a_1(\operatorname{diam} C_k)^\alpha\leqslant\mathcal{H}_\alpha(\sigma\cap C_k)\leqslant a_2(\operatorname{diam} C_k)^\alpha,\ \ k\geqslant 1 .$$

Докажем теперь три леммы о срезающих функциях. Эти леммы являются основными деталями доказательства теоремы I и,на наш взгляд, представляют и самостоятельный интерес.

Пусть задано произвольное конечное семейство $\{\mathcal{K}_i\}$, $1\leqslant i\leqslant N$, состоящее из попарно не пересекающихся замкнутых двоичных кубов. Обозначим через $a\mathcal{K}_i$, $a>1$ куб, полученный из куба $\mathcal{K}_i$ при помощи растяжения в a раз относительно центра $\mathcal{K}_i$. Положим $\mathcal{K}=\bigcup\mathcal{K}_i$, $a\mathcal{K}=\bigcup(a\mathcal{K}_i)$.

ЛЕММА I. Для любого натурального числа m существуют числа $a>1$, $b>1$, зависящие только от m и n, и функция $S\in C_0^m(\mathbb{R}^n)$, для которых I) $S(x)=1$, $x\in\mathcal{K}$; 2) $\operatorname{supp} S\subset a\mathcal{K}$; 3) $|D^\alpha S(x)|\leqslant b\sum_{i=1}^N(\operatorname{diam}\mathcal{K}_i)^{-|\alpha|}\chi_{a\mathcal{K}_i}(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ для всех мультииндексов α, $|\alpha|\leqslant m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что кубы семейства $\{\mathcal{K}_i\}$ занумерованы следующим образом: $\{\mathcal{K}_{i_0+1},\dots,\mathcal{K}_{i_1},\dots,\mathcal{K}_{i_{\ell-1}+1},\dots,\mathcal{K}_{i_\ell}\}$, $i_0=0$, $i_\ell=N$; $\operatorname{diam}\mathcal{K}_i=r_k$, $i_{k-1}+1\leqslant i\leqslant i_k$, $1\leqslant k\leqslant\ell$, а числа r_k строго убывают с возрастанием k. Введем обозначение $A_k=\mathcal{K}_{i_{k-1}+1}\cup\ldots\cup\mathcal{K}_{i_k}$, $1\leqslant k\leqslant\ell$, и определим функции

$$P_k(x)=\gamma\left(\frac{b_1 r_{A_k}(x)}{r_k}\right),\quad W_k(x)=\gamma\left(\frac{b_2 r_{5/4A_k}(x)}{r_k}\right),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где r – регуляризованное расстояние по Уитни (см. [4], стр. 203), а γ – функция из $C_0^\infty[0,\infty)$, такая, что $\gamma(0)=1$; $0\leqslant\gamma\leqslant1$; $\operatorname{supp}\gamma=[0,1]$; $\sum_{i=1}^M|\gamma^{(i)}(u)|\leqslant cu^M$, $u\in[0,1]$, где M – достаточно большое натуральное число. Числа b_1 и b_2 в (6) подобраны так, что выполнены условия $\operatorname{supp} P_k\subset 9/8\,A_k$, $\operatorname{supp} W_k\subset 11/8\,A_k$. Это возможно сделать, ввиду свойств функций r и γ. Легко проверить, что $P_k, W_k\in C_0^m$.

Искомой функцией S в лемме I будет функция S_ℓ, определяемая из следующей рекуррентной формулы:

$$S_1=P_1,\quad S_k=S_{k-1}(1-W_k)+P_k,\quad 2\leqslant k\leqslant\ell . \tag{7}$$

Для таким образом определенной функции S просто проверяются условия 1) и 2) леммы 1. Что касается условия 3), то в его справедливости можно убедиться, почленно дифференцируя формулу (7) с учетом определения (6) и оценок для производных функций γ и r. Например, для производной $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} S(x)\right| \leqslant c\Big\{\sum_{i=1}^{N}(\operatorname{diam}\mathcal{X}_i)^{-2}\chi_{a\mathcal{X}_i}(x)+\sum_{i=1}^{\ell}(r_i r_\ell)^{-1}\chi_{aA_\ell}(x)\Big\},$$

откуда следует нужная оценка для $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} S$, поскольку имеем $r_k=\sqrt{n}\ 2^{-p_k}$, где числа p_k строго возрастают. Лемма 1 доказана.

Пусть теперь задано счетное семейство $\{\mathcal{X}_i\}$, $i\geqslant 1$ попарно не пересекающихся замкнутых двоичных кубов, такое, что $\sum m(\mathcal{X}_i)<\infty$, и пусть $\mathcal{X}=\cup\mathcal{X}_i$; $a\mathcal{X}=\cup(a\mathcal{X}_i)$, $a>1$. Обозначим через e_j орт j-ой координатной оси, а для измеримой функции F и натурального числа p символом $\Delta^p_{te_j}F$ обозначим p-ую разность функции F с шагом te_j. Положим для краткости $r_i=\operatorname{diam}\mathcal{X}_i$.

