УДК 532.528

А. В. Кузнецов, О. В. Троепольская

СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Рассмотрим обтекание с отрывом струй безграничным плоскопараллельным потоком идеальной жидкости пластинки, ширина которой, начиная с момента времени $t=0$, изменяется по заданному закону. При этом скорость потока и давление на бесконечности остаются неизменными. Для простоты ограничимся случаем симметричного обтекания, который будет иметь место при симметричном расширении или сжатии пластинки, нормальной к скорости натекающего потока.

Задачу нестационарного течения будем решать в приближении линейной теории малых возмущений, полагая, что малым деформациям препятствия соответствуют малые изменения скорости и давления в жидкости по сравнению с их значениями для установившегося течения и малые отклонения свободных границ от их стационарных положений. При этих условиях удобно представить неустановившееся течение в виде суперпозиции основного установившегося течения, которое сформировалось к моменту времени $t=0$ и считается известным, и малых нестационарных возмущений. Решение задачи установившегося обтекания пластинки шириной $2l_0$ поступательным потоком со скоростью V_∞ дается формулами (рис. 1)

$$w_0=\frac{Q}{\pi}u^2,\quad \frac{1}{V_\infty}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0=-\frac{iu}{1+\sqrt{1-u^2}},\quad Q=\frac{2\pi}{4+\pi}V_\infty l_0. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем индекс „0“ употребляется для обозначения параметров установившегося течения. Кроме того, в расчетных формулах будем полагать $V_\infty=1$, $2l_0=1$.

Обозначим через z_1, w_1, V_1, P_1 возмущения координаты точки физической области, комплексного потенциала, комплексной скорости и давления соответственно. Так как давление связано с потенциалом скорости интегралом Коши — Лагранжа,

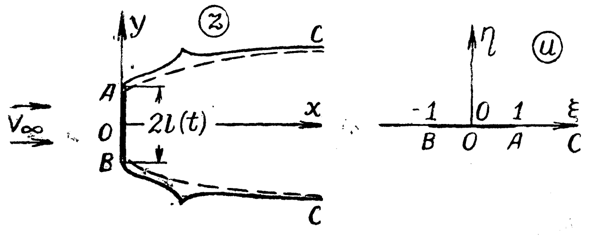

Рис. 1.

я комплексная скорость есть производная от комплексного потенциала, то из четырех параметров возмущений независимыми являются только два. Это означает, что для описания возмущенного течения достаточно поставить и решить начально-краевые задачи лишь для двух параметров возмущений, которые называются определяющими. Фокс и Морган [1] отметили, что две подходящим образом взятые пары возмущений, скажем $(z_1^{(1)}, w_1^{(1)})$ и $(z_1^{(2)}, w_1^{(2)})$, могут представлять собой одно и то же физическое возмущение. Разность таких возмущений оставляет поток неизменным. Ввиду независимости один из параметров определяющей пары можно положить равным нулю, если это не ведет к нарушению физических условий задачи. Такие возмущения называются стационарными. Для решения задач обтекания колеблющихся препятствий применяются два метода стационарных возмущений: метод Гуревича — Хаскинда [2] (пара $z_1=0$ и w_1) и метод Вудса [3]. В последнем в качестве определяющих параметров взяты $w_1=0$ и возмущение логарифма комплексной скорости течения. Было показано [4, 5], что оба метода дают одинаковые результаты с точностью до членов $0(\varepsilon)$, где ε — малый параметр возмущений.

Однако для исследования рассматриваемой здесь задачи пригодным оказывается лишь второй из названных методов. Следуя Вудсу, введем функцию $\chi = \ln(V_\infty dz/dw) = r + i\theta$, где

$$r = \ln(V_\infty/V), \quad \theta = \operatorname{arctg}(V_y/V_x),$$

и сформулируем краевую задачу для разности

$$\omega = \chi - \chi_0 = \mu + i\nu, \quad \mu = r - r_0 = \ln(V_0/V), \quad \nu = \theta - \theta_0 .$$

Считая возмущения границы области течения малыми, будем сносить граничные значения функции ω на границу невозмущенного течения, которой в области D_u параметрического переменного соответствует действительная ось ξ (рис. 1). Если для функции $\omega(u, t)$ известны значения $\nu(\xi, t)$ на отрезке $(-1, 1)$ и значения $\mu(\xi, t)$ на остальной части оси ξ, то ее можно определить по формуле Келдыша — Седова как решение смешанной краевой задачи в соответствующем классе функций.

