О. А. Олейник, Т. А. Шапошникова, Об одном методе построения приближений в задаче усреднения в частично перфорированной области,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1994–2000

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.95

О. А. ОЛЕЙНИК, Т. А. ШАПОШНИКОВА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УСРЕДНЕНИЯ В ЧАСТИЧНО ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

В работах [1, 2] изучено асимптотическое поведение решений уравнения Лапласа в частично перфорированной области с граничным условием Неймана на границе полостей, при этом используются на границе раздела двух сред пограничные слои, экспоненциально убывающие при удалении от этой границы. В настоящей работе указан другой подход к построению асимптотики решения этой задачи. Этот подход позволяет рассмотреть также и другие конфигурации перфорированной и неперфорированной частей области, другие граничные условия на границе полостей.

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n_x$ с гладкой границей, $\Omega\cap\{x:x_1=0\}\neq\varnothing$, $x=(x_1, \dots, x_n)$, $\Omega^+=\Omega\cap\{x:x_1>0\}$, $\Omega^-=\Omega\cap\{x:x_1<0\}$, ω — неограниченная область в $\mathbf{R}^n_y$ с 1-периодической структурой и гладкой границей $\partial\omega$, $y=\varepsilon^{-1}x$ ($\varepsilon>0$ — параметр), $\omega_\varepsilon=\varepsilon\omega$ — ε-периодическая структура в $\mathbf{R}^n_x$.

Обозначим: $\Omega^+_\varepsilon=\Omega^+\cap\varepsilon\omega$, $\gamma=\Omega\cap\{x:x_1=0\}$, $Q=\{y\in\mathbf{R}^n_y:0<y_j<1$, $j=1, \dots, n\}$, $Y=Q\cap\omega$, $|Y|$ — объем области Y, $\Omega_\varepsilon=\Omega^+_\varepsilon\cup\Omega^-\cup\gamma$, $S_\varepsilon=\partial\Omega_\varepsilon\cap\Omega$, $\Gamma_\varepsilon=\partial\Omega_\varepsilon\cap\partial\Omega$, $[\varphi]|_p=\varphi|_{p+0}-\varphi|_{p-0}$ для любых точки p и функции φ. Будем предполагать, что $\varepsilon^{-1}\gamma\subset\omega$ и $(\overline{Q\setminus\omega})\cap\varepsilon^{-1}\gamma\neq\varnothing$.

В Ω_ε рассмотрим задачу

$$\Delta u_\varepsilon=f,\quad x\in\Omega_\varepsilon, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}=0,\quad x\in S_\varepsilon, \tag{2}$$

$$u_\varepsilon=0,\quad x\in\Gamma_\varepsilon, \tag{3}$$

где $\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к S_ε, $f\in C^\infty(\bar\Omega^+)$ и $f\in C^\infty(\bar\Omega^-)$.

Как обычно, обозначим через $H_1(\Omega, \Gamma)$ пополнение пространства бесконечно дифференцируемых в $\bar\Omega$ функций, обращающихся в нуль в окрестности Γ по норме пространства $H_1(\Omega)$.

Хорошо известно (см. [3]), что задача (1)—(3) имеет единственное решение $u_\varepsilon\in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ и для него справедлива оценка $\|u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)}\leqslant K\|f\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$, где $K=\mathrm{const}$, не зависящая от ε.

Известно также (см. [1, 2]), что последовательность $\{u_\varepsilon\}$ при $\varepsilon\to0$ сходится к решению следующей задачи:

$$\begin{gathered}\Delta V_0=f,\quad x\in\Omega^-,\quad \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_i\partial x_j}=f,\quad x\in\Omega^+,\quad [V_0]|_\gamma=0,\\ \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=-0}=|Y|\sum_{j=1}^{n} h_{1j}\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right|_{x_1=+0},\quad V_0=0,\quad x\in\partial\Omega,\end{gathered} \tag{4}$$

причем имеет место следующая оценка:

$$\|u_\varepsilon - V_0\|^2_{H_1(\Omega^-)} + \left\|u_\varepsilon - V_0 - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} N_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right\|^2_{H_1(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_1 \varepsilon, \tag{5}$$

