В. А. Боровицкий, С. В. Кисляков, Интерполяция абстрактных пространств типа Харди, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2021, том 503, 22–56

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 503, 2021 г.

В. А. Боровицкий, С. В. Кисляков

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ХАРДИ

§1. Введение

Пусть (X_0, X_1) – совместимая пара банаховых пространств, то есть X_0 и X_1 вложены в какое-то общее хаусдорфово топологическое векторное пространство. Пусть Y_0 и Y_1 – замкнутые подпространства пространств X_0 и X_1, соответственно. Пара (Y_0, Y_1) называется K-замкнутой в паре (X_0, X_1), если найдется такая постоянная C, что для любого разложения $x = x_0 + x_1$, где $x \in Y_0 + Y_1$, а $x_i \in X_i$, существует другое разложение $x = y_0 + y_1$, где $y_i \in Y_i$ и $\|y_i\|_{Y_i} \leqslant C\|x_i\|_{X_i}$ при $i = 0, 1$.

Когда мы имеем дело с K-замкнутой подпарой, интерполяционные пространства вещественного метода для нее легко вычисляются, если мы умеем вычислять их для исходной пары (X_0, X_1), см. про это, например, [2]. В конкретных ситуациях, однако, K-замкнутость интересна сама по себе. Например, в следующей хорошо известной теореме она означает, что любое “грубое” разрезание аналитической функции на два измеримых слагаемых можно сделать и с сохранением аналитичности, причем новые слагаемые будут “примерно того же размера”.

Теорема. *В размерностях $d = 1, 2$ при $1 \leqslant p < \infty$ пара пространств Харди $(H^p(\mathbb{T}^d), H^\infty(\mathbb{T}^d))$ K-замкнута в паре $(L^p(\mathbb{T}^d), L^\infty(\mathbb{T}^d))$.*

См. статью [6] или обзоры [1, 2] про случай $d = 1$ и работу [12] про случай $d = 2$. Неизвестно, сохраняется ли эта теорема при $d > 2$.

В размерностях 1 и 2 доступны и некоторые весовые результаты. Не приводя самых общих формулировок, отметим, что K-замкнутость пары $(H^p(w, \mathbb{T}), H^\infty(\mathbb{T}))$ в паре $(L^p(w, \mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$, где w – некоторый вес на окружности[1], эквивалентна условию $\log w \in \mathrm{BMO}$, см. тот же обзор [2]. При $d = 2$ информация далеко не столь полна, известны лишь

Ключевые слова: интерполяция, K-замкнутость, регулярный вес, модуль, аннулятор.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00053, `https://rscf.ru/project/18-11-00053`.

[1]Чтобы избежать вырождения, обычно предполагается, что $\log w \in L^1(\mathbb{T})$.

достаточные условия на вес w, вероятно, далекие от необходимых. А именно, в [5] вторым автором было доказано, что K-замкнутость имеет место, если $w(\xi_1, \xi_2) = u_1(\xi_1)u_2(\xi_2)$, где $\log u_1, \log u_2 \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$. Затем в работе [10] первый автор распространил этот результат на веса вида $u_1(\xi_1)v(\xi_1, \xi_2)u_2(\xi_2)$, где u_1 и u_2 – такие, как выше, а вес v удовлетворяет подходящим условиям Макенхаупта.

В недавних статьях [4] и [11] похожие утверждения были получены в рамках абстрактной теории функций, то есть теории равномерных алгебр. В [4] на абстрактную ситуацию было распространено упомянутое выше невесовое утверждение для двумерного тора, а в [11] – некоторые весовые результаты для пространств Харди на окружности. В настоящей работе мы хотим пойти несколько дальше и доказать абстрактный аналог весового результата для двумерного тора из статьи первого автора [10], где вес Макенхаупта от двух переменных окаймлен двумя весами от одной переменной.

Конструкции из [4] и [11] навеяны теорией w^*-алгебр Дирихле (изложенной, например, в [7]), но к ней не сводятся: как в тех работах, так и в настоящей статье “основная мера” не обязательно мультипликативна на алгебре, “гармоническое сопряжение” не обязательно однозначно с точностью до константы и не обязательно удовлетворяет всем привычным оценкам. В какой-то степени эта новая теория, еще один фрагмент которой излагается здесь, сродни “построениям одним циркулем” из школьной геометрии: возникают препятствия (например, упомянутые выше), и при общем понимании того, что они проходимы в принципе, конкретные способы их преодоления не всегда очевидны.

План дальнейшего изложения таков. Чтобы справиться с окаймленными весами вида $u_1(\xi_1)v(\xi_1, \xi_2)u_2(\xi_2)$, нужна некая процедура, относящаяся к одной переменной и называемая обычно аналитическим разбиением единицы. Чтобы обосновать ее, нужна дополнительная информация об интерполяции (точнее, о K-замкнутости) для обобщений пространств Харди.

Частично такие интерполяционные теоремы доказывались в [11], но там авторы ограничились лишь утверждениями, необходимыми для доказательства теоремы Гротендика. Для построения аналитического разбиения единицы нужны более общие результаты – им посвящен §2.

В §3 разработанная в §2 теория вместе с идеями из работы [4] будут использованы для того, чтобы получить абстрактный вариант теоремы о K-замкнутости, пригодной для установления весовых результатов для двумерного тора. В §4 из этой абстрактной теоремы будут выведены утверждения о K-замкнутости для весов двух переменных, удовлетворяющих некоторым условиям Макенхаупта. Наконец, в §5 мы займемся непосредственно аналогом теоремы про двумерный тор и окаймленные веса из статьи [10].

§2. Интерполяция и разбиение единицы

Пусть μ – положительная σ-конечная мера на некотором множестве S, а X – w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(\mu)$. Будем предполагать, что X содержит функцию, тождественно равную единице, которую будем обозначать символом $\mathbf{1}$. Пусть $p \in (0,\infty), k \in \mathbb{N}$.

Определение. Алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,k,\mu})$, если для любой неотрицательной функции $\varphi \in L^p(\mu)$ существует такая последовательность функций $\{u_n\}_{n=0}^\infty \subseteq X$, $u_n \to u$ п.в., что выполнены соотношения

$$\operatorname{Re} u_n \geqslant 0, \qquad \left\|u_n^k\right\|_{L^p(\mu)} \leqslant C \left\|\varphi\right\|_{L^p(\mu)}, \qquad \operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{1/k},$$

причем константа C не зависит от функции φ.

Дальнейшие оценки (в частности, в теоремах о K-замкнутости) будут зависеть от p, k и C. Читатель сможет легко проследить, что при разных преобразованиях, описанных далее, например, при переходе к весовым мерам вида $w\,\mathrm{d}\mu$, эти параметры меняются контролируемым образом. Это замечание следует иметь в виду всюду ниже: мы, как правило, опускаем утверждения о равномерности оценок в формулировках.

Условия, подобные условию $(\alpha_{p,k,\mu})$, присутствовали в работах [4] и [11] в более сильной форме: там было $k = 1$, $p \in (1,\infty)$ и требовалось точное равенство $\operatorname{Re} u = \varphi$. Мы будем ссылаться на то условие как на $(\alpha^0_{p,\mu})$.

Отметим, что в случае, когда $k > 1$ и $p > 1$, эквивалентная форма условия $(\alpha_{p,k,\mu})$ получилось бы, если бы мы потребовали лишь слабой сходимости $u_j \to u$ в $L^{kp}(\mu)$: тогда исходная формулировка восстанавливается переходом к выпуклым комбинациям и подпоследовательностям (см. подробнее в [4]).

Условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ постулирует некое свойство, типичное для оператора гармонического сопряжения. В [4, лемма 2.2] было показано, что условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ выполняется при любом p, $1 < p < \infty$, если X является w^*-алгеброй Дирихле относительно меры μ. (Это предполагает, среди прочего, что мера μ – вероятностная и мультипликативная на X.) В классическом случае алгебры $H^\infty(\mathbb{T})$ условие $(\alpha^0_{p,m})$, где m – нормированная мера Хаара на окружности $\mathbb{T}$, проверяется совсем просто: достаточно положить $u_n = \varphi * K_n + i\widetilde{\varphi * K_n}$, где K_n – ядра Фейера, а волна обозначает гармоническое сопряжение.

В некоторых примерах мера μ, даже будучи конечной, может оказаться не мультипликативной на X. Это типично для весовых ситуаций. Так, в случае $X = H^\infty(\mathbb{T})$ оператор гармонического сопряжения непрерывен в $L^p(w\,\mathrm{d}m)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда вес w удовлетворяет условию Макенхаупта A_p. Для таких весов описанная простая конструкция гарантирует условие $(\alpha^0_{p,w\,\mathrm{d}m})$. Полезно отметить, что условие $(\alpha^0_{r,w\,\mathrm{d}m})$ при некоторых $r < p$ вызывает сомнения – по крайней мере, описанное выше рассуждение теряет силу. Мы увидим вскоре, что более свободное условие (α_p, k, μ) ведет себя иначе.

Константа C, возникающая в оценках в дальнейшем тексте, может иметь разные значения в разных выражениях. Тем не менее, иногда, чтобы подчеркнуть различие констант, мы будем иногда дополнительно использовать символы C', C'', $\widetilde{C}$.

Займемся теперь вопросом о параметрах в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$.

2.1. Изменение параметров в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$**.** Сначала сделаем замечание о действии аналитических функций на элемент алгебры X. Пусть K – пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $L^\infty(\mu)$. Канонический изоморфизм между $L^\infty(\mu)$ и $C(K)$, то есть преобразование Гельфанда, сохраняет комплексное сопряжение и отношение порядка для вещественных функций. Поскольку каждый ненулевой линейный мультипликативный функционал на X представляется некоторой вероятностной мерой на K, видим, что если $f \in X$ и $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, то спектр функции $\delta + f$ (как элемента алгебры X) лежит в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant \delta\}$. Таким образом, $(\delta + f)^\rho \in X$ при $\rho \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ (имеется в виду главная ветвь степени).

При $\rho < 0$ и $\operatorname{Re} f \geqslant 0$ также справедливо неравенство

$$\|(\delta + f)^\rho\|_X = \|(\delta + f)^\rho\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant \delta^\rho.$$

Если же $\rho > 0$, то получаем даже, что $f^\rho \in X$. Действительно, имеет место поточечная сходимость $\lim\limits_{\delta\to 0} (\delta + f)^\rho = f^\rho$ (главная ветвь положительной степени непрерывна в $\{\operatorname{Re} z \geqslant 0\}$), а сходимость п.в. с ограниченными нормами влечет сходимость в w^*-топологии пространства $L^\infty(\mu)$.

Лемма 1. *Условие* $(\alpha_{p,k,\mu})$ *влечет условие* $(\alpha_{p,l,\mu})$ *при любом* $l > k$. *При этом константа* C *меняется контролируемым образом. Более того, функции* u_n *из условия* $(\alpha_{p,l,\mu})$ *можно выбрать так, чтобы выполнялось поточечное неравенство* $|\operatorname{Im} u_n| \leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{2l}\right) |\operatorname{Re} u_n|$.

Доказательство. Возьмем функции u_n, существование которым гарантируется условием $(\alpha_{p,k,\mu})$. Тогда функции $v_n = u_n^{k/l} \cos\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^{-1}$ обслуживают условие $(\alpha_{p,l,\mu})$. Действительно, поскольку $k/l < 1$, видим, что $\operatorname{Re} v_n \geqslant 0$. Более того, значения функций v_n лежат в угле раствора $\pi k/l$ с положительной вещественной полуосью в качестве биссектрисы, так что

$$|\operatorname{Im} v_n| \leqslant \operatorname{tg}(\pi k/2l) \operatorname{Re} v_n, \qquad \operatorname{Re} v_n \leqslant |v_n| \leqslant (\cos(\pi k/2l))^{-1} \operatorname{Re} v_n. \tag{1}$$

Отсюда, если $v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ в смысле сходимости почти всюду, то

$$\operatorname{Re} v \geqslant |v| \cos(\pi k/2l) = |u|^{k/l} \geqslant (\operatorname{Re} u)^{k/l} \geqslant \varphi^{1/l}.$$

Кроме того,

$$\left\|v_n^l\right\|_{L^p(\mu)}^p = \int\limits_S |u_n|^{kp} \cos\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^{-lp} \mathrm{d}\mu \leqslant C^p \cos\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^{-lp} \|\varphi\|_{L^p(\mu)}^p$$

Это доказывает лемму. □

Замечание. Константу $\operatorname{tg}(\pi k/2l)$ можно сделать сколь угодно малой за счет выбора числа l. Кроме того, из рассуждения видно, что если при проверке условия $(\alpha_{p,k,\mu})$, как это обычно бывает, конкретное значение параметра k несущественно, достаточно обеспечить неравенство $|u| \geqslant \varphi^{1/k}$ вместо $\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{1/k}$. Действительно, исходное условие восстановится при любом увеличении числа k.