Так как нормальные составляющие векторов смещений и скорости смещения точек препятствия равны нулю, то [5] для $\xi \in (-1, 1)$, $\nu(\xi, t) = 0$.

Чтобы определить $\mu(\xi, t)$, $\xi \in (-\infty, -1; 1, \infty)$, получим сначала формулу для вычисления давления. Интеграл Коши — Лагранжа относительно неподвижной системы координат имеет вид

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = C(t),$$

где $\partial/\partial t$ — производная в фиксированной точке z. Отсюда, используя интеграл Бернулли для установившегося течения и представление

$$\frac{V}{V_\infty} = \frac{V_0}{V_\infty} e^{-\mu} = \frac{V_0}{V_\infty}(1-\mu),$$

получим

$$P(u,\ t) = P_0(u) + \rho V_0^2(u)\,\mu(u,\ t) - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + C(t).$$

Вычислим

$$\partial\varphi/\partial t\,\big|_{z=\text{const}} = \operatorname{Re} w_t(u,\ t)\,\big|_{z=\text{const}}\,.$$

Согласно принятой аппроксимации $w(u,\ t) = w_0(u)$, поэтому

$$w_t\,\big|_{z=\text{const}} = (dw_0/du)/(du/dt).$$

Производную du/dt найдем из уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t}\bigg|_{u=\text{const}} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} = 0.$$

Так как

$$z(u,\ t) = \int \frac{dz_0}{du} e^{\omega(u,\,t)} du, \tag{2}$$

то

$$\frac{du}{dt} = -\frac{du}{dz_0}\frac{\pi V_\infty^2}{Q} e^{-\omega(u,\,t)} \int \frac{dz_0}{d\zeta} e^{\omega(\zeta,\,\tau)} \omega_\tau(\zeta,\ \tau)\,d\zeta,$$

где

$$\omega_\tau = \partial\omega/\partial\tau,\quad \tau = \pi V_\infty^2 t/Q.$$

Пусть $|\mu| \sim |\nu| \sim |\mu_\tau| \sim |\nu_\tau| \sim \varepsilon$, тогда из приведенных формул с точностью до величин $o(\varepsilon)$ следует, что

$$P(u,\ \tau) = P_0(u) + \rho V_0^2(u)\,\mu(u,\ \tau) + $$
$$+ \frac{\pi V_\infty^2}{Q}\rho \operatorname{Re}\left[\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \int\limits_d^u \frac{dz_0}{d\zeta}(\mu_\tau + i\nu_\tau)\,d\zeta\right] + C(\tau). \tag{3}$$

Используя условие $P = P_\infty$, $V_0 = V_\infty$ на свободных границах и дифференцируя обе части полученной формулы по φ_0, найдем

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau} + \frac{Q}{\pi}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi_0} = 0.$$

Это уравнение имеет решением

$$\mu(\tau,\ \varphi_0) = r(\tau - \pi\varphi_0/Q)\,U(\tau - \pi\varphi_0/Q),$$

где $U(\tau)$ — единичная функция, а $r(\tau)$ — произвольная функция.

Решение смешанной краевой задачи для $\omega(u,\ \tau)$ будем искать в классе функций, ограниченных при $u = \pm 1$. Основанием к такому выбору является естественное требование непрерывности скорости в точках схода струй (условие Жуковского — Чаплыгина). Учитывая симметрию течения, получим

$$\omega(u, \tau) = \frac{2(u^2-1)^{1/2}}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{\xi r[\tau-(\xi^2-1)]\,U[\tau-(\xi^2-1)]}{(\xi^2-u^2)\sqrt{\xi^2-1}}\,d\xi. \tag{4}$$