где $K_1 = \mathrm{const}$ и не зависит от ε, h_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ — усредненные коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$h_{ij} = |Y|^{-1} \int_Y \left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_i}{\partial y_j}\right) dy,$$

δ_{ij} — символ Кронекера, $N_i(y)$ $(i = 1, \dots, n)$ — 1-периодические по y решения задач:

$$\Delta_y N_i = 0, \; y \in Y, \; \frac{\partial N_i}{\partial \nu} = -\nu_i, \; y \in \partial\omega, \tag{6}$$

$$\langle N_i \rangle_Y = 0,$$

$$\langle m \rangle_Y \equiv |Y|^{-1} \int_Y m \, dy.$$

Для получения оценки (5) в работах [1, 2] использовались функции типа пограничного слоя у границы γ. Здесь мы получим эту оценку без построения таких функций. Функция V_0 предполагается достаточно гладкой в $\bar{\Omega}^-$ и $\bar{\Omega}^+$.

Пусть $M_j(y)$ $(j = 1, \dots, n)$ — решение следующей задачи:

$$\Delta_y M_j = 0, \; y \in \varepsilon^{-1}\Omega^- \cup \varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon^+,$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial \nu} = 0, \; y \in \varepsilon^{-1} S_\varepsilon, \; [M_j]\big|_{\varepsilon^{-1}\gamma} = 0, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial M_j}{\partial y_1}\right]\bigg|_{\varepsilon^{-1}\gamma} = A_j(\hat{y}), \; M_j = 0, \; y \in \varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon,$$

где $\hat{y} = (y_2, \dots, y_n)$,

$$A_j(\hat{y}) = \left(|Y| h_{1j} - \frac{\partial N_j}{\partial y_1} - \delta_{1j}\right)\bigg|_{y_1 = +0}. \tag{8}$$

Под обобщенным решением задачи (7) будем понимать функцию $M_j \in H_1(\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon, \varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon} (\nabla_y M_j, \nabla_y \varphi) \, dy + \int_{\varepsilon^{-1}\gamma} A_j(\hat{y}) \varphi(0, \hat{y}) \, d\hat{y} = 0 \tag{9}$$

для любой функции $\varphi \in H_1(\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon, \varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon)$.

Используя теорему Лакса — Мильграма [3] и теоремы вложения Соболева, нетрудно доказать теорему существования и единственности обобщенного решения задачи (7).

Получим оценку решения M_j. Для этого нам потребуется следующая лемма, доказанная в [2].

Лемма 1. *Пусть* $\sigma = \bar{Y} \cap \{y : y_1 = 0\}$. *Тогда для функций* N_j $(j = 1, \dots, n)$ *справедливо следующее равенство:*

$$\int_\sigma \left(\delta_{1j} + \frac{\partial N_j}{\partial y_1}\right) d\hat{y} = \int_Y \left(\delta_{1j} + \frac{\partial N_j}{\partial y_1}\right) dy = |Y| h_{1j}. \tag{10}$$

В силу этой леммы имеем

$$\int_\sigma A_j(\hat{y}) \, d\hat{y} = 0. \tag{11}$$

Обозначим через Y_j $(j = 1, \dots, N(\varepsilon))$ ячейки периодичности в ω, примыкающие к $\varepsilon^{-1}\gamma$, и положим $\sigma_j = \bar{Y}_j \cap \varepsilon^{-1}\gamma$. Среди этих ячеек выделим те, которые имеют непустое пересечение с $\varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon$, и будем обозначать их X_j. Итак, $X_j\cap\varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon\neq\varnothing$. Положим $\varkappa_j=\bar{X}_j\cap\varepsilon^{-1}\gamma$.