В этих предположениях и обозначениях справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Для любого натурального числа m существуют числа $a>1$, $b>1$, множество $G\subset\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $m(\mathbb{R}^n\setminus G)=0$, и функция $S\in L^\infty$, такие, что

1) $S(x)=1$, $x\in\mathcal{X}$; $0\leqslant S(x)\leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}^n$;

2) $\operatorname{supp} S\subset a\mathcal{X}$;

3) $\left|\Delta^p_{te_j}S(x)\right|\leqslant c\Big\{t^p\sum\limits_{i:t<r_i}r_i^{-p}\chi_{b\mathcal{X}_i}(x)+\sum\limits_{\ell=0}^{p}\ \sum\limits_{i:t>r_i}\chi_{b\mathcal{X}_i}(x+\ell t e_j)\Big\}$

для всех $t>0$, $x\in G$, $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant p\leqslant m$. Числа a и b зависят только от m и n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы доказать лемму 2, сначала повторим рассуждения в доказательстве леммы 1. Рекуррентную формулу (7) будем рассматривать для всех натуральных чисел k. Согласно оценкам из леммы 1, неравенство 3) из условия леммы 2 справедливо для функций S_k, $k\geqslant 1$, с постоянными a и b, не зависящими от k. Ввиду того, что $\sum m(\mathcal{X}_i)<\infty$, последовательность S_k сходится в L^1 к функции S. Остается перейти к пределу почти всюду на $\mathbb{R}^n$ в полученном для S_k неравенстве.

Лемма 2 доказана.

Вернемся теперь к множеству δ, удовлетворяющему условию $0 < \mathcal{H}_\alpha(\delta) < \infty$, и рассмотрим числовую последовательность $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$. Тогда, как было показано выше, существует семейство $C^i = \{C^i_k\}$, $i \geq 1$, $k \geq 1$ последовательностей попарно не пересекающихся замкнутых двоичных кубов, для которого 1) $\mathcal{H}_\alpha(\delta \setminus \bigcup_k C^i_k) = 0$, $i \geq 1$ 2) $diam\ C^i_k \leq \varepsilon_i$, $i \geq 1$, $k \geq 1$; 3) $a_1(diam\ C^i_k)^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha(\delta \cap C^i_k) \leq a_2(diam\ C^i_k)^\alpha$, $i \geq 1$, $k \geq 1$.

Построим при помощи леммы 2 срезающую функцию S_i по последовательности $\{C^i_k\}$, $k \geq 1$. Для этих функций справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть задана функция $F \in C^\infty_0$. Тогда

$$\lim_{i \to \infty} \sup \| F S_i \|_{B_1^{n-\alpha}} \leq c \| Tr\, F \|_{L^1_\delta(\mathcal{H}_\alpha)},$$

с постоянной c, не зависящей от функции F.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 3 будет доказываться в предположении что $\alpha = n-1$. Другие случаи получаются аналогично, хотя иногда и более трудоемко. Запишем неравенство

$$\lim_{i \to \infty} \sup \| F S_i \|_{B_1^1} \leq c \lim_{i \to \infty} \sup \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty t^{-2} dt \int_{R^n} |\Delta^1_{te_j} F(x+te_j)| |\Delta^1_{te_j} S_i(x)| dx +$$

$$+ \lim_{i \to \infty} \sup \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty t^{-2} dt \int_{R^n} |F(x+2te_j)| |\Delta^2_{te_j} S_i(x)| dx = I_1 + I_2. \tag{8}$$

Используя лемму 2 и оценку $|\Delta^1_{te_j} F(x+te_j)| \leq \xi t^\theta$, $t > 0$, $0 < \theta < 1$ (число ξ может зависеть от функции F), получаем

$$I_1 \leq c \lim_{i \to \infty} \sup \int_0^\infty t^{-1+\theta} dt \sum_{k: t < r^i_k} (r^i_k)^{n-1} + c \lim_{i \to \infty} \sup \int_0^\infty t^{-2+\theta} dt \sum_{k: r^i_k < t} (r^i_k)^n =$$

$$= c \lim_{i \to \infty} \sup \sum_k (r^i_k)^{n-1+\theta} \leq c \lim_{i \to \infty} \sup \varepsilon_i^\theta \sum_k (r^i_k)^{n-1} \leq c \mathcal{H}_{n-1}(\delta) \lim_{i \to \infty} \sup \varepsilon_i^\theta = 0, \tag{9}$$

ввиду свойств кубов C^i_k. В (9) для краткости положено $r^i_k = diam\ C^i_k$.