Покажем, что в каком-то смысле условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ не зависит от p.

Лемма 2. *Если выполнено условие* $(\alpha_{p,k,\mu})$, *то для каждого* $s \in (0, \infty)$ *существует число* $l \in \mathbb{N}$ *такое, что выполнено условие* $(\alpha_{s,l,\mu})$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant \varphi \in L^s(\mu)$. Допустим сначала, что $s > p$. Применив условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ к функции $\varphi^{s/p} \in L^p(\mu)$, мы получим последовательность функций $u_n \in X$, для которых $\operatorname{Re} u_n \geqslant 0$, а кроме того, $\left\|u_n^k\right\|_{L^p(\mu)} \leqslant C \left\|\varphi^{s/p}\right\|_{L^p(\mu)}$ и $\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{s/pk}$ для $u \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Функции $v_n = u_n^{p/s}\widetilde{C}$, где $\widetilde{C} \overset{\text{def}}{=} \cos(\pi p/2s)^{-1}$, будут искомыми. Действительно, $\operatorname{Re} v_n \geqslant 0$, так как показатель p/s меньше единицы. Далее,

$$\begin{aligned}\left\|v_n^k\right\|_{L^s(\mu)}^s &= \widetilde{C}^{ks} \int\limits_S |u_n|^{kp}\, \mathrm{d}\mu = \widetilde{C}^{ks} \left\|u_n^k\right\|_{L^p(\mu)}^p \\ &\leqslant \widetilde{C}^{ks} C^p \left\|\varphi^{s/p}\right\|_{L^p(\mu)}^p = \widetilde{C}^{ks} C^p \left\|\varphi\right\|_{L^s(\mu)}^s .\end{aligned}$$

Кроме того, если $v \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, то

$$\operatorname{Re} v \geqslant \cos(\pi p/2s)\, |v| = |u|^{p/s} \geqslant \varphi^{1/k}$$

Значит, выполнено условие $(\alpha_{s,k,\mu})$ с тем же k, но другой постоянной C.

Пусть теперь $s < p$ и пусть l – наименьшее целое число, для которого $p_0 = ls > p$. По первой части доказательства, выполняется условие $(\alpha_{p_0,k,\mu})$. Взяв функцию $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in L^s(\mu)$, применим это условие к функции $\varphi^{s/p_0} \in L^{p_0}(\mu)$. Получим функции u_n, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} u_n \geqslant 0, \quad \left\|u_n^k\right\|_{L^{p_0}(\mu)} \leqslant C \|\varphi^{s/p_0}\|_{L^{p_0}(\mu)}, \quad \text{и} \\ &\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{s/p_0 k}, \quad \text{где} \quad u \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} u_n.\end{aligned}$$

Так как $|u_n|^{kp_0} = \left|u_n^{lk}\right|^s$, то

$$\left\|u_n^{lk}\right\|_{L^s(\mu)} \leqslant C^{p_0/s} \left\|\varphi^{s/p_0}\right\|_{L^{p_0}(\mu)}^{p_0/s} = C^{p_0/s} \left\|\varphi\right\|_{L^s(\mu)} .$$

Кроме того, $\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{s/p_0 k} = \varphi^{1/lk}$. Значит, выполнено условие $(\alpha_{s,lk,\mu})$. $\square$

Приведем один “учебный” пример. Рассмотрим алгебру таких функций $f \in L^\infty(\mathbb{T} \times [0,1])$, что $f(\cdot,t) \in H^\infty(\mathbb{T})$ при почти всех $t \in [0,1/2]$. Для этой алгебры все вопросы, рассматриваемые в этой статье, не представляют проблемы, а условие $(\alpha^0_{p,\mu})$, разумеется, выполнено при всех $p \in (1, \infty)$. Однако операция гармонического сопряжения, соответствующая этой алгебре, будет сильно неоднозначной.

Замечание. В дальнейшем нам часто не будут важны конкретные значения параметров p и k в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$, поэтому мы будем говорить об условии (α_μ), имея в виду выполнение требования $(\alpha_{p,k,\mu})$ для каких-нибудь $0 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N}$. Также, допуская некоторую неточность в обозначениях, иногда мы будем писать (α^0_μ), имея в виду условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ для какого-то показателя $1 < p < \infty$, который неважен в рассматриваемых обстоятельствах.

2.2. Принцип максимума и K-замкнутость. Пусть, кроме алгебры X, задано еще одно w^*-замкнутое подпространство $Y \subseteq L^\infty(\mu)$, являющееся модулем над X. Пусть $0 < r < \infty$ и $Y^{r,\mu}$ – замыкание пространства $Y \cap L^r(\mu)$ в $L^r(\mu)$. Для единообразия положим $Y^{\infty,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} Y$. Когда мера μ ясна из контекста, будем писать Y^r вместо $Y^{r,\mu}$. Мы собираемся доказать следующую интерполяционную теорему.

Теорема 1. *Пусть w^*-замкнутая алгебра $X \subseteq L^\infty(\mu)$ удовлетворяет условию (α_μ), а $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ – w^*-замкнутый модуль над алгеброй X. Тогда пара (Y^r, Y) является K-замкнутой в паре $(L^r(\mu), L^\infty(\mu))$ при любом значении показателя $0 < r < \infty$.*

Позже мы выясним, что условие (α_μ) переносится на некоторые весовые меры $w\,\mathrm{d}\mu$, благодаря чему из теоремы 1 получится множество ее весовых аналогов.

Рассуждения, доказывающие теорему 1, следуют некоторым построениям из работ [4, 11]. Однако то, что условие (α_μ) несколько более свободно, чем $(\alpha^0_{p,\mu})$, влечет изменения в деталях. Еще некоторые изменения вызваны тем, что в работах [4] и [11] мера μ предполагалась конечной. Почему мы будем описывать конструкции подробно, по крайней мере на первых порах.

Кроме теоремы 1, полезно еще знать аналог граничного принципа максимума из классической теории пространств Харди на единичной окружности (он гласит, что $H^s(\mathbb{T}) \cap L^t(\mathbb{T}) = H^t(\mathbb{T})$, $t < s$). Сформулируем этот аналог. Пусть $\mathcal{H}^Y = \cup_{s>0}(Y^s + Y)$. Если рассматриваемый модуль Y ясен из контекста, будем писать $\mathcal{H}$ вместо $\mathcal{H}^Y$.

Теорема 2. *Пусть алгебра X удовлетворяет условию (α_μ), и пусть $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ – w^*-замкнутый модуль над алгеброй X. Предположим, что $0 < r \leqslant \infty$ и пространства $\mathcal{H}$ и Y^r определены как выше. Тогда*

(а) $L^r(\mu)\cap\mathcal{H}=Y^r$ *с равенством норм;*
(б) $(L^r(\mu)+L^\infty(\mu))\cap\mathcal{H}=Y^r+Y$ *с эквивалентностью норм.*

2.2.1. *Срезающие функции.* Сначала докажем одно простое техническое утверждение.

Лемма 3 (ср. с леммой 3 из [11])**.** *Пусть функции* u_n+iv_n *из* X *сходятся п.в. к функции* $u+iv$*, причем* u_n*,* v_n *вещественны,* $u_n\geqslant 0$*. Если* $\delta>0$*, то* $(\delta+u+iv)^{-1}\in X$ *и* $\left\|(\delta+u+iv)^{-1}\right\|_X\leqslant\delta^{-1}$.

Доказательство. Мы уже отмечали, что $\left\|(\delta+u_n+iv_n)^{-1}\right\|_X\leqslant\delta^{-1}$. С другой стороны, функции $(\delta+u_n+iv_n)^{-1}$ сходятся п.в., а поэтому, благодаря ограниченности норм, и в w^*-топологии, к $(\delta+u+iv)^{-1}$. □

Замечание. Поскольку пространство Y тоже w^*-замкнуто, оно также выдерживает предельный переход п.в. по ограниченным последовательностям своих элементов. Это пригодится в дальнейшем.

Лемма 4. *Пусть* $\varphi\in L^s(\mu)$*,* $\varphi\geqslant 0$*, а число* $l\in\mathbb{N}$ *таково, что выполнено условие* $(\alpha_{s,l,\mu})$*. Пусть* $\gamma\in\mathbb{N}$*. Тогда найдется функция* $\Phi\in X$*:*

1) $\|1-\Phi\|_{L^s(\mu)}\leqslant C\,\|\varphi\|_{L^s(\mu)}$,
2) $|\Phi|\leqslant C/\left(1+\varphi^{1/l}\right)^{l\gamma}$.

Для удобства сразу же условимся, что, если иное специально не оговорено, мы будем пользоваться этой леммой с $\gamma=1$.

Доказательство. Применим условие $(\alpha_{s,l,\mu})$ к функции φ, получим последовательность $u_n\in X$, $\operatorname{Re}u_n\geqslant 0$, $u_n\to u$ п.в., $\left\|u_n^l\right\|_{L^p(\mu)}\leqslant C\,\|\varphi\|_{L^p(\mu)}$ и $\operatorname{Re}u\geqslant\varphi^{1/l}$. Положим $\Psi=\frac{1}{(1+u)^\gamma}$, тогда, пользуясь леммой 3, получаем $\Psi\in X$ и $\|\Psi\|_X\leqslant 1$. Кроме того,

$$|\Psi|=\frac{1}{|1+u|^\gamma}\leqslant\frac{1}{(1+\operatorname{Re}u)^\gamma}\leqslant\frac{1}{\left(1+\varphi^{1/l}\right)^\gamma}.$$

Наконец, пусть $\Phi=1-(1-\Psi^l)^l$. Ясно, что $|\Phi|\leqslant C\,|\Psi|^l$, откуда получается оценка 2. Ясно также, что $|1-\Phi|\leqslant C\,|1-\Psi|^l$. Из выкладки

$$|1-\Psi|\leqslant\left|\frac{1}{1+u}-1\right|\cdot C=\frac{C|u|}{|1+u|}\leqslant C|u|$$

сразу же следует оценка 1. □

2.2.2. *Доказательство теорем* 1 *и* 2. Удобно сначала проверить утверждение (а) теоремы 2. После этого мы сформулируем и докажем теорему $1'$, совместное обобщение теоремы 1 и утверждения (б) теоремы 2.

Итак, пусть $f \in L^r(\mu) \cap \mathcal{H}$, т.е. $f \in L^r(\mu)$ и $f = g + h$, где $g \in Y^s$ для некоторого $s > 0$ и некоторой функции h из Y. Если $s = \infty$, сразу получаем $f \in Y \cap L^r(\mu) \subseteq Y^r$, так что считаем впредь, что $s < \infty$.

Пусть сначала $r = \infty$. Мы должны доказать, что $g = f - h \in Y$. В случае конечной меры μ это было сделано в лемме 5 в [11]. В общем случае отличия минимальны, но мы приведем рассуждение ради полноты.

Без потери общности считаем, что $\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant 1/2$. Выберем $l \in \mathbb{N}$ так, что выполнено условие $(\alpha_{s,l,\mu})$. Пусть $g_n \in Y$, $\|g - g_n\|_{L^s(\mu)} \to 0$. Отметим, что $\left\|\chi_{|g_n|>1} g_n\right\|_{L^s(\mu)} \to 0$. Действительно, если $|g_n(x)| > 1$, то в силу неравенства $|g(x)| \leqslant 1/2$ имеем

$$|g_n(x)|^s \leqslant 2^s \left(|g_n(x)| - |g(x)|\right)^s \leqslant 2^s \left|g_n(x) - g(x)\right|^s,$$

и осталось проинтегрировать это неравенство по множеству

$$\{x : |g_n(x)| > 1\}.$$

Положим теперь $\varphi_n = \left(\max(|g_n|, 1)^{1/l} - 1\right)^l$ и применим к этим функциям лемму 4, получив функции $\Phi_n \in X$. Тогда, конечно, $g_n \Phi_n \in Y$, более того, в силу оценки 2 из леммы 4,

$$|g_n \Phi_n| \leqslant \frac{C\,|g_n|}{\left(1 + \varphi_n^{1/l}\right)^l} = \frac{C\,|g_n|}{\max(|g_n|, 1)} \leqslant C.$$

Между тем, из оценки 1 вытекает, что

$$\|1 - \Phi_n\|_{L^s(\mu)}^s \leqslant C \int\limits_{|g_n| \geqslant 1} |g_n|^s \, \mathrm{d}\mu \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, некая подпоследовательность Φ_{n_j} последовательности Φ_n стремится к $\mathbf{1}$ п.в. Можно считать, что и $g_{n_j} \to g$ п.в., тогда $g_{n_j} \Phi_{n_j} \to g$ п.в., откуда $g \in Y$ по замечанию после леммы 3.