Определим следующим образом кусочно-постоянную функцию $C_j(y)$, заданную на $\sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)}\bar{Y}_i$:

$$C_j(y)=\begin{cases}\langle M_j\rangle_{Y_i}, & y\in\bar{Y}_i \text{ и } Y_i\cap\varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon=\varnothing,\\ 0, & y\in\bar{X}_i.\end{cases}\tag{12}$$

Положим в интегральном тождестве (9) $\varphi=M_j$. Получим

$$\int\limits_{\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon}|\nabla_y M_j|^2dy=-\int\limits_{\varepsilon^{-1}\gamma}A_j(\hat{y})M_jd\hat{y}.\tag{13}$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части (13). В силу (11) можем записать

$$\int\limits_{\varepsilon^{-1}\gamma}A_j(\hat{y})M_jd\hat{y}=\int\limits_{\varepsilon^{-1}\gamma}A_j(\hat{y})(M_j-C_j)d\hat{y}.\tag{14}$$

Тогда имеем

$$\Big|\int\limits_{\varepsilon^{-1}\gamma}A_j(\hat{y})(M_j-C_j)d\hat{y}\Big|\leqslant K_2\varepsilon^{(1-n)/2}\Big(\sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)}\int\limits_{\sigma_i}(M_j-C_j)^2d\hat{y}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_2(\varepsilon)}\int\limits_{\varkappa_i}M_j^2d\hat{y}\Big)^{1/2},$$

где $K_2=\mathrm{const}$, не зависящая от ε; $N_1(\varepsilon)$ — число ячеек Y_i, не пересекающихся с границей $\varepsilon^{-1}\Gamma_\varepsilon$, а $N_2(\varepsilon)$ — число ячеек X_i.

В силу теоремы вложения имеем

$$\int\limits_{\sigma_i}(M_j-C_j)^2d\hat{y}\leqslant K_3\Big\{\int\limits_{Y_i}(M_j-C_j)^2dy+\int\limits_{Y_i}|\nabla_yM_j|^2dy\Big\},$$

где K_3 не зависит от i и ε. Учитывая, что $C_j=\langle M_j\rangle_{Y_i}$ на Y_i, и используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\int\limits_{\sigma_i}(M_j-C_j)^2d\hat{y}\leqslant K_4\int\limits_{Y_i}|\nabla_yM_j|^2dy,\tag{15}$$

где постоянная K_4 определяется лишь геометрией области Y_i и не зависит от i и ε.

Оценим теперь $\sum\limits_{i=1}^{N_2(\varepsilon)}\int\limits_{\varkappa_i}M_j^2d\hat{y}$. Положим

$$\hat{M}_j=\begin{cases}M_j, & y\in X_i\cap\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon^+=X_{i,\,\varepsilon},\\ 0, & y\in X_i\setminus X_{i,\,\varepsilon}.\end{cases}$$

Очевидно, что функция $\hat{M}_j\in H_1(X_i)$ и

$$\int\limits_{\varkappa_i}M_j^2d\hat{y}=\int\limits_{\bar{X}_i\cap\{y;\,y_1=0\}}\hat{M}_j^2d\hat{y}.$$

В силу теорем вложения и неравенства Фридрихса имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\bar{X}_i\cap\{y:\,y_1=0\}}\hat{M}_j^2d\hat{y}&\leqslant K_5\int\limits_{X_i}(\hat{M}_j^2+|\nabla_y\hat{M}_j|^2)dy\leqslant\\ &\leqslant K_6\int\limits_{X_i}|\nabla_y\hat{M}_j|^2dy\leqslant K_7\int\limits_{X_{i,\,\varepsilon}}|\nabla_yM_j|^2dy,\end{aligned}\tag{16}$$

где постоянные K_5, K_6, K_7 не зависят от i и ε.

Из оценок (15), (16) получаем

$$\Big|\int\limits_{\varepsilon^{-1}\gamma}A_j(\hat{y})M_jd\hat{y}\Big|\leqslant K_8\varepsilon^{(1-n)/2}\Big(\int\limits_{\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon}|\nabla_yM_j|^2dy\Big)^{1/2},\tag{17}$$

где постоянная K_8 не зависит от ε.