Из этого представления следует, что $\omega(u, \tau) \sim o(u^{-1})$ при $u \to \infty$. Нетрудно однако показать, что для ограниченности возмущений свободных границ на бесконечности (в любой конечный момент времени) необходимо, чтобы функция $\omega(u, \tau)$ при $u \to \infty$ имела нуль порядка выше второго. Мы получим дополнительную свободу, которую можно использовать для обеспечения этого условия, если допустим существование локальной особенности у функции $\nu(\xi, \tau)$ в точке $\xi = \sqrt{\tau+1}$. Эту особенность введем следующим образом. В формуле (4) для упрощения записи и последующих выкладок перейдем к новым переменным $\alpha^2 = \xi^2 - 1$, $\beta^2 = u^2 - 1$, а функцию $r(\tau-\alpha^2)\,U(\tau-\alpha^2)$ дополним слагаемым $a(\tau)/2\varepsilon$ на отрезке $\sqrt{\tau} < \alpha < \sqrt{\tau}+\varepsilon$, причем $a(\tau)$ будем считать пока произвольной функцией времени. В результате будем иметь

$$\omega(\beta, \tau, \varepsilon) = \frac{2\beta}{\pi i}\left(\int_0^{\sqrt{\tau}} \frac{r(\tau-\alpha^2)\,d\alpha}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{a(\tau)}{2\varepsilon}\int_{\sqrt{\tau}}^{\sqrt{\tau}+\varepsilon} \frac{d\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\right).$$

Второй интеграл легко вычисляется. Устремляя теперь ε к нулю, получим в пределе

$$\omega(\beta, \tau) = \frac{2\beta}{\pi i}\int_0^{\sqrt{\tau}} \frac{r(\tau-\alpha^2)\,d\alpha}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{a(\tau)}{\pi i}\,\frac{\beta}{\beta^2-\tau}$$

или, в прежних переменных,

$$\omega(u, \tau) = \frac{2\sqrt{u^2-1}}{\pi i}\int_1^{\sqrt{1+\tau}} \frac{\xi r\,[\tau-(\xi^2-1)]\,d\xi}{(\xi^2-u^2)\sqrt{\xi^2-1}} - \frac{a(\tau)}{\pi i}\,\frac{\sqrt{u^2-1}}{u^2-1-\tau}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что если положить

$$a(\tau) = -2\int_1^{\sqrt{1+\tau}} \frac{\xi r\,[\tau-(\xi^2-1)]\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}, \tag{6}$$

то $\omega(u, \tau) \sim o(u^{-3})$ при $u \to \infty$.

Из формулы (5) видно, что

$$\nu(u, \tau) \to \mp\infty \operatorname{sign} a(\tau)$$

при $u^2 - 1 \to \tau \mp 0$.

Перейдем к определению функции $r(\tau)$. Обозначим через $\Delta l(\tau) = l(\tau) - l_0$ известную функцию времени. Принимая во внимание, что на пластинке $\nu = 0$ и $\mu \sim o(\varepsilon)$, по формуле (2) с точностью до членов $o(\varepsilon)$ найдем

$$\Delta l(\tau) = \int_0^1 \frac{dy_0}{du} \mu(u, \tau)\, du, \tag{7}$$

где dy_0/du задано формулами (1), а

$$\mu(u, \tau) = \frac{2\sqrt{1-u^2}}{\pi} \int_1^{\sqrt{1+\tau}} \frac{\xi r(\tau + 1 - \xi^2)}{(\xi^2 - u^2)\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi +$$
$$+ \frac{a(\tau)}{\pi} \frac{\sqrt{1-u^2}}{1 - u^2 + \tau} \quad (-1 < u < 1).$$

После подстановки этих функций в (7) и замены переменных $\alpha = \xi^2 - 1$, $\gamma = 1 - u^2$ получим

$$\Delta l(\tau) = \int_0^1 \int_0^\tau \frac{f(\gamma) r(\tau - \alpha)}{(\alpha + \gamma)\sqrt{\alpha}}\, d\alpha d\gamma + a(\tau) \int_0^1 \frac{f(\gamma)}{\tau + \gamma}\, d\gamma,$$

где

$$f(\gamma) = \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{\pi(4 + \pi)\sqrt{1 - \gamma}}, \quad a(\tau) = -\int_0^\tau \frac{r(\tau - \alpha)}{\sqrt{\alpha}}\, d\alpha.$$

Переставляя в первом интеграле порядок интегрирования и вводя обозначение

$$K(\tau) = \int_0^1 \frac{f(\alpha)}{\alpha + \tau}\, d\alpha,$$

придем к интегральному уравнению для функции $r(\tau)$

$$\int_0^\tau \frac{K(\tau - \alpha) - K(\tau)}{\sqrt{\tau - \alpha}}\, r(\alpha)\, d\alpha = \Delta l(\tau), \tag{8}$$