Рассмотрим теперь случай, когда $r < \infty$. Снова пользуемся равенством $f = g + h$, где $g \in Y^s$, $h \in Y$. Пусть $t > 0$. Построим по функциям

$\varphi_t = \left(\max(t^{-1}|g|, 1)^{1/l} - 1\right)^l$ функции Φ_t как в лемме 4. Все эти функции равномерно ограничены, кроме того

$$|g\Phi_t| \leqslant \frac{C|g|}{\left|1+\varphi_t^{1/l}\right|^l} = \frac{C|g|}{\max(t^{-1}|g|, 1)} \leqslant Ct,$$

так что $g\Phi_t \in Y$ по первой части доказательства (поскольку, очевидно, $g\Phi_t \in Y^s$). В то же время лемма 4 показывает, что

$$\|1-\Phi_t\|^s_{L^s(\mu)} \leqslant C \int\limits_{|g|\geqslant t} (|g|/t)^s \, \mathrm{d}\mu \leqslant Ct^{-s} \|g\|^s_{L^s(\mu)}.$$

Таким образом, $\Phi_{t_n} \to 1$ п.в. для некоторой последовательности $t_n \to \infty$. Далее, $f\Phi_{t_n} = g\Phi_{t_n} + h\Phi_{t_n} \in Y$ и, очевидно, $f\Phi_{t_n} \to f$ п.в. По теореме Лебега о мажорированной сходимости, эти функции сходятся к f также и в $L^r(\mu)$, откуда $f \in Y^r$.

Замечание. Попутно получилось следующее: если $f \in Y^s$, $0 < s < \infty$, то существуют функции $f_k \in Y$ такие, что $|f_k| \leqslant C|f|$ и $f_k \to f$ п.в.

Как уже отмечалось, утверждение (б) теоремы 2 удобно доказывать вместе с теоремой 1. Сформулируем усиление обоих этих утверждений.

Теорема 1′. *Пусть $f \in \mathcal{H}$ и $|f| \leqslant u + v$, где $u, v \geqslant 0$, $u \in L^r(\mu)$, $0 < r < \infty$, $v \in L^\infty(\mu)$. Тогда найдутся такие функции $g \in Y^r$ и $h \in Y$, что $f = g + h$, причем $\|g\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|u\|_{L^r(\mu)}$ и $\|h\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant C\|v\|_{L^\infty(\mu)}$.*

Доказательство. Мы будем пользоваться уже доказанным пунктом (а) теоремы 2. Пусть $0 < t = 2\|v\|_{L^\infty(\mu)}$, а $e = \{x : |f(x)| > t\}$. Если $x \in e$, то $u(x) \geqslant |f(x)| - v(x) \geqslant |f(x)| - t/2 \geqslant 1/2\,|f(x)|$, так что $\|f\chi_e\|_{L^r(\mu)} \leqslant 2\|u\|_{L^r(\mu)}$.

Воспользуемся тем, что условие $(\alpha_{r,l,\mu})$ выполнено с некоторым l, и применим лемму 4 с этими параметрами к функции $\varphi = t^{-1}|f|\chi_e$ из пространства $L^r(\mu)$. Покажем, что с помощью полученной в результате функции Φ искомое разложение для f дается функциями $g = (1-\Phi)f$ и $h = \Phi f$.

Обе эти функции, очевидно, лежат в $\mathcal{H}$. В силу доказанного пункта (а) теоремы 2 достаточно проверить лишь, что выполняются оценки для норм $\|h\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant Ct$ и $\|g\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|u\|_{L^r(\mu)}$. Первое неравенство почти очевидно:

$$
\begin{aligned}
&|h(x)| \leqslant C\,|f(x)| \leqslant Ct, && t \notin e,\\
&|h(x)| \leqslant \frac{C\,|f(x)|}{(1+\varphi(x)^{1/l})^l} \leqslant \frac{C\,|f(x)|}{\varphi(x)} \leqslant Ct, && t \in e.
\end{aligned}
$$

Докажем второе. Для этого напишем $|(1-\Phi)f| \leqslant |(1-\Phi)f\chi_e| + t\,|1-\Phi|$. Первое слагаемое в правой части подчиняется нужной оценке в $L^r(\mu)$, так как $|f\chi_e| \leqslant 2u$. Что касается второго, просто применяем утверждение 1 леммы 4:

$$
\|1-\Phi\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\,\|\varphi\|_{L^r(\mu)} = Ct^{-1}\,\|f\chi_e\|_{L^r(\mu)} \leqslant C't^{-1}\,\|u\|_{L^r(\mu)}. \quad \square
$$

Замечание. Поскольку $|\Phi| \leqslant C$, а $g = (1-\Phi)f$ и $h = \Phi f$, выполнены неравенства $|g|, |h| \leqslant C\,|f|$. Поэтому мы можем несколько усилить предыдущее замечание и заключить, что даже и при более свободных требованиях теоремы $1'$ все равно найдутся такие функции $f_n \in Y$, что $f_n \to f$ п.в. и $|f_n| \leqslant C\,|f|$.

2.3. Регулярные веса. Мы переходим к весовым аналогам теоремы 1. Под весом понимается любая измеримая строго положительная и п.в. конечная функция на множестве S. Нас будет интересовать мера $w\,\mathrm{d}\mu$ вместо μ. Переход к такой мере меняет пространства L^p с $p < +\infty$, но не L^∞. Несколько позже мы модифицируем также и это последнее пространство, но пока оставим его в прежнем виде.

Во введении уже сообщалось, что для классических пространств Харди $H^p(w, \mathbb{T})$ интересующие нас интерполяционные теоремы сохраняются, если $\log w \in \mathrm{BMO}$. Здесь мы будем моделировать следующее описание класса BMO (см., например, [2, лемма 3.1]).

Предложение 1. *Пусть w – положительная измеримая функция на $\mathbb{T}$ с суммируемым логарифмом. Следующие условия эквивалентны.*

1) $\log w \in \mathrm{BMO}$.
2) *Существуют константы $C, \delta > 0$ и функция u такие, что $C^{-1}w^\delta \leqslant u \leqslant Cw^\delta$ и $|\widetilde{u}| \leqslant Cu$, где волна означает гармоническое сопряжение.*

Из доказательства в [2] видно, что особых проблем с определением гармонически сопряжённой функции $\widetilde{u}$ здесь не возникает. Подробнее мы на этом не останавливаемся.

Напомним, что мы имеем дело с w^*-замкнутой подалгеброй X алгебры $L^\infty(\mu)$. Поскольку она – модуль над собой, имеют смысл введенные для модулей обозначения X^r, $0 < r \leqslant \infty$, $X^\infty = X$ и $\mathcal{H}^X$.

Нам еще понадобятся множество $\mathcal{L}_+$ неотрицательных функций из объединения $\cup_{s>0}(L^s(\mu) + L^\infty(\mu))$. Обозначим

$$L^r_+(\mu) = \{f \in L^r(\mu) : f \geqslant 0\}.$$

Ясно, что $\mathcal{L}_+ = \cup_{s>0}(L^s_+(\mu) + L^\infty_+(\mu))$, причем множества $L^s_+(\mu) + L^\infty_+(\mu)$ расширяются с убыванием величины s.

Определение. Вес w называется регулярным, если $w \in \mathcal{L}_+$ и найдутся константы $C > 0$, $\delta > 0$ и $r \in (0, \infty)$ такие, что выполнено следующее: существуют функции $U_n \in X$, сходящиеся п.в. к некоторой функции U, для которых

$$\sup_n \|U_n\|_{L^r(\mu)+L^\infty(\mu)} = \sup_n \inf_{U_n = f+g} \Big(\|f\|_{L^r(\mu)} + \|g\|_{L^\infty(\mu)}\Big) < \infty,$$

функции $u_n = \operatorname{Re} U_n$ неотрицательны и $C^{-1} w^\delta \leqslant |U| \leqslant C w^\delta$.

Мы будем говорить о (δ, C, r)-регулярных весах, если нужно упомянуть параметры явно. Довольно легко понять, что параметр r всегда можно уменьшить, не меняя C и δ. Кроме того, нетрудно проследить, что при описанных ниже преобразованиях весов новые значения параметров зависят только от старых и, может быть, от чего-то еще, не связанного с весом, но не от самих весов. Впредь мы не будем акцентировать на этом внимания.

Придадим понятию регулярности сходство с условием 2 предложения 1.

Лемма 5. *Пусть w – (δ, C, r)-регулярный вес, тогда он будет $(\delta_1, C(\delta_1), r)$-регулярным при любом $\delta_1 < \delta$. Функции U_n, соответствующие новой тройке параметров, можно выбрать так, что*

$$|\operatorname{Im} U_n| \leqslant \operatorname{tg}\,(\alpha\pi/2) \operatorname{Re} U_n, \quad |U_n| \leqslant (\cos(\alpha\pi/2))^{-1} \operatorname{Re} U_n, \quad \alpha = \delta_1/\delta. \tag{2}$$

Доказательство. Рассуждения почти те же, что и при проверке леммы 1 (см. неравенства (1)). Пусть V_n – функция из определения регулярного веса для исходных параметров. Достаточно положить $U_n = V_n^\alpha \cos{(\alpha\pi/2)}^{-1}$ (берется главная ветвь степени) и воспользоваться условием $\alpha < 1$. В таком случае видно, что $C(\delta_1) = C^\alpha \cos{(\alpha\pi/2)}^{-1}$. $\square$

Лемма 6. *Если w_0 и w_1 – регулярные веса, то $w_0 w_1$ и $w_0 + w_1$ – тоже регулярные веса.*

Доказательство. В силу леммы 5 мы можем считать, что значение параметра δ одно и то же для w_0 и w_1. Пусть U_n^0 и U_n^1 – функции из определения регулярности, соответственно, для w_0 и w_1. Еще несколько уменьшая, при необходимости, число δ, мы можем считать, что, например, $\left|\operatorname{Im} U_n^j\right| \leqslant 10^{-1} \operatorname{Re} U_n^j$ для $j = 0, 1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Пусть в дальнейшем запись $f \asymp g$ означает существование такой константы $C > 0$, что $C^{-1} f \leqslant g \leqslant Cf$. Функции $U_n^0 U_n^1$ имеют неотрицательную вещественную часть и ясно, что $(w_0 w_1)^\delta \asymp \left|U^0\right| \left|U^1\right|$, где $U^j = \lim_{n\to\infty} U_n^j$ почти всюду, $j = 0, 1$. Более того, в нашей ситуации сразу можно сказать, что даже $(w_0 w_1)^\delta \asymp \operatorname{Re} U^0 U^1$. Простыми рассуждениями с привлечением неравенства Гёльдера доказывается, что функции $U_n^0 U_n^1$ ограничены в $L^s(\mu) + L^\infty(\mu)$ равномерно по n при некотором s.

Для суммы $w_0 + w_1$ достаточно заметить, что

$$(w_0 + w_1)^\delta \asymp w_0^\delta + w_1^\delta. \qquad \square$$

Непосредственно из определения видно, что веса w и w^β, $\beta > 0$ регулярны или нет одновременно. Для $\beta < 0$ можно отметить следующее.

Лемма 7. *Если w – регулярный и $w^{-1} \in \mathcal{L}_+$, то вес w^{-1} тоже регулярный.*

Доказательство. Пусть $U_n \in X$ – функции из определения регулярности для w, т.е. $\operatorname{Re} U_n \geqslant 0$, $U_n \to U$ п.в., $w^\delta \asymp |U|$ и

$$\sup \|U_n\|_{L^r(\mu) + L^\infty(\mu)} < \infty$$

для некоторого r. Пусть $\varepsilon > 0$ – малое число. Тогда

$$V_n^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon + U_n)^{-1} \in X \quad \text{и} \quad |V_n^\varepsilon| \leqslant \varepsilon^{-1}.$$

Кроме того, $\lim_{n\to\infty} V_n^\varepsilon = (\varepsilon + U)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} V^\varepsilon$, причем $V^\varepsilon \in X$. Разумеется, $\operatorname{Re} V^\varepsilon \geqslant 0$ и $V^\varepsilon \to U^{-1}$ п.в. при $\varepsilon \to 0$. Так как $|V^\varepsilon| \leqslant |U|^{-1}$, видно, что функции V^ε ограничены в $L^\sigma(\mu) + L^\infty(\mu)$ при некотором σ. Наконец, соотношение $|U|^{-1} \asymp w^{-\delta}$ очевидно. $\square$

Замечание. Если w – регулярный вес и $w^{-1} \in \mathcal{L}_+$, то применив только что описанную конструкцию к w^{-1}, заключаем, что функции U_n из определения регулярности можно подчинить условию $|U_n| \leqslant C w^\delta$.