Из (13) и (17) следует оценка

$$\int\limits_{\varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon} |\nabla_y M_j|^2 dy \leqslant K_9 \varepsilon^{1-n}, \tag{18}$$

где постоянная K_9 не зависит от ε. Из (18) и неравенства Фридрихса для перфорированной области (см. [3]) получаем, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega^-} |\nabla_y M_j|^2 dx \leqslant K_{10}\varepsilon, \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega^-} M_j^2 dx \leqslant K_{11}\varepsilon^{-1}, \tag{20}$$

постоянные K_{10} и K_{11} не зависят от ε. Итак, доказана

Лемма 2. *Пусть M_j $(j=1, \dots, n)$ — обобщенное решение задачи (7). Тогда для него справедливы оценки*

$$\|M_j\|_{L_2(\Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_{11}\varepsilon^{-1/2}, \tag{21}$$

$$\|\nabla_y M_j\|_{L_2(\Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+)} \leqslant K_{10}\varepsilon^{1/2}. \tag{22}$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered}
\Delta w_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+, \\
[w_\varepsilon]\,|_\gamma = \varepsilon \left(N_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \right)\Bigg|_{x_1=+0}, \\
\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_1}\right]\Bigg|_\gamma = 0, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\
w_\varepsilon = \varepsilon \tilde{N}_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,
\end{gathered} \tag{23}$$

где $\tilde{N}_j = N_j$, если $x_1 \geqslant 0$, и $\tilde{N}_j = 0$, если $x_1 < 0$. Здесь и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n.

Пусть $\varphi(x_1)$ — гладкая при $x_1 \geqslant 0$ функция такая, что $\varphi \equiv 1$, когда $x_1 \in [0, \delta\varepsilon]$; $\varphi \equiv 0$, если $x_1 \geqslant 2\delta\varepsilon$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$; $|\varphi_{x_1}| \leqslant C_0 \varepsilon^{-1}$ и δ выберем так, чтобы $\varphi \equiv 0$ на S_ε (δ можно выбрать не зависящим от ε). Положим $\varphi \equiv 0$ при $x_1 < 0$.

Функцию w_ε назовем обобщенным решением задачи (23), если $\hat{w}_\varepsilon = w_\varepsilon - \varepsilon\varphi(x_1)\tilde{N}_j \dfrac{\partial V_0}{\partial x_j} \in H_1(\Omega_\varepsilon)$, $\hat{w}_\varepsilon = \varepsilon(1-\varphi)\tilde{N}_j \dfrac{\partial V_0}{\partial x_j}$ при $x \in \Gamma_\varepsilon$ и для произвольной функции $\psi \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\nabla_x \hat{w}_\varepsilon, \nabla_x \psi)\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \left(\nabla_x \left(N_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \varphi \right), \nabla_x \psi \right) dx = 0. \tag{24}$$

Доказательство существования и единственности обобщенного решения задачи (23) проводится стандартным способом при помощи теоремы Лакса — Мильграма.

Оценим $\hat{w}_\varepsilon$. Представим $\hat{w}_\varepsilon$ в виде $\hat{w}_\varepsilon = w_\varepsilon^1 + w_\varepsilon^2$, где w_ε^1 — обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered}
\Delta w_\varepsilon^1 = -\varepsilon \Delta \left(\tilde{N}_j \varphi \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+, \\
\frac{\partial w_\varepsilon^1}{\partial \nu} = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \quad w_\varepsilon^1 = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \\
[w_\varepsilon^1]\,|_\gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial w_\varepsilon^1}{\partial x_1}\right]\Bigg|_\gamma = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_j \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \right)\Bigg|_{x_1=+0},
\end{gathered} \tag{25}$$

а w_ε^2 — обобщенное решение задачи

$$\Delta w_\varepsilon^2=0,\ x\in\Omega_\varepsilon,\quad \frac{\partial w_\varepsilon^2}{\partial\nu}=0,\ x\in S_\varepsilon,$$
$$w_\varepsilon^2=\varepsilon B_\varepsilon(x),\ x\in\Gamma_\varepsilon, \tag{26}$$

где $B_\varepsilon=(1-\varphi(x_1))\tilde N_j\dfrac{\partial V_0}{\partial x_j}$.