Далее, из оценок в лемме 2 получаем

$$I_2 \leq c \limsup_{i\to\infty} \int_0^\infty dt \sum_{k:t<r_k^i} (r_k^i)^{-2} \int_{aC_k^i} |F(x)|\,dx + c \limsup_{i\to\infty} \int_0^\infty t^{-2} dt \sum_{k:t>r_k^i} \int_{aC_k^i} |F(x)|\,dx +$$

$$+ c \limsup_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty t^{-2} dt \sum_{k:t>r_k^i} \left\{ \int_{aC_k^i} |F(x+2te_j) - F(x)|\,dx + \int_{aC_k^i} |F(x+te_j) - F(x)|\,dx \right\}. \tag{10}$$

Последнее из трех слагаемых в правой части неравенства (10) равно нулю. Это доказывается так же, как и равенство $I_1 = 0$. Теперь из (10) выводим, что

$$I_2 \leq c \limsup_{i\to\infty} \sum_k (r_k^i)^{-1} \int_{aC_k^i} |F(x)|\,dx \leq$$

$$\leq c \limsup_{i\to\infty} \int_\delta \sum_k \frac{1}{m(C_k^i)} \int_{aC_k^i} |F(x)|\,dx\, \chi_{\delta \cap aC_k^i}(u)\, d\mathcal{H}_{n-1}(u) \leq c \| \mathrm{Tr}\, F \|_{L^1_{\delta}(\mathcal{H}_{n-1})}, \tag{11}$$

ввиду свойств кубов C_k^i и сходимости средних к функции $|F|$.

Складывая оценки (9) и (11) и учитывая (8), получаем заключение леммы 3.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ I. Пусть сначала E удовлетворяет только условию (4). Из плотности в $L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)$ следов на E функций из C_0^∞ следует, что любую функцию $f \in L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)$ можно представить в виде $f = \sum f_k$, где функции f_k являются сужениями на E функций $F_k \in C_0^\infty$, и справедливо неравенство $\sum \|f_k\|_{L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)} \leq c \|f\|_{L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)}$. По лемме 3 существует последовательность S_k срезающих функций, таких, что S_k соответствует множеству $E \cap \operatorname{supp} F_k$, и кроме того,

$$\sum \| S_k F_k \|_{B_1^{n-\alpha}} \leq c \sum \| f_k \|_{L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)} \leq c \| f \|_{L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)}.$$

Из последних неравенств следует, что ряд $\sum S_k F_k$ сходится в пространстве $B_1^{n-\alpha}$ к функции F . Если E удовлетворяет условию (I), то функция F будет искомой функцией.

Теорема I доказана.

Как сообщил автору Ю.В.Нетрусов, недавно им независимо получен близкий к теореме I результат: каждую функцию из $L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)$, где E удовлетворяет условию (4), можно продолжить в пространство $B_1^{n-\alpha}$, если понимать след в смысле строгой определенности функции. Функция F , определенная выше, годится и для этой теоремы. Следует только заметить, что согласно теореме 2.10.18 (3) из [16], множество E , удовлетворяющее условию (4), можно разрезать на счетное множество кусков, удовлетворяющих условию (I). Остается применить теорему о совпадении операторного следа и следа в смысле строгой определенности.

Литература

I. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950. 255 с.

2. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977. 455 с.

3. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж.Т. Линейные операторы. М., 1962. 895 с.

4. С т е й н И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с.

5. Т р и б е л ь Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 664 с.

6. М а з ь я В.Г. О суммируемости по произвольной мере функций из пространства С.Л.Соболева - Л.Н.Слободецкого. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. IX. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.92, с.192-202.

7. Б у р а г о Ю.Д., М а з ь я В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1967, т.3, с.1-152.

8. Б у р е н к о в В.И., Г о л ь д м а н М.Л. О продолжении функций из L_p . - Труды МИАН, 1979, CL , с.31-51.

9. Г о л ь д м а н М.Л. О продолжении функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на пространство большего числа измерений. - Матем.заметки, 1979, т.25, № 4, с.513-520.

10. Г у л и с а ш в и л и А.Б. О следах функций из пространств Бесова на подмножествах евклидова пространства. - Препринт ЛОМИ, Р-2-85, Ленинград, 1985. 30 с.

11. Г у л и с а ш в и л и А.Б. О следах дифференцируемых функций на подмножествах евклидова пространства. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. ХУ. Зап.научн. семин.ЛОМИ, 1986, т.149, с.52-66.

12. G a g l i a r d o E. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variable. -Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, 1957, v.27, p.284-305.

13. P e e t r e J. A counter-example connected with Gagliardo's trace theorem. - Comment.Math., 1979, v.11, p.277-282.

14. A n z e l l o t t i C., G i a q u i n t a M. Funzioni BV e tracce. - Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, 1978, v.60, p.1-21.
15. J o n s s o n A., W a l l i n H. Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$. London - Paris - Utrecht - New York, 1984, 221 p.
16. F e d e r e r H. Geometric Measure Theory. Berlin-Heidelberg - New York, 1969. 676 p.

A.B.Gulisashvili. Traces of functions belonging to Sobolev and Besov spaces and extensions from subsets of Euclidean space.

Summary

It is proved that the existence of the trace operator $Tr : B_1^{n-\alpha} \to L^1_E(\mathcal{H}_\alpha)$, $0 \leq \alpha < n$ implies the existence of the bounded extension (nonlinear) $Ext : L^1_E(\mathcal{H}_\alpha) \to B_1^{n-\alpha}$ where $\mathcal{H}_\alpha$ denotes the α-dimensional Hausdorff measure in $\mathbb{R}^n$ and E is a Borel subset of $\mathbb{R}^n$.

I/2 IO Заказ I296