Лемма 8. *Если w – регулярный вес, то веса $w_1 = \min(w, \mathbf{1})$ и $w_2 = \max(w, \mathbf{1})$ регулярные.*

Доказательство. Для максимума воспользуемся тем, что $w_2 \asymp w+\mathbf{1}$, а для минимума – тем, что $w_1 \asymp \frac{w}{w+\mathbf{1}}$, причем вес $(w+\mathbf{1})^{-1}$ регулярен по предыдущей лемме. □

Замечание. Ясно, что вес w_2^{-1} тоже регулярен, поскольку вес w_2^{-1} лежит в $L^\infty(\mu)$.

Убедимся теперь, что регулярных весов довольно много. Мы по-прежнему считаем по умолчанию, что основная алгебра X удовлетворяет условию (α_μ).

Лемма 9. *Для всякого веса w из $\mathcal{L}_+$ существует регулярный вес $v \geqslant w$ со следующими свойствами:*

1) *если $w \in L^r(\mu)$, $r \in (0,\infty]$, то $v \in L^r(\mu)$ и $\|v\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\,\|w\|_{L^r(\mu)}$;*
2) *если $w \in L^r(\mu)+L^\infty(\mu)$, то v лежит в этой же сумме пространств с аналогичным контролем нормы.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Если $r=\infty$, положим просто $U_n = U = \|w\|_{L^\infty(\mu)}\,\mathbf{1}$. Если же $r<\infty$, достаточно применить условие $(\alpha_{r,l,\mu})$ к функции $w \in L^r(\mu)$.

Докажем утверждение 2. Напишем $w = w_0 + w_1$, где $w_0 \in L^r_+(\mu)$, $w_1 \in L^\infty_+(\mu)$, и заметим, что

$$(w_0 + \|w_1\|_{L^\infty(\mu)}\,\mathbf{1})^\delta \asymp w_0^\delta + \|w_1\|^\delta_{L^\infty(\mu)}\,\mathbf{1}.$$

Это соотношение показывает, что достаточно применить уже доказанный пункт 1) по отдельности к w_0 и w_1. □

Сформулируем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 3. *Пусть алгебра X удовлетворяет условию (α_μ), а w – регулярный вес. Тогда алгебра X удовлетворяет и условию $(\alpha_{w\,\mathrm{d}\mu})$.*

Доказательство. Пусть δ – число из определения регулярности для веса w. В силу леммы 2 алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,k,\mu})$ с $p=\delta^{-1}$ и каким-нибудь $k \in \mathbb{N}$. Проверим условие $(\alpha_{t,1,w\,\mathrm{d}\mu})$ для какого-нибудь t. Выберем число t достаточно большим; насколько, – будет видно позже, но, во всяком случае, должно быть $t>p$.

Пусть $0 \leqslant f \in L^t(w\,\mathrm{d}\mu)$, тогда, очевидно,

$$\left\|f^{t/p}w^{1/p}\right\|^p_{L^p(\mu)} = \|f\|^t_{L^t(w\,\mathrm{d}\mu)}\,.$$

Применив условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ к функции $f^{t/p}w^{1/p}$, найдем такие функции $\Phi_n \in X$, $\Phi_n \to \Phi$ п.в., что:

$$\operatorname{Re}\Phi_n \geqslant 0, \quad \left\|\Phi_n^k\right\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\left\|f^{t/p}w^{1/p}\right\|_{L^p(\mu)}, \quad \operatorname{Re}\Phi \geqslant f^{t/(kp)}w^{1/(kp)}.$$

Пусть $U_n \in X$ – функции из определения регулярности веса w, то есть $U_n \to U$ п.в., $|U| \asymp w^{1/p}$ (напомним, что $\delta = 1/p$), $\operatorname{Re}U_n \geqslant 0$ и функции U_n равномерно ограничены в $L^s(\mu) + L^\infty(\mu)$ при некотором $s > 0$. Отметим, что $(\rho + U)^{-1} \in X$ при каждом $\rho > 0$. Рассмотрим теперь функции

$$h_n = \Phi_n^{\frac{kp}{t}}/(n^{-1}+U)^{p/t}.$$

Выбрав число t большим, можно сделать оба показателя степени настолько малыми, чтобы значения и числителя, и знаменателя лежали в угле достаточно малого раствора с положительной вещественной полуосью в качестве биссектрисы. Тогда окажется, что $\operatorname{Re}h_n \geqslant 0$ и $|h_n| \leqslant K\operatorname{Re}h_n$. Кроме того, очевидно, $h_n \in X$.

Функции h_n удовлетворяют нужной равномерной оценке в $L^t(w\,\mathrm{d}\mu)$:

$$\|h_n\|^t_{L^t(w\,\mathrm{d}\mu)} = \int\limits_S \frac{|\Phi_n|^{kp}}{|n^{-1}+U|^p} w\,\mathrm{d}\mu \leqslant C\left\|f^{t/p}w^{1/p}\right\|^p_{L^p(\mu)} = C\,\|f\|^t_{L^t(w\,\mathrm{d}\mu)}.$$

С другой стороны, $h_n \to \Phi^{\frac{kp}{t}}/U^{p/t}$ при $n \to \infty$ п.в., при этом

$$\operatorname{Re}\frac{\Phi^{\frac{kp}{t}}}{U^{p/t}} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}h_n \geqslant K^{-1}\lim_{n\to\infty}|h_n| = K^{-1}\frac{|\Phi|^{\frac{kp}{t}}}{|U|^{p/t}} \geqslant C\frac{fw^{1/t}}{w^{1/t}} = Cf.$$

Теорема доказана (избавиться от константы C справа не составляет труда). □

Следствие 1. *Если w – регулярный вес, то пара $(Y^{s,w\,\mathrm{d}\mu}, Y)$ будет K-замкнутой в $(L^s(w\,\mathrm{d}\mu), L^\infty(w\,\mathrm{d}\mu))$ при $0<s<\infty$.*

Напомним, что $L^\infty(w,\mathrm{d}\mu) = L^\infty(\mu)$.

2.4. Пространство $L^\infty_w(\mu)$. Пространство $L^\infty_w(\mu)$ состоит из тех функций f, для которых $fw^{-1} \in L^\infty(\mu)$, норма функции f в нем есть по определению $\|fw^{-1}\|_{L^\infty(\mu)}$. Здесь w – некоторый вес, то есть положительная измеримая функция.

Нам иногда будет удобно даже и для весовых пространств задавать двойственность невесовой билинейной формой $\langle\varphi,\psi\rangle = \int_S \varphi\psi\,\mathrm{d}\mu$. Легко видеть, что $\left(L^1(w\,\mathrm{d}\mu)\right)^* = L^\infty_w(\mu)$ относительно этой двойственности.

Пусть снова $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ – $*$-слабо замкнутый модуль над $*$-слабо замкнутой алгеброй $X \subseteq L^\infty(\mu)$ с единицей. Положим

$$Y(w) = \mathcal{H}^Y \cap L^\infty_w(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{H}^Y : |f| \leqslant Cw \right\}.$$

Лемма 10. *Если пространство $L^1(\mu)$ сепарабельно, то пространство $Y(w)$ замкнуто в $*$-слабой топологии пространства $L^\infty_w(\mu)$ при любом весе w из $\mathcal{L}_+$.*

Доказательство. Топология $\sigma\left(L^\infty_w(\mu), L^1(w\,\mathrm{d}\mu)\right)$ метризуема на единичном шаре. Поэтому по теореме Крейна–Шмульяна достаточно доказать, что шар пространства $Y(w)$ содержит пределы всех $*$-слабо сходящихся последовательностей своих элементов.

Пусть $Y(w) \ni f_n \to f \in L^\infty_w(\mu)$ в смысле $*$-слабой топологии пространства $L^\infty_w(\mu)$ и $\|f_n\|_{L^\infty_w(\mu)} \leqslant 1$. Рассмотрим вес $u = w^{-1}h$, где функция h суммируема по мере μ и строго положительна; она существует благодаря предположению о σ-конечности меры. Тогда легко понять, что пространство $L^\infty_w(\mu)$ вложено в пространство $L^1(u\,\mathrm{d}\mu)$, причем из $*$-слабой сходимости в первом из этих пространств вытекает слабая сходимость во втором. Поэтому сходимость $f_n \to f$ имеет место и в слабой топологии пространства $L^1(u)$.

Но тогда некоторая последовательность выпуклых комбинаций функций f_n сходится к f почти всюду. Считаем, чтобы не менять обозначений, что таковы сами f_n. Теперь включение $f \in \mathcal{H}^Y$ следует из того, что $|f_n| \leqslant w \in \mathcal{L}_+$. $\square$

В дальнейшем мы, наряду с σ-конечностью, будем молчаливо предполагать, что основная мера μ сепарабельна, то есть, что сепарабельно пространство $L^1(\mu)$. Дополним теорему 3 следующим утверждением.

Теорема 4. *Пусть w_0 и w_1 – два регулярных веса, а Y, как всегда, есть $*$-слабо замкнутый модуль над основной алгеброй X, удовлетворяющей условию $(\alpha_{r,k,\mu})$. Тогда пара $(Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}, Y(w_1))$ является K-замкнутой в паре $(L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu), L^\infty_{w_1}(\mu))$ при любом $0 < p < \infty$. Константы в условиях K-замкнутости зависят лишь от r, k, p и соответствующих констант из условий регулярности весов.*

Доказательство. За константами несложно будет проследить, мы не будем заострять на этом внимания. Рассмотрим в $L^\infty(\mu)$ подпространство

$$Z = \{f/w_1 : f \in Y(w_1)\} \subseteq L^\infty(\mu).$$

По лемме 10, это $*$-слабо замкнутый модуль. Поэтому определены пространства $Z^{p,\nu}$ для разных показателей p и мер ν. Определим оператор

$$Tg = g/w_1, \qquad T : L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu) + L^\infty_{w_1}(\mu) \to L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu) + L^\infty(\mu).$$

Легко видеть, что оператор T биективен, а также переводит $L^\infty_{w_1}(\mu)$ на $L^\infty(\mu)$ и $L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$ на $L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)$ изометрически. Кроме того, непосредственно из определения пространства Z видно, что $T(Y(w_1)) = Z$. Справедлив следующий факт.

Лемма. $T(Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}) = Z^{p,w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$.

Это позволяет свести теорему к вопросу о K-замкнутости пары пространств $(Z^{p,w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu}, Z)$ в паре $(L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu), L^\infty(\mu))$. Она, в свою очередь, сразу следует из того, что вес $w_0w_1^p$ регулярен (см. лемму 6 и замечание после нее), и из теорем 1 и 3. Поэтому остается лишь проверить лемму.

Доказательство леммы. Пусть $f \in Z^{p,w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$, покажем, что $fw_1 \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$. По определению, существуют функции вида φ_n/w_1 такие, что $\varphi_n \in \mathcal{H}^Y$ и $\left\|f - \varphi_n w_1^{-1}\right\|_{L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Это в точности означает, что $\|fw_1 - \varphi_n\|_{L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Значит, $\varphi_n \in L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu) \cap \mathcal{H}^Y$. По замечанию после доказательства теоремы $1'$ существуют функции $\alpha_{n,j} \in Y$ такие, что $\alpha_{n,j} \to \varphi_n$ п.в. и $|\alpha_{n,j}| \leqslant C\,|\varphi_n|$. Тогда по принципу максимума, то есть по теореме 2, $\alpha_{n,j} \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, значит $\varphi_n \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, а тогда и $fw_1 \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$.

Докажем теперь обратное. Пусть $\varphi \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, тогда найдутся функции $\varphi_n \in Y \cap L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$ такие, что $\|\varphi - \varphi_n\|_{L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Разумеется, это эквивалентно соотношению $\left\|\varphi w_1^{-1} - \varphi_n w_1^{-1}\right\|_{L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$, поэтому достаточно доказать, что $\varphi_n w_1^{-1} \in Z^{p,w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$ при любом n.