которое представляет собой уравнение Вольтерра первого рода. Известным приемом оно может быть сведено к уравнению второго рода и тем самым установлена его разрешимость. Решение уравнения (8) можно найти методом итераций по схеме

$$\int_0^\tau \frac{K(\tau - \alpha)}{\sqrt{\tau - \alpha}} r^{(n)}(\alpha)\, d\alpha = K(\tau) \int_0^\tau \frac{r^{(n-1)}(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{\tau - \alpha}} + \Delta l(\tau),$$

где $r^{(n)}(\tau)$ — n-ая итерация искомой функции $r(\tau)$.

Таким путем решение исходного уравнения сводится к решению интегрального уравнения свертки. Оно может быть получено с помощью интегрального преобразования Лапласа. Однако в рассмотренных ниже примерах, которые имели главной целью выявление характерных особенностей неустановившегося струйного обтекания препятствия переменной ширины, функция $r(\tau)$ для простоты задавалась, а $\Delta l(\tau)$ определялась по формуле (7).

Приведем формулы для расчета основных параметров течения. Из (2) следует, что

$$x(\beta,\ \tau) = x_0(\beta) + \frac{1}{4+\pi}\int\limits_0^\beta \frac{\sqrt{\xi}\,(e^\mu \cos\nu - 1) - e^\mu \sin\nu}{\sqrt{\xi+1}}\,d\xi,$$

$$y(\beta,\ \tau) = y_0(\beta) + \Delta l(\tau) + \frac{1}{4+\pi}\int\limits_0^\beta \frac{\sqrt{\xi}\,e^\mu \sin\nu + e^\mu \cos\nu - 1}{\sqrt{\xi+1}}\,d\xi,$$

где x, y — координаты точек свободной границы.

Результирующий вектор сил давлений, действующих на препятствие, находится по формуле

$$X + iY = i\int\limits_{-1}^{1}(P - P_\infty)\frac{dz}{du}\,du = i\int\limits_{-1}^{1}(P - P_\infty)\frac{dz_0}{du}\,e^{\omega(u,\ \tau)}du, \qquad (9)$$

а давление по формуле (3), в которой $C(t)$ нужно задать из условия, что давление в точках отрыва струй равно P_∞. В рассматриваемом случае симметричного обтекания пластинки

$$P(\gamma,\ \tau) = P_0(\gamma) + \rho V_0^2(\gamma)\,\mu(\gamma,\ \tau) +$$

$$+ \rho V_\infty V_0(\gamma)\int\limits_0^\gamma \frac{1+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{1-\gamma}}\,\mu_\tau(\gamma,\ \tau)\,d\gamma - \rho V_\infty^2 \mu(0,\ \tau)$$

$$(\gamma = 1 - u^2,\ 0 < u < 1)$$

и результирующий вектор сил давления

$$\frac{X}{X_0} = 1 + \frac{2}{\pi}\left[\int\limits_0^1 \frac{\mu(\gamma,\ \tau)\,d\gamma}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 (1+\sqrt{\gamma})\sqrt{1-\gamma}\,\mu_\tau(\gamma,\ \tau)\,d\gamma - \frac{4+\pi}{2}\,\mu(0,\ \tau)\right].$$

Эта формула получается из (9), если воспользоваться приведенным выше выражением для давления, представлением $\exp\mu = 1+\mu$ и перестановкой порядка интегрирования в повторном интеграле, что позволяет аналитически выполнить одну квадратуру.

Примеры. 1. $r(\tau) = a$

$$\mu(\gamma, \tau) = \frac{2a}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\tau}{\gamma}} - \frac{\sqrt{\tau\gamma}}{\tau+\gamma}\right), \quad \nu(\gamma, \tau) = 0 \quad (0 \leqslant \gamma = 1 - u^2 \leqslant 1),$$

$$\mu(\beta, \tau) = aU(\tau - \beta),$$

$$\nu(\beta, \tau) = \frac{a}{\pi}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\tau}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\tau}}\right| - \frac{2\sqrt{\beta\tau}}{\beta-\tau}\right] (0 < \beta = u^2 - 1).$$