Оценим w_ε^1 и w_ε^2. Из интегрального тождества для w_ε^1 имеем

$$\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla_x w_\varepsilon^1|^2dx\leqslant D_0\varepsilon^2\int_{\Omega^-\cup\Omega_\varepsilon^+}\left|\nabla_x\left(\tilde N_j\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\varphi\right)\right|^2dx\leqslant D_1\varepsilon, \tag{27}$$

где D_1 — постоянная, не зависящая от ε.

Из неравенства Фридрихса и оценки (27) получаем $\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|w_\varepsilon^1|^2dx\leqslant$ $\leqslant D_2\varepsilon$, где D_2 не зависит от ε.

Чтобы оценить w_ε^2 в норме $H_1(\Omega_\varepsilon)$, введем функцию $\psi\in C^\infty(\bar\Omega)$ такую, что $\psi\equiv1$ при $\rho(x,\partial\Omega)\leqslant\varepsilon$; $\psi\equiv0$ при $\rho(x,\partial\Omega)\geqslant2\varepsilon$; $0\leqslant\psi\leqslant1$, $|\nabla_x\psi|\leqslant C\varepsilon^{-1}$. Положим $w_\varepsilon^3=w_\varepsilon^2-\varepsilon\tilde B_\varepsilon(x)\psi(x)$, где $\tilde B_\varepsilon$ — продолжение B_ε в $\bar\Omega$ такое, что $\|\nabla_x\tilde B_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant K_0\|\nabla_x B_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$, постоянная K_0 не зависит от ε. Такое продолжение возможно (см. [3]).

Тогда, подставляя в интегральное тождество для w_ε^2 вместо пробной функции функцию w_ε^3, получим оценку $\|w_\varepsilon^2\|^2_{H_1(\Omega_\varepsilon)}\leqslant D_3\varepsilon$, где $D_3=\mathrm{const}$ и не зависит от ε. Итак, имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть w_ε — решение задачи (23). Тогда справедлива оценка*

$$\|w_\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega^-)}+\|w_\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega_\varepsilon^+)}\leqslant D_4\varepsilon, \tag{28}$$

где $D_4=\mathrm{const}$, не зависящая от ε.

Положим $u_\varepsilon^1=V_0+\varepsilon\tilde N_j\dfrac{\partial V_0}{\partial x_j}+\varepsilon M_j\dfrac{\partial V_0}{\partial x_j}\Big|_{x_1=+0}-w_\varepsilon$. Тогда имеем

1)
$$[u_\varepsilon^1]\,|_\gamma=[V_0]\,|_\gamma+\varepsilon\left(N_j\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right)\Big|_{x_1=+0}+$$
$$+\varepsilon[M_j]\Big|_\gamma\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\Big|_{x_1=+0}-[w_\varepsilon]\,|_\gamma=0; \tag{29}$$

2)
$$\left[\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial x_1}\right]\Big|_\gamma=\left[\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right]\Big|_\gamma+\left(\frac{\partial N_j}{\partial y_1}\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right)\Big|_{x_1=+0}+$$
$$+\varepsilon\left(N_j\frac{\partial^2V_0}{\partial x_j\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=+0}+|Y|h_{1j}\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\Big|_{x_1=+0}-\left(\frac{\partial N_j}{\partial y_1}\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right)\Big|_{x_1=+0}-$$
$$-\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}=\varepsilon\left(N_j\frac{\partial^2V_0}{\partial x_j\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=+0}; \tag{30}$$

3)
$$\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial\nu}\Big|_{S_\varepsilon}=\varepsilon N_j\frac{\partial^2V_0}{\partial x_j\partial x_s}\nu_s+\varepsilon M_j(1-\delta_{1s})\frac{\partial^2V_0}{\partial x_j\partial x_s}\Big|_{x_1=+0}\nu_s; \tag{31}$$

4)
$$u_\varepsilon^1|_{\Gamma_\varepsilon}=0. \tag{32}$$

Пусть теперь $x\in\Omega^-$. Тогда

$$u_\varepsilon^1=V_0+\varepsilon M_j\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\Big|_{x_1=+0}-w_\varepsilon.$$