Воспользуемся условием $(\alpha_{p,l,w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu})$, которое выполнено с некоторым $l \in \mathbb{N}$ по теореме 3 и лемме 2. Для фиксированного n и $k \in \mathbb{N}$ положим $\lambda_k = \left(\max\left({|\varphi_n|}/{kw_1}, 1\right)^l - 1\right)^{1/l}$. Поскольку $\varphi_n w_1^{-1} \in L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)$, видно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|\lambda_k\|_{L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} = 0$. Применим к функциям λ_k лемму 4 с весовой мерой $w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu$. Получатся функции $\Phi_k \in X$ такие, что

$$\|1 - \Phi_k\|_{L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} \to 0, \qquad |\Phi_k| \leqslant C/\big(1 + \lambda_k^{1/l}\big)^l.$$

В силу первого соотношения мы можем, перейдя к подпоследовательности, считать, что $\Phi_k \to 1$ почти всюду. Второе соотношение показывает, что $|\Phi_k| \leqslant C$. Отсюда $\Phi_k\varphi_n w_1^{-1} \to \varphi_n w_1^{-1}$ в $L^p(w_0w_1^p\,\mathrm{d}\mu)$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Наконец, справедливы соотношения $\Phi_k\varphi_n \in Y$ и $|\Phi_k\varphi_n| \leqslant kw_1$, откуда $\Phi_k\varphi_n \in Y(w_1)$ и, тем самым, $\Phi_k\varphi_n w_1^{-1} \in Z$, а значит $\varphi_n w_1^{-1} \in Z^{p,w_0 w_1^p \,\mathrm{d}\mu}$. □

На этом закончено и доказательство теоремы. □

Похожим образом доказывается еще одно утверждение, которое мы приведем, хоть оно напрямую и не понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 11. *Пусть w_0 и w_1 – два регулярных веса, а $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ – $*$-замкнутый модуль над X в $L^\infty(\mu)$. Пусть $0 < p < \infty$, тогда пересечение пространств $Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$ и $Y^{p,w_1\,\mathrm{d}\mu}$ плотно в каждом из них.*

Доказательство. Выберем строго положительную функцию h из пространства $L^1\left((w_0+w_1)\,\mathrm{d}\mu\right)$, это возможно благодаря σ-конечности меры μ. Тогда $w_0, w_1 \in L^1(h\,\mathrm{d}\mu)$. В силу леммы 9 и теоремы 3 можно без ограничения общности считать h регулярным весом. Пусть число l таково, что алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,l,w_0 h\,\mathrm{d}\mu})$, оно существует благодаря регулярности веса $w_0 h$, теореме 3 и лемме 2. Положим $\alpha_k = (\max({}^{w_1}\!/\!{}_{kw_0}, 1)^{1/(lp)} - 1)^l$.

Так как $\|\alpha_k\|_{L^p(w_0 h\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant {}^1\!/\!{}_k \int w_1 h\,\mathrm{d}\mu$, то $\|\alpha_k\|_{L^p(w_0 h\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Применим к функциям α_k лемму 4, получатся функции $\Phi_k \in X$ такие, что

$$\|1-\Phi_k\|_{L^p(w_0 h\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C\,\|\alpha_k\|_{L^p(w_0 h\,\mathrm{d}\mu)}\,, \qquad |\Phi_k| \leqslant C/\bigl(1+\alpha_k^{1/l}\bigr)^l.$$

Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\Phi_k \to 1$ п.в. Вторая оценка показывает, что $|\Phi_k| \leqslant C$ всюду и $|\Phi_k| \leqslant C({}^{kw_0}\!/\!{}_{w_1})^{1/p}$.

Предположим, что $f \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$. Мы хотим приблизить функцию f функциями из пересечения $Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu} \cap Y^{p,w_1\,\mathrm{d}\mu}$. Естественно, можно считать, что $f \in Y \cap L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$. Положим $f_k = f\Phi_k$, тогда $\int_S |f_k|^p\, w_1\,\mathrm{d}\mu \leqslant Ck \int_S |f|^p\, w_0\,\mathrm{d}\mu$, так что $f_k \in Y \cap L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu) \cap L^p(w_1\,\mathrm{d}\mu)$. Кроме того, $f_k \to f$ в $L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. □

2.5. Аннуляторы. Пусть опять Y – $*$-замкнутый модуль над алгеброй X в $L^\infty(\mu)$ и пусть w – регулярный вес. Для дальнейших шагов в теории интерполяции нам понадобится аннулятор $Y(w)_\perp$ пространства $Y(w) \subseteq L^\infty_w(\mu)$ в преддвойственном пространстве $L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$:

$$Y(w)_\perp = \Bigl\{ g \in L^1(w\,\mathrm{d}\mu) : \int\limits_S gf\,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ при } f \in Y(w) \Bigr\}.$$

Рассмотрим также аннулятор

$$E = \left(Y^{1,\mu}\right)^{\perp} = \Big\{\varphi \in L^{\infty}(\mu) : \int\limits_S \varphi u \,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ при } u \in Y^{1,\mu}\Big\}. \tag{3}$$

Очевидным образом, E – $*$-замкнутый модуль над алгеброй X в пространстве $L^{\infty}(\mu)$. Следующая лемма позволяет включать аннуляторы $Y(w)_{\perp}$ в доказанные ранее интерполяционные утверждения.

Лемма 12. *Пусть для алгебры X выполнено условие (α_μ). Тогда имеет место равенство $Y(w)_{\perp} = E^{1,w\,\mathrm{d}\mu}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $E^{1,w\,\mathrm{d}\mu} \subseteq Y(w)_{\perp}$. Для этого достаточно проверить, что $E \cap L^1(w) \subseteq Y(w)_{\perp}$. Пусть $\varphi \in E \cap L^1(w)$, $f \in Y(w)$. Мы должны доказать, что $\int \varphi f \,\mathrm{d}\mu = 0$. В силу замечания после доказательства теоремы $1'$, найдутся функции $f_n \in Y$ такие, что $f_n \to f$ п.в. и $|f_n| \leqslant C\,|f|$. Если мы проверим, что $\int_S \varphi f_n \,\mathrm{d}\mu = 0$ для всех n, мы придем к нужному соотношению в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Так как $\varphi \in E$, соотношение $\int \varphi u \,\mathrm{d}\mu = 0$ верно для всех u из $Y \cap L^1(\mu)$, а значит нам достаточно правильным образом приблизить каждую функцию f_n какими-то функциями из $Y \cap L^1(\mu)$.

Найдем какую-нибудь положительную п.в. функцию α из $L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$ и применим лемму 4 к функциям $k\alpha$, $k \in \mathbb{N}$. Получатся функции $\Phi_k \in X$ со следующими свойствами:

$$\|1 - \Phi_k\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant Ck\,\|\alpha\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)}\,, \qquad |\Phi_k| \leqslant C/\big(1 + (k\alpha)^{1/l}\big)^l.$$

Первое условие показывает, что $\Psi_k = 1 - \Phi_k \in L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$ при всех k, причем $\Psi_k \in X$, потому что $\mathbf{1} \in X$. Второе условие показывает, что функции Ψ_k равномерно ограничены и стремятся к 1 п.в. при $k \to \infty$.

Теперь $\Psi_k f_n \in Y$, так как Y – модуль над X. Далее, $\Psi_k f_n \in L^1(\mu)$ так как $|f_n| \leqslant Cw$ и $\Psi_k \in L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$. Поэтому $\int_S \varphi \Psi_k f_n \,\mathrm{d}\mu = 0$. Перейти к пределу по k при фиксированном n можно, поскольку $|\varphi \Psi_k f_n| \leqslant C\,|\varphi|\,w \in L^1(\mu)$.

Осталось доказать обратное включение $E^{1,w\,\mathrm{d}\mu} \supseteq Y(w)_{\perp}$. Допустим, что $f \in Y(w)_{\perp}$. Тогда $f \in L^1(w)$ и, так как вес w регулярен, выполнено условие $(\alpha_{1,l,w\,\mathrm{d}\mu})$ для какого-то $l \in \mathbb{N}$. Значит, можно применить лемму 4 к функциям $\varphi_n = \big(\max(n^{-1}\,|f|\,, 1)^{1/l} - 1\big)^l$, получив $\varphi_n \in X$

со свойствами

$$\|1-\Phi_n\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C\,\|\varphi_n\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{C}{\bigl(1+\varphi_n^{1/l}\bigr)^l} = \frac{C}{\max(n^{-1}\,|f|\,,1)} \leqslant C\min(1, n/\,|f|).$$

Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, получаем $f\Phi_n \to f$ п.в. и в $L^1(w)$, причем $f\Phi_n \in Y(w)_\perp$ и $f\Phi_n \in L^\infty(\mu)$.

Для завершения доказательства осталось проверить, что $f\Phi_n \in E$, то есть что $f\Phi_n \perp Y^{1,\mu}$. Благодаря плотности можно доказать лишь соотношение $f\Phi_n \perp \bigl(Y\cap L^1(\mu)\bigr)$. Знаем, что условие $(\alpha_{1,r,w\,\mathrm{d}\mu})$ для алгебры X выполнено для какого-то $r\in\mathbb{N}$. Пусть $g\in Y\cap L^1(\mu)$ и пусть $\psi_k = \bigl(\max(|g|/kw, 1)^{1/r}-1\bigr)^r$. Легко видеть, что $\psi_k\in L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$. Поэтому лемма 4 дает функции $\Psi_k\in X$ со следующими свойствами:

$$\|1-\Psi_k\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C\,\|\psi_k\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \to 0 \text{ при } k\to\infty,$$

$$|\Psi_k| \leqslant \frac{C}{\bigl(1+\psi_k^{1/r}\bigr)^r} = \frac{C}{\max(|g|/kw,1)} \leqslant C\min(1, kw/\,|g|).$$

Снова переходя, при необходимости, к подпоследовательности, получаем $g\Psi_k\to g$ п.в. и в $L^1(\mu)$, причем $g\Psi_k\in Y\cap L^1(\mu)$ и $g\Psi_k\in L^\infty_w(\mu)$. Выходит, что $g\Psi_k\in Y(w)$, а значит $\int_S f\Phi_n g\Psi_k\,\mathrm{d}\mu = 0$. Переход к пределу при $k\to\infty$ показывает, что $\int_S f\Phi_n g\,\mathrm{d}\mu = 0$, и завершает доказательство. □

2.6. Еще одна интерполяционная теорема и аналог аналитического разбиения единицы.

Теорема 5. *Пусть $Y\subseteq L^\infty(\mu)$ – $*$-замкнутый модуль над алгеброй X, которая удовлетворяет условию (α_μ). Пусть w_0 и w_1 – регулярные веса. Тогда пара $(Y(w_0), Y(w_1))$ является K-замкнутой в паре $(L^\infty_{w_0}(\mu), L^\infty_{w_1}(\mu))$.*

Доказательство. Из общих соображений, связанных с двойственностью (см. [6, 2]), утверждение теоремы эквивалентно K-замкнутости пары аннуляторов $(Y(w_0)_\perp, Y(w_1)_\perp)$ в паре $(L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu), L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu))$. Пусть $E\subseteq L^\infty(\mu)$ – модуль, определенный формулой (3). Тогда упомянутая пара аннуляторов есть $(E^{1,w_0\,\mathrm{d}\mu}, E^{1,w_1\,\mathrm{d}\mu})$ по лемме 12.

Пусть $f\in\mathcal{H}^E$ и $f = g+h$, где $g\in L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu)$, $h\in L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)$. Найдем у функции $|h|$ регулярную мажоранту $\widetilde{h}$ в пространстве $L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)$ с контролем нормы (см. теорему 3 и лемму 9). Тогда на указанное выше разложение можно смотреть как на разложение в сумме пространств $L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu)$ и $L^\infty_{\widetilde{h}}(\mu)$. Отметим, что норма слагаемого h во втором из этих пространств теперь не больше 1. Теорема 4 дает разложение $f=\varphi+\psi$, где $\varphi\in E^{1,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, $\psi\in\mathcal{H}^E$, $\|\varphi\|_{E^{1,w_0\,\mathrm{d}\mu}}\leqslant C\,\|g\|_{L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu)}$, $\|\psi\|_{L^\infty_{\widetilde{h}}(\mu)}\leqslant C$. Тогда $|\psi|\leqslant C|\widetilde{h}|$, поэтому $\|\psi\|_{L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)}\leqslant C\|\widetilde{h}\|_{L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)}\leqslant C'\|h\|_{L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)}$, в частности $\psi\in E^{1,w_1\,\mathrm{d}\mu}$. □

Доказанную только что теорему 5 можно несколько усилить.