Поэтому в Ω^- имеем

$$\Delta u_\varepsilon^1 = f + 2\frac{\partial M_j}{\partial y_s}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_s}\bigg|_{x_1=+0}(1-\delta_{1s}) + \varepsilon M_j \Delta\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\bigg|_{x_1=+0}\right). \quad (33)$$

Если же $x \in \Omega_\varepsilon^+$, то

$$\Delta u_\varepsilon^1 = \Delta V_0 + 2\frac{\partial N_j}{\partial y_s}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_s} + \varepsilon N_j \Delta\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right) +$$
$$+ 2\frac{\partial M_j}{\partial y_s}(1-\delta_{1s})\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_s}\bigg|_{x_1=+0} + \varepsilon M_j \Delta\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\bigg|_{x_1=+0}\right). \quad (34)$$

Введем функции $N_{ij}(y)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ как 1-периодические по y решения задач

$$\Delta_y N_{ij} = -2\frac{\partial N_i}{\partial y_j} + h_{ij} - \delta_{ij}, \ y \in Y,$$
$$\frac{\partial N_{ij}}{\partial \nu} = -N_i \nu_j, \ y \in \partial\omega; \ \langle N_{ij}\rangle_Y = 0. \quad (35)$$

Тогда из (34) и (35) получаем в Ω_ε^+

$$\Delta u_\varepsilon^1 = f - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial N_{js}}{\partial y_i}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_s}\right) + \varepsilon\frac{\partial N_{js}}{\partial y_i}\frac{\partial^3 V_0}{\partial x_j \partial x_s \partial x_i} +$$
$$+ \varepsilon N_j \Delta\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_s}\left(M_j(1-\delta_{1s})\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_s \partial x_j}\bigg|_{x_1=+0}\right) -$$
$$- \varepsilon M_j(1-\delta_{1s})\frac{\partial^3 V_0}{\partial x_j \partial x_s^2}\bigg|_{x_1=+0} + \frac{\partial M_j}{\partial y_s}(1-\delta_{1s})\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j \partial x_s}\bigg|_{x_1=+0} +$$
$$+ \varepsilon M_j \Delta\left(\frac{\partial V_0}{\partial x_j}\bigg|_{x_1=+0}\right). \quad (36)$$

Из соотношений (29)—(36) получаем, что $(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon)$ является обобщенным решением следующей задачи:

$$\Delta(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon) = \Phi_\varepsilon^-(x), \ x \in \bar{\Omega},$$
$$\Delta(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_s}F_{s,\varepsilon}^+(x) + \Phi_\varepsilon^+(x), \ x \in \Omega_\varepsilon^+,$$
$$\frac{\partial(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon)}{\partial \nu} = \varepsilon F_{s,\varepsilon}^+ \nu_s, \ x \in S_\varepsilon; \ u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon = 0, \ x \in \Gamma_\varepsilon,$$
$$[u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon]\,|_\gamma = 0; \ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon)\right]\bigg|_\gamma = \varepsilon\Pi_\varepsilon,$$

где

$$\|\Phi_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega^-)} + \|\Phi_\varepsilon^+\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant D_5\varepsilon^{1/2}, \quad \|F_{s,\varepsilon}^+\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant D_6\varepsilon^{-1/2},$$
$$\|\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\gamma)} \leqslant D_7,$$

где D_j не зависят от ε.

Поэтому для $(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega^-)} + \|u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega_\varepsilon^+)} \leqslant D_8\varepsilon, \quad (37)$$

где $D_8 = \mathrm{const}$, не зависящая от ε. Из оценок (37), (28), (22) и (21) следует

Теорема. *Пусть u_ε — решение задачи (1)—(3), V_0 — решение задачи (4), N_j — решение задачи (6). Тогда имеет место оценка (5).*

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и частично Международного научного фонда, контракт № MIE000.

Литература

1. Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С. // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 4. С. 424—427.

2. Jäger W., Oleinik O. A., Shamaev A. S. On a homogenization problem for the Laplace operator in a partially perforated domain with the Neumann condition on holes. Neidelberg, 1993. (Preprint / Univ. of Heidelberg).

3. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М., 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 6 июня 1994 г.