Следствие 2. *Рассмотрим регулярные веса w_0 и w_1. Пусть $f\in\mathcal{H}^Y$ и $|f|\leqslant w_0+w_1$. Тогда $f=\varphi+\psi$, где $\varphi\in Y(w_0)$, $\psi\in Y(w_1)$, причем $|\varphi|\leqslant Cw_0$, $|\psi|\leqslant Cw_1$ и константа C зависит не от функций f,w_0,w_1, а лишь от констант регулярности весов w_0,w_1 и констант в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$.*

Набросок доказательства. Предыдущую теорему можно было бы применить, если бы выполнялось включение $f\in Y(w_0)+Y(w_1)$. Это препятствие можно обойти, приблизив функцию f поточечно некоторой последовательностью функций f_n из Y таких, что $|f_n|\leqslant C\,|f|$ и $f_n\in Y(\min(w_0,w_1))$, что возможно по замечанию после теоремы $1'$. Тогда, разложив каждую функцию f_n в соответствии с теоремой 5, можно будет получить искомое разложение функции f, перейдя к w^*-сходящимся подпоследовательностям. □

Наконец, докажем теорему о разбиении единицы, о которой мы упоминали еще во введении. Она понадобится нам в следующем разделе.

Теорема 6. *Пусть $X\subseteq L^\infty(\mu)$ – w^*-замкнутая алгебра, удовлетворяющая условию $(\alpha_{p,k,\mu})$ для каких-то $0<p<\infty$ и $k\in\mathbb{N}$. Пусть w – регулярный вес. Тогда найдутся функции $\varphi_n\in X$, $n\in\mathbb{Z}$, такие что*

1) $|\varphi_n|^{1/8}\,w\leqslant c2^n$, $n\in\mathbb{Z}$,
2) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi_n|^{1/8}\,2^n\leqslant cw$,
3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi_n|^{1/8}\leqslant c$,
4) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_n=1$.

Замечание. Показатель $1/8$ здесь не очень существенен и появляется по аналогии с работой [3], рассуждение из которой мы можем сейчас смоделировать в нашей общей ситуации.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Из леммы 8 следует регулярность весов $w_0 = \min((w/\lambda)^{16}, 1)$ и $w_1 = \min((\lambda/w)^8, 1)$. Случай веса w_1, впрочем, требует пояснений: вес $1/w_1$ регулярен по лемме 8 и больше либо равен единицы всюду, а тогда вес w_1 тоже регулярен в силу леммы 7.

Кроме того, легко проследить, что константы δ и C из определения регулярного веса можно выбрать не зависящими от λ для w_0 и w_1. Основное соображение здесь таково: они одинаковы для весов w и γw, если $\gamma > 0$.

Ясно, что $1 \leqslant w_0 + w_1$. Поскольку $\mathbf{1} \in X$, можем применить следствие 2 и получить представление $\mathbf{1} = g + h$, где $g, h \in X$, $|g| \leqslant Cw_0$, $|h| \leqslant Cw_1$ с константой C, зависящей лишь от параметров регулярности w и констант в условии (α_μ) для алгебры X.

Возьмем $\lambda = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$, и обозначим соответствующие функции g и h через g_n и h_n. Положим $\varphi_n = g_n - g_{n+1} = h_{n+1} - h_n$ и покажем, что эти функции удовлетворяют требованиям теоремы.

Ясно, что $\varphi_n \in X$ и
$$|\varphi_n| \leqslant C \min\left((2^{-n}w)^{16}, (2^n w^{-1})^8\right).$$

Свойство 1 вытекает отсюда сразу. Далее,
$$\sum_{k\leqslant j\leqslant l} \varphi_j = 1 - h_k - g_{l+1} \longrightarrow 1 \text{ п.в.}$$

Действительно, $|g_{l+1}| \leqslant C(2^{-l-1}w)^{16}$ и $|h_k| \leqslant C(2^k w^{-1})^8$, поэтому $g_{l+1} \to 0$ при $l \to \infty$ и $h_k \to 0$ при $k \to -\infty$ почти всюду. Значит выполнено свойство 4. Из дальнейшего будет видно, что сходимость ряда – абсолютная.

Проверим теперь свойства 2 и 3. Пусть $e_k = \left\{x : 2^k \leqslant w(x) \leqslant 2^{k+1}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n |\varphi_n|^{1/8} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\sum_{k\leqslant n} |\varphi_n|^{1/8} \chi_{e_k} + \sum_{k>n} |\varphi_n|^{1/8} \chi_{e_k}\right) \\
&\leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\sum_{k\leqslant n} 2^{-2n} 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k>n} 2^n 2^{-k} \chi_{e_k}\right) \\
&= C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\geqslant k} 2^{-n}\right) 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n<k} 2^{2n}\right) 2^{-k} \chi_{e_k}\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant C' \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \chi_{e_k} \leqslant C'' w,$$

и

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi_n|^{1/8} &\leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^{-2n} 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k>n} 2^n 2^{-k} \chi_{e_k} \right) \\
&= C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\geqslant k} 2^{-2n} \right) 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n<k} 2^n \right) 2^{-k} \chi_{e_k} \right) \\
&\leqslant C' \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{e_k} \leqslant C'.
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство. □

Для дальнейшего нужно будет аналогичное утверждение, в котором функции φ_n заменены произведениями $g_n h_n$, где $g_n, h_n \in X$, причем последовательности $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$ должны удовлетворять условиям наподобие условий 1–3 предыдущей теоремы. В [3] и ранее это делалось с помощью внешне-внутренней факторизации, но ответ на вопрос о похожей процедуре в нашей общей ситуации как минимум не очевиден. Нужный вариант теоремы 6 мы получим другим приемом, сродни конструкции из заключительной части статьи [3].

Следствие 3. *Для всякого регулярного веса w существуют такие функции $\varphi_n, \psi_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}$, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n \psi_n = 1$ и для каждой из систем $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ выполнены условия* 1–3 *теоремы* 6.

Доказательство. Прежде всего, тем же способом, что и выше, можно получить вариант теоремы 6 с заменой показателя $1/8$ на $1/16$. После этого возведем равенство 4 в куб: $\mathbf{1} = \sum\limits_{i\leqslant j\leqslant k} c_{ijk}\varphi_i\varphi_j\varphi_k = \sum\limits_j \varphi_j\psi_j$, где $\psi_j = \sum\limits_{i\leqslant j\leqslant k} c_{ijk}\varphi_i\varphi_k$ при каждом $j \in \mathbb{Z}$, а $0 \leqslant c_{ijk} \leqslant 100$ при любых индексах. Поскольку одновременно

$$|\psi_j| \leqslant C \sum_{i\leqslant j} |\varphi_i|, \qquad |\psi_j| \leqslant C \sum_{k\geqslant j} |\varphi_k|,$$

выводим аналоги условий 1 и 2 для функций ψ_j с показателем $1/16$:

$$|\psi_j|^{1/16}\, w \leqslant C \sum_{i\leqslant j} |\varphi_i|^{1/16}\, w \leqslant C' \sum_{i\leqslant j} 2^i \leqslant C'' 2^j,$$

$$\sum_j |\psi_j|^{1/16}\, 2^j \leqslant C \sum_j \sum_{k\geqslant j} |\varphi_k|^{1/16}\, 2^j = C \sum_k \left(\sum_{j\leqslant k} 2^j \right) |\varphi_k|^{1/16} \leqslant C' w.$$

Далее, аналог условия 3 с показателем $1/8$ получается из выкладки

$$\sum_j |\psi_j|^{1/8}\, w = \sum_j |\psi_j|^{1/16} \left(|\psi_j|^{1/16}\, w \right) \leqslant C \sum_j |\psi_j|^{1/16}\, 2^j \leqslant C' w.$$

Отсюда вытекает соотношение $|\psi_j| \leqslant C$, а тогда сразу же получаем, что $|\psi_j|^{1/8} \leqslant C' \, |\psi_j|^{1/16}$ и, как следствие,

$$|\psi_j|^{1/8}\, w \leqslant C 2^j, \qquad \sum_j |\psi_j|^{1/8}\, 2^j \leqslant C w.$$

Ясно, что из условий 1–3 для φ_j с показателем $1/16$ следует их аналоги с показателем $1/8$. Это завершает доказательство. □

§3. K-замкнутость пересечения модулей

Вопросы K-замкнутости для пересечения модулей над алгебрами, удовлетворяющими условию (α^0_μ) в случае конечной меры μ, подробно рассматривались в статье [4]. Здесь мы напомним формулировку и отметим, что она остаётся верной при замене условия (α^0_μ) на введенное нами условие (α_μ), а также для σ-конечных сепарабельных мер μ. Стоит сразу сказать, что все постановки с пересечениями навеяны тем, что во введении называлось “случаем двух переменных”.

Пусть, как и раньше, (S,μ) – пространство с σ-конечной сепарабельной мерой, X_0 и X_1 – две w^*-замкнутые подалгебры с единицей в алгебре $L^\infty(\mu)$, а Y_0 и Y_1 – w^*-замкнутые подпространства в $L^\infty(\mu)$, являющиеся модулями, соответственно, над X_0 и X_1. Сформулируем основную теорему статьи [4].

Теорема из [4]**.** *Если мера μ конечна и выполнены дополнительные условия, которые мы опишем ниже, то пара $(Y_0^p \cap Y_1^p, Y_0 \cap Y_1)$ является K-замкнутой в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$ для $1<p<\infty$.*

Дополнительные условия были такими. Во-первых, предполагалось, что алгебры X_0 и X_1 удовлетворяют условию $(\alpha^0_{p,\mu})$. Во-вторых, на модуль Y_0 накладывалось некоторое новое условие (β_p), а затем, в-третьих, на пару модулей Y_0, Y_1 накладывалось некоторое условие взаимосвязи (γ_p).

Определим модули E_i так же, как мы определяли модуль E в разделе 2.5: положим $E_i \stackrel{\text{def}}{=} \left(Y_i^1\right)^{\perp}$. Пусть q – сопряженный с p показатель, то есть такой, что $1/p + 1/q = 1$. Условие (β_p) требует существования сюръективного ограниченного проектора $P : L^q(\mu) \to E_0^q$, обладающего слабым типом $(1,1)$:

$$\mu\left\{x \in S : |Pf(x)| > \lambda\right\} \leqslant C \left\|f\right\|_{L^1(\mu)} / \lambda, \quad f \in L^1(\mu) \cap L^p(\mu), \quad \lambda > 0.$$

Условие связи (γ_p) требует включения $P(E_1^q) \subseteq E_1^q$.

Отметим на всякий случай то очевидное обстоятельство, что из этой теоремы вытекает упомянутое во введении утверждение о пространствах Харди на двумерном торе: в качестве $X_0 = Y_0$ нужно взять пространство существенно ограниченных функций на $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, лежащих в $H^\infty(\mathbb{T})$ по первой переменной, а в качестве $X_1 = Y_1$ – по второй.

Чуть позже мы увидим, что в случае тора сформулированная теорема дает ещё и подобные же весовые результаты, а пока прокомментируем то, как, ввиду изложенной выше теории, ее можно обобщить. Мы утверждаем, что условие конечности меры можно отбросить (наложив вместо него условие σ-конечности и сепарабельности), а условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ можно заменить на условие (α_μ).

Несложно проследить, что в нашем более общем случае рассуждения из [4], в основном, остаются применимыми. Поэтому мы лишь сформулируем теорему и остановимся на деталях, требующих каких-то изменений.

Теорема 7. *Если алгебры X_0 и X_1 удовлетворяют условию (α_μ), модуль Y_0 удовлетворяет условию (β_p), а пара модулей Y_0, Y_1 удовлетворяет условию взаимосвязи (γ_p), то пара $(Y_0^p \cap Y_1^p, Y_0 \cap Y_1)$ является K-замкнутой в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$.*

Набросок доказательства. Пользуясь техникой срезающих функций, уже не раз возникавшей в наших рассуждениях, несложно доказать соотношение $\left(Y_i^p\right)_\perp = E_i^q$. Аналогично можно показать, что $E_i^1 \cap E_i^q$ плотно в E_i^1 и E_i^q. (Ср. с леммой 11.) Поэтому, переходя по двойственности к аннуляторам как в доказательстве теоремы 5, видим, что достаточно проверить K-замкнутость пары

$$\left(\operatorname{clos}(E_0^1 + E_1^1), \operatorname{clos}(E_0^q + E_1^q)\right) \quad \text{в паре} \quad (L^1(\mu), L^q(\mu)).$$

Суммы $E_0^1+E_1^1$ и $E_0^q+E_1^q$, разумеется, не обязательно замкнуты в $L^1(\mu)$ и $L^q(\mu)$, соответственно. Однако K-замкнутость достаточно проверять на плотном множестве (с контролем за постоянными в оценках), поэтому нам достаточно, в предположении, что $f \in (E_0^1 \cap E_0^q)+(E_1^1 \cap E_1^q)$, а также

$$g \in L^1(\mu), \quad h \in L^q(\mu), \tag{4}$$

найти функции $g_1 \in E_0^1 + E_1^1$ и $h_1 \in E_0^q + E_1^q$ такие, что

$$f = g_1 + h_1, \quad \|g_1\|_{E_0^1+E_1^1} \leqslant C\,\|g\|_{L^1(\mu)}, \quad \|h_1\|_{E_0^q+E_1^q} \leqslant C\,\|h\|_{L^q(\mu)}, \tag{5}$$

где C не зависит от g и h.

Все дальнейшие рассуждения в работе [4] основываются на применении двух лемм из той работы, леммы 3.1 и вытекающей из нее леммы 3.2. Из нашей леммы 4 легко вывести надлежащее обобщение первой из них. Заметим, что это – единственное место, где мы используем параметр γ в лемме 4; он нужен нам сейчас, поскольку аналогичный параметр присутствует в лемме 3.1 в [4]. Чтобы избежать двусмысленности в обозначениях, переименуем "φ", фигурирующую в том утверждении, в ψ. Итак, пусть $\psi \geqslant 1$, $\psi - 1 \in L^p(\mu)$.[2] Пусть еще для алгебры с единицей $X \subseteq L^\infty(\mu)$ выполнено условие (α_μ), а значит и условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ для какого-то $k \in \mathbb{N}$. Подставляя в нашу лемму 4 функцию $0 \leqslant \varphi = (\psi^{1/k} - 1)^k \leqslant \psi - 1 \in L^p(\mu)$ и требуемое γ, видим, что существует такой элемент $\Phi \in X$, что

$$\|1-\Phi\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\,\|1-\psi\|_{L^p(\mu)}, \quad |\Phi| \leqslant C/\psi^\gamma.$$

Итак, без требования конечности меры μ и с более слабым условием (α_μ) вместо $(\alpha_{p,\mu}^0)$ нам удалось установить аналог леммы 3.1 из [4] с одной лишь оговоркой, что в поточечной оценке появилась ни на что существенным образом не влияющая константа, вообще говоря, отличная от единицы.

Условие $(\alpha_{p,\mu}^0)$ в дальнейших рассуждениях работы [4] всегда используется опосредованно, через лемму 3.2, поэтому единственное отличие теперь состоит в том, что меру мы не предполагаем конечной. Оказывается, однако, что дальнейшие выкладки работы [4] верны и без этого предположения. Избегая повторения, мы считаем обобщенную теорему доказанной. □

[2] В случае конечной меры μ условие $\psi-1 \in L^p(\mu)$ эквивалентно требованию $\psi \in L^p(\mu)$, использующемуся в лемме 3.1 из [4], однако для бесконечных мер последнее условие бессмысленно.

§4. Модельные примеры

Один из способов, которым может быть реализовано предположение (γ_p) о проекторе, – это когда все происходит на пространстве-произведении, а принадлежность пространствам X_0, Y_0 (соответственно X_1, Y_1) определяется условиями, наложенными по разным переменным. Заметим, однако, что в [4] разработан и случай иной природы; здесь мы его не рассматриваем.

Пусть, например, $S = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, m_2 – нормированная мера Хаара на двумерном торе $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, и пусть $\mu = w\,\mathrm{d}m_2$, где w – некоторый вес на декартовом произведении $S = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

Обозначим через X_0 и X_1 подпространства в $L^\infty(m_2)$, состоящие из функций, которые принадлежат пространству $H^\infty(\mathbb{T})$, соответственно, по первой и второй переменной. В силу предложения 1 регулярность веса w относительно каждой из алгебр X_0 и X_1 обеспечивается условием

$$\operatorname{ess\,sup}_{\xi_2} \|\log w(\cdot,\xi_2)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty, \quad \operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log w(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty, \tag{6}$$

где ess sup – существенный супремум. Будем считать его выполненным.

Для простоты возьмем $Y_0 = X_0$ и $Y_1 = X_1$. Сейчас наша “основная” мера есть $w\,\mathrm{d}m_2$, а значит мы пользуемся двойственностью $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}^2} fgw\,\mathrm{d}m_2$. Тогда аннулятор пространства X_0 в $L^1(w\,\mathrm{d}m_2)$ (соответственно в $L^q(w\,\mathrm{d}m_2)$) будет состоять из функций $f \in L^1(w\,\mathrm{d}m_2)$ (соответственно $f \in L^q(w\,\mathrm{d}m_2)$), имеющих вид $f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1 h(\xi_1,\xi_2)/w(\xi_1,\xi_2)$, где h – граничное значение функции, аналитической в бидиске по первой переменной (на самом деле, лежащей в классе В. И. Смирнова). Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место и для X_1.

Пусть $\mathcal{P}_0$ – аналог проектора Рисса, отображающий пространство $L^2(\mathbb{T})$ на состоящее из функций с нулевым средним подпространство $H^2_0(\mathbb{T})$ пространства Харди $H^2(\mathbb{T})$. Пусть $\mathcal{Q}$ – соответствующий проектор на торе $\mathbb{T}^2$, действующий по первой переменной, то есть

$$(\mathcal{Q}f)(\xi_1,\xi_2) = (\mathcal{P}_0 f(\,\cdot\,,\xi_2))(\xi_1).$$

Убедимся в том, что роль проектора P из условий (β_p) и (γ_p) может играть оператор, который отображает функции g на $\mathbb{T}^2$ в функции $Pg = (\mathcal{Q}gw)/w$. Сначала объясним, как проверяется условие (γ_p). Если $g \in L^q(w\,\mathrm{d}\mu)$ лежит в аннуляторе пространства X_1, то $g(\xi_1,\xi_2) =$

$\xi_2 h(\xi_1,\xi_2)/w(\xi_1,\xi_2)$, где функция h “аналитична” по второй переменной. Тогда $(Pg)(\xi_1,\xi_2) = \xi_2(\mathcal{P}_0 g(\cdot,\xi_2))(\xi_1)/w(\xi_1,\xi_2)$ также лежит в аннуляторе пространства X_1, так как действие оператора $\mathcal{P}_0$ по первой переменной не разрушает “аналитичности” по второй.

Сюръективность оператора P очевидна. Таким образом, чтобы сослаться на теорему 7, достаточно обеспечить два условия:

(а) оператор P ограничен из $L^q(w\,\mathrm{d}m_2)$ в себя,

(б) оператор P имеет слабый тип $(1,1)$ на пространстве $L^1(w\,\mathrm{d}m_2)$.

Обозначим через m нормированную меру Хаара на окружности $\mathbb{T}$. Оператор $\mathcal{P}_0$ ограничен в $L^q(u\,\mathrm{d}m)$ тогда и только тогда, когда u принадлежит классу Макенхаупта A_q. Про классы Макенхаупта см. [8]; вместо “принадлежит классу Макенхаупта” еще пишут $u \in A_q$ и говорят “удовлетворяет условию Макенхаупта”. Поэтому условие (а) эквивалентно принадлежности веса w^{1-q} классу Макенхаупта A_q по первой переменной, причем с константой, не зависящей от второй переменной. Из общей теории весов Макенхаупта следует, что это то же самое, что и выполнение условия A_p по первой переменной для веса w с константой, не зависящей от второй переменной. Заметим, что это условие влечет также и первое из неравенств (6).

Что касается условия (б), мы сейчас объясним, что оно также гарантируется требованием $w \in A_p$ по первой переменной с не зависящей от второй переменной константой. Сформулируем более общий результат.

Лемма 13. *Пусть a и b – два веса на окружности $\mathbb{T}$, $u = ab^{-1}$. Для того, чтобы оператор $R : f \to u^{-1}\mathcal{P}_0(uf)$ имел слабый тип $(1,1)$ на пространстве $L^1(a\,\mathrm{d}m)$, достаточно включений $b \in A_1$ и $a \in A_r$ при каком-нибудь $r \geqslant 1$.*

Доказательство. По поводу доказательства см. [9, теорема 4]. □

Условие (б) выше получается из леммы при $a = w$, $b \equiv 1$.

Следствие 4. *Если w – вес на двумерном торе, лежащий в A_p при некотором $p \in (1,\infty)$ по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной, причем $\sup_{\xi_1} \|\log w(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$, то пара пересечений*

$(X_0^{p,w\,\mathrm{d}m_2} \cap X_1^{p,w\,\mathrm{d}m_2}, X_0 \cap X_1)$ *K-замкнута в* $(L^p(w\,\mathrm{d}m_2), L^\infty(w\,\mathrm{d}m_2))$.

Отметим, что здесь $L^\infty(w\,\mathrm{d}m_2) = L^\infty(m_2)$.

Замечание. Бросающаяся в глаза асимметрия условий вызвана отсутствием более совершенных методов. Разумеется, роли переменных ξ_1 и ξ_2 можно поменять.

Можно еще несколько усилить следствие 4. Пусть w_0 – еще один вес от двух переменных; пока не будем накладывать условие (6) ни на w, ни на w_0. Нас будут интересовать модули $X_0(w_0)$ и $X_1(w_0)$, определенные как в разделе 2.4, точнее, нас будет интересовать K-замкнутость пары

$$(X_0^{p,w\,\mathrm{d}m_2} \cap X_1^{p,w\,\mathrm{d}m_2}, X_0(w_0) \cap X_1(w_0)) \text{ в паре } (L^p(w\,\mathrm{d}m_2), L^\infty_{w_0}(m_2)). \tag{7}$$

Как в доказательстве теоремы 4, введем подпространства

$$Z_j = \{f/w_0 : f \in X_j(w_0)\} \subseteq L^\infty(m_2),$$

являющиеся модулями над X_j. Тогда наша задача сводится к вопросу о K-замкнутости пары

$$(Z_0^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2} \cap Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}, Z_0 \cap Z_1) \text{ в паре } (L^p(ww_0^p\,\mathrm{d}m_2), L^\infty(m_2)). \tag{8}$$

Ситуация аналогична предыдущей, надо только учесть, что теперь модули Z_0 и Z_1 не состоят из граничных значений аналитических функций. За “основную” меру примем $ww_0^p\,\mathrm{d}m_2$. Соответственно, двойственность будет весовой с этой мерой. Ввиду общей теории, естественно наложить условие (6) на вес ww_0^p.

Легко понять, что кандидатом в проекторы P из условий (β_p) и (γ_p) будет теперь оператор

$$Pg = \frac{(\mathcal{Q}gww_0^{p-1})}{ww_0^{p-1}}.$$

Его непрерывность в нужном смысле доказывается в следующем абзаце; когда она установлена, несложно проверить, что P действительно является проектором пространства $L^q(ww_0^p\,\mathrm{d}m_2)$ на $\big(Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}\big)_\perp$, для которого $P\big(\big(Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}\big)_\perp\big) \subseteq \big(Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}\big)_\perp$, а значит выполнено и условие (γ_p).

Нам надо, чтобы этот оператор был ограничен в $L^q(ww_0^p\,\mathrm{d}m_2)$ и имел слабый тип $(1,1)$ относительно меры $ww_0^p\,\mathrm{d}m_2$. Первое из этих двух условий равносильно тому, что $A_q \ni w^{-q}w_0^{-q(p-1)}ww_0^p = w^{1-q}$ или, что то же самое, $w \in A_p$, причем, как и раньше, условие Макенхаупта должно выполняться по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменой. Для слабого типа $(1,1)$ воспользуемся леммой 13. Нам следует найти веса a и b как в той лемме – такие, что $ww_0^{p-1} = ab^{-1}$ и $ww_0^p = a$. Значит $b = w_0$. Таким образом, нужно предположить, что $w_0 \in A_1$ и $ww_0^p \in A_r$ при каком-нибудь $r \geqslant 1$, где условия Макенхаупта, конечно, должны выполняться по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменой. Итак, мы установили следующий факт.

Следствие 5. *Пусть w и w_0 – веса на $\mathbb{T}^2$, причем $w \in A_p$, $w_0 \in A_1$ и $ww_0^p \in A_r$ при каком-нибудь $r \geqslant 1$ (все включения – по первой переменной, равномерно по второй). Если еще*

$$\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log w(\xi_1, \cdot) w_0^p(\xi_1, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty,$$

то имеет место K-замкнутость (7).

§5. Алгебры на произведениях пространств

Из рассуждений предыдущего раздела видно, что весовые следствия теоремы 7 в случае тора происходят из теории сингулярных интегральных операторов на окружности. В абстрактной же ситуации не очень понятно, откуда эти весовые результаты брать – не просматриваются аналоги условий Макенхаупта A_p.

Тем не менее, следующее утверждение мы сформулируем в абстрактном виде. Нам придется постулировать какую-то весовую теорему о K-замкнутости в случае двух переменных, а после этого мы расширим класс допустимых весов, окаймляя их регулярными весами от одной переменной.

Итак, пусть (E, ρ) и (F, λ) – два пространства с σ-конечными сепарабельными мерами. Пусть $X_0 \subseteq L^\infty(\rho)$ и $X_1 \subseteq L^\infty(\lambda)$ – w^*-замкнутые подалгебры, удовлетворяющие, соответственно, условиям (α_ρ) и (α_λ).

Рассмотрим на произведении $S = E \times F$ меру μ, абсолютно непрерывную относительно произведения мер $\rho \otimes \lambda$. Пусть $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{X}_1$ – алгебры функций на S, зависящих лишь от одной переменной (соответственно, первой или второй) и по этой переменной лежащих в X_0 или X_1. Конечно, это w^*-замкнутые подалгебры в $L^\infty(\mu)$.

Далее, пусть $0 < p < \infty$, U – замкнутое подпространство в $L^p(\mu)$, а V – w^*-замкнутое подпространство в $L^\infty(\mu)$, причем известно, что пара (U, V) является K-замкнутой в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$. Предположим, что каждое из пространств U и V является модулем над обеими алгебрами $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{X}_1$.

Пусть a и b – регулярные веса, соответственно, на E и F. Составим вес $a \otimes b$ на S, задающийся соотношением $(a \otimes b)(x,y) = a(x)b(y)$ и определим множество $U_0 = U \cap L^p(a \otimes b\,\mathrm{d}\mu)$.

Теорема 8. *При сделанных предположениях пара* $(\mathrm{clos}_{L^p(a\otimes b\,\mathrm{d}\mu)} U_0, V)$ *является* K*-замкнутой в паре* $(L^p(a \otimes b\,\mathrm{d}\mu), L^\infty(\mu))$.

Замечание. В применениях, модули U и V возникают из примеров предыдущего параграфа. За этим скрывается некая дополнительная структура. В частности, помимо $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{X}_1$ будут неявно вовлечены еще и алгебры из предыдущего раздела, состоящие из функций, для которых не исключается зависимость от второй переменной.

Доказательство теоремы 8. Пусть выполнены соотношения

$$U_0 + V \ni f = g + h, \qquad g \in L^p(a \otimes b\,\mathrm{d}\mu), \qquad h \in L^\infty(\mu).$$

Мы предполагаем, что $f \in U_0 + V$ вместо $f \in \mathrm{clos}_{L^p(a\otimes b\,\mathrm{d}\mu)} U_0 + V$, пользуясь тем, что K-замкнутость можно проверять на плотном множестве.

Обозначим для краткости нормы функций g и h в указанных пространствах символами s и t. Нам нужно представить функцию f в виде суммы двух слагаемых из $\mathrm{clos}_{L^p(a\otimes b\,\mathrm{d}\mu)} U_0$ и V примерно с такими же нормами.

Применим к весам a и b следствие 3. Получатся функции φ_n и ψ_n на E, α_n и β_n на F, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $\sum\limits_n \varphi_n\psi_n = 1$, $\sum\limits_n \alpha_n\beta_n = 1$ и выполнены аналоги неравенств 1-3 теоремы 6, которые мы будем называть свойствами разбиения единицы.

Напишем $f = \sum\limits_{k,j} f\varphi_k\psi_k\alpha_j\beta_j = \sum\limits_{k,j} f_{kj}\varphi_k\alpha_j$, где $f_{kj} = f\psi_k\beta_j$. Пусть $g_{kj} = g\psi_k\beta_j$ и $h_{kj} = h\psi_k\beta_j$, тогда $f_{kj} = g_{kj} + h_{kj}$.

Из свойства 3 разбиения единицы сразу же следует, что

$$\|h_{kj}\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant Ct.$$

Покажем, что $g_{kj} \in L^p(\mu)$. Пользуясь условием 2 разбиения единицы, напишем

$$\begin{aligned}\int\limits_S |g_{kj}(x,y)|^p \,\mathrm{d}\mu(x,y) &= \int\limits_S |g(x,y)|^p \, |\psi_k(x)|^p \, |\beta_j(y)|^p \,\mathrm{d}\mu(x,y)\\ &\leqslant C2^{-k}2^{-j} \int\limits_S |g(x,y)|^p \, 2^k \, |\psi_k(x)|^{1/8} \, 2^j \, |\beta_j(y)|^{1/8} \,\mathrm{d}\mu(x,y)\\ &\leqslant C2^{-k}2^{-j} \int\limits_S |g(x,y)|^p \, a(x)b(y) \,\mathrm{d}\mu(x,y) = C2^{-k}2^{-j} s^p\end{aligned}$$

Стоит заметить, что эта мажоранта для нормы дальше не используется. Нас интересует лишь выключение $g_{kj} \in L^p(\mu)$. Так как мы предположили K-замкнутость (U,V) в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$, можем найти функции $u_{kj} \in U$, $v_{kj} \in V$ такие, что $f_{kj} = u_{kj} + v_{kj}$ и выполнено $\|u_{kj}\|_{L^p(\mu)} \leqslant C \|g_{kj}\|_{L^p(\mu)}$, $\|v_{kj}\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant Ct$. Возвращаясь к исходному разбиению функции f, можем теперь написать $f = u + v$, где

$$u = \sum_{k,j} u_{kj} \varphi_k \alpha_j, \qquad v = \sum_{k,j} v_{kj} \varphi_k \alpha_j.$$

Покажем, что это и есть искомое разложение. Ясно, что

$$|v| \leqslant \sum_{k,j} |\varphi_j| \, |\alpha_k| \, |v_{kj}| \leqslant C \sum_{k,j} |\varphi_j|^{1/8} \, |\alpha_k|^{1/8} \, |v_{kj}| \leqslant Ct.$$

Заодно из этой оценки следует, что $v \in V$: все члены ряда лежат в V, модуль V является w^*-замкнутым, ряд сходится абсолютно, а значит и в смысле w^*-топологии. Аналогичным образом следующая выкладка показывает, что u лежит в замыкании $\operatorname{clos}_{L^p(a\otimes b\,\mathrm{d}\mu)} U_0$, а также дает нужную оценку для нормы функции u:

$$\begin{aligned}&\int\limits_S |u(x,y)|^p \, a(x)b(y) \,\mathrm{d}\mu(x,y)\\ &\quad\leqslant \int\limits_S \left(\sum_{k,j} |u_{kj}(x,y)|^p \, |\varphi_k|^{p/8} \, |\alpha_j|^{p/8} \right)\\ &\qquad\qquad \times \left(\sum_{k,j} |\varphi_k|^{7q/8} \, |\alpha_j|^{7q/8} \right)^{p/q} a(x)b(y) \,\mathrm{d}\mu(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C \sum_{k,j} \int\limits_S |u_{kj}(x,y)|^p \, |\varphi_k(x)|^{1/8} \, |\alpha_j(y)|^{1/8} \, a(x) b(y) \, \mathrm{d}\mu(x,y) \\
&\leqslant C \sum_{k,j} \|u_{k,j}\|^p_{L^p(\mu)} \, 2^{k+j} \leqslant C \sum_{k,j} \|g_{k,j}\|^p_{L^p(\mu)} \, 2^{k+j} \\
&\leqslant C \sum_{k,j} \int\limits_S |g(x,y)|^p \, |\psi_k(x)|^{1/8} \, |\beta_j(y)|^{1/8} \, 2^{k+j} \, \mathrm{d}\mu(x,y) \\
&\leqslant C \int\limits_S |g(x,y)|^p \, a(x) b(y) \, \mathrm{d}\mu(x,y) = C s^p.
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. □

Следствие 6. *Пусть a, b – такие веса на $\mathbb{T}$, что $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}$, и пусть u – вес на $\mathbb{T}^2$, принадлежащий классу Макенхаупта A_p при некотором $p \in (1,\infty)$ по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной, причем $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log u(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. Рассмотрим вес $w(\xi_1,\xi_2) = a(\xi_1)u(\xi_1,\xi_2)b(\xi_2)$. Тогда пара*

$$(H^p(w), H^\infty) \quad K\text{-замкнута в паре} \quad (L^p(w\,\mathrm{d}m_2), L^\infty(\mathrm{d}m_2)).$$

По поводу тонкостей, относящихся к определению весовых пространств Харди $H^p(w)$ на двумерном торе, см. работу [10].

Как в предыдущем разделе, рассмотрим еще один случай. Пусть задан вес u_0 на торе $\mathbb{T}^2$. Рассмотрим еще два веса a_0 и b_0 на окружности $\mathbb{T}$ и соответствующий им окаймленный вес w_0 на торе заданный соотношением $w_0(\xi_1,\xi_2) = a_0(\xi_1)u_0(\xi_1,\xi_2)b_0(\xi_2)$. Разберем вопрос о K-замкнутости соответствующей пары (7).

Как было показано в предыдущем разделе, этот вопрос сводится к вопросу о K-замкнутости пары (8), который уже был разрешен для случая, когда $a \equiv b \equiv a_0 \equiv b_0 \equiv 1$. Общий же случай можно теперь получить, применяя теорему 8 к пространствам $U = Z_0^{p,uu_0^p\,\mathrm{d}m_2} \cap Z_1^{p,uu_0^p\,\mathrm{d}m_2}$, $V = Z_0 \cap Z_1$ с весами aa_0^p и bb_0^p в качестве a и b, соответственно. Не останавливаясь подробно на всех возникающих деталях, сформулируем следующий результат.

Следствие 7. *Пусть a, b, a_0, b_0 – веса на $\mathbb{T}$,*

$$\log a, \log b, \log a_0, \log b_0 \in \mathrm{BMO},$$

и пусть u, u_0 – веса на $\mathbb{T}^2$, причем $u \in A_p$, $u_0 \in A_1$ и $uu_0^p \in A_r$ при каком-нибудь $r \in (1,\infty)$. Условия Макенхаупта предполагаются *выполненными по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной. Пусть еще* $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log u(\xi_1, \cdot) u_0^p(\xi_1, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. *Рассмотрим веса*

$$w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1) u(\xi_1, \xi_2) b(\xi_2) \quad \text{и} \quad w_0(\xi_1, \xi_2) = a_0(\xi_1) u_0(\xi_1, \xi_2) b_0(\xi_2).$$

Тогда

пара $(H^p(w), H^\infty(w_0))$ K*-замкнута в паре* $(L^p(w\,\mathrm{d}m_2), L^\infty_{w_0}(\mathrm{d}m_2))$.

По поводу тонкостей, относящихся к определению весовых пространств Харди, мы снова отсылаем читателя к статье [10].

Отметим, что получившиеся формулировки покрывают все, что было упомянуто во введении.

Список литературы

1. T. W. Gamelin, S. V. Kislyakov, *Uniform algebras as Banach spaces.* — Handbook of the geometry of Banach spaces **1** (2001), 671–706.
2. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. Proceedings **13** (1999), 102–140.
3. S. V. Kisliakov, *Bourgain's analytic projection revisited.* — Proceed. Amer. Math. Soc. **126**, No. 11 (1998), 3307–3314.
4. S. V. Kisliakov, I. K. Zlotnikov, *Interpolation for intersections of Hardy-type spaces.* — Israel J. Math **239** (2020), 21–38.
5. S. V. Kisliakov, *Interpolation involving bounded bianalytic functions.* — Complex Analysis, Operators, and Related Topics (2000), 135–149.
6. G. Pisier, *Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations.* I. — Pacific J. Math. **155**, No. 2 (1992),341–368.
7. T. P. Srinivasan, J.-K. Wang, *Weak*-Dirichlet algebras, Function Algebras.* — Funct. Algebras (Proc. Internat. Sympos., Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, IL (1966), 216–249.
8. E. Stein, T. S. Murphy, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press 1993.
9. Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление.* — Алгебра и анализ **16**, No. 5 (2004), 1–33.
10. В. А. Боровицкий,, *K-замкнутость для весовых пространств Харди на торе $\mathbb{T}^2$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **456** (2017), 25–36.
11. И. К. Злотников, С. В. Кисляков, *Теорема Гротендика для некоторых алгебр и модулей над ними.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **480** (2019), 108–121.
12. С. В. Кисляков, К. Шу, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы.* — Алгебра и анализ **8**, No. 4 (1996), 75–109.

Borovitskiy V. A., Kislyakov S. V. Interpolation of abstract spaces of Hardy type.

Interpolation theorems are proved for Hardy-type spaces arising form certain uniform algebras more general than weak*-Dirichlet algebras. It is shown that, in a sense, the entire setting is not sensitive to the introduction of a weight. Some generalizations that model the case of two variables are also discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: viacheslav.borovitskiy@gmail.com
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 18 октября 2021 г.