На рис. 2 показано: а) — зависимости $\Delta l(\tau)/a$ (сплошная линия), $\Delta l(0) = 0$, $\Delta l(\infty) = a/2$, $X(\tau)/X_0$ при $a = 0{,}1$ (пунктир); б) — приращение скорости; в) — приращение давления

$$\Delta C_p = 2(P - P_0)/\rho V_\infty^2$$

на пластинке и г) — форма свободной границы в различные моменты времени. Как видно из рисунков и следует из формул, в начальный момент $\tau = 0^+$ на пластинке возникает начальный скачок давления $\Delta C_p/a = \sqrt{1-\gamma}/(1+\sqrt{\gamma}) - 1$ (отрицательный при расширении пластинки, т. е. при $a > 0$) и скачкообразное

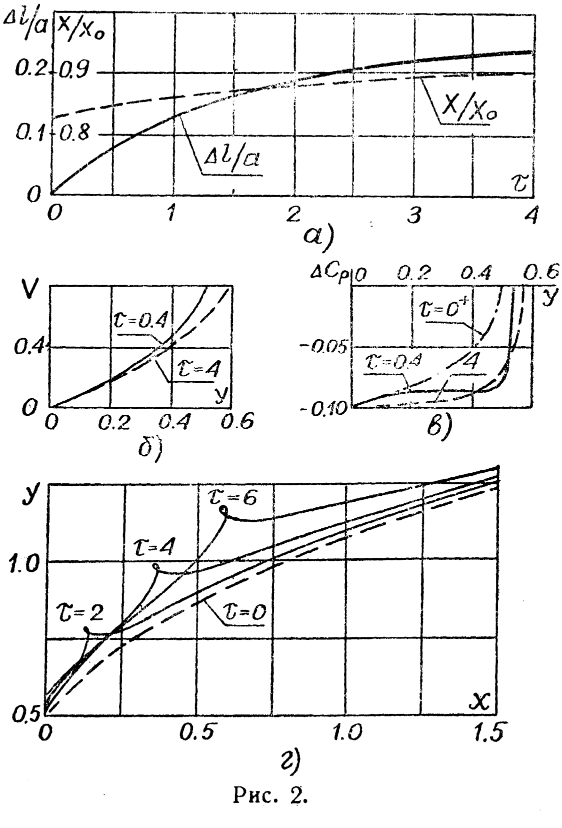

Рис. 2.

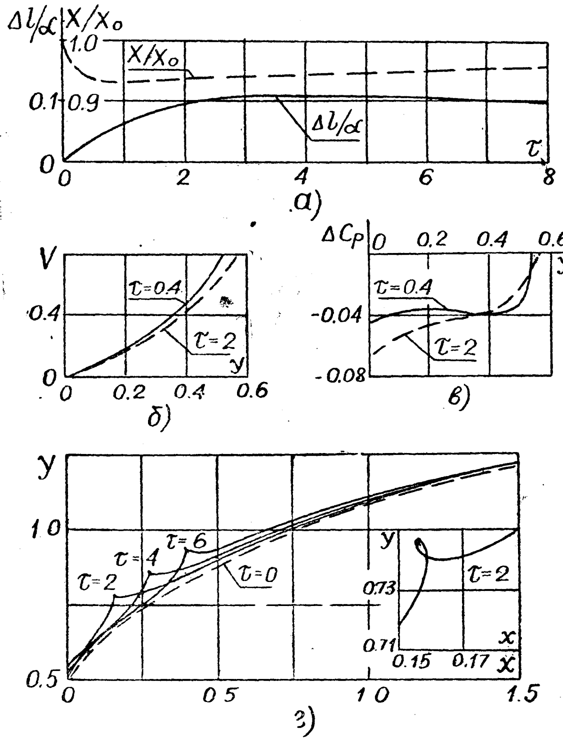

Рис. 3.

уменьшение силы сопротивления $X/X_0 = 1 - a(1 + 2/\pi)$. Оказывается, что в рассматриваемом примере начальная скорость расширения пластинки $d(\Delta l)/d\tau = a/(4+\pi) \neq 0$.

2. $r(\tau) = a\sqrt{\tau}/(1+\tau)$

$$\mu(\gamma, \tau) = \frac{a\sqrt{\gamma}}{1+\tau+\gamma}\left(\sqrt{\frac{\gamma+\tau}{\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{1+\tau}}\right) - \frac{a\sqrt{\gamma}}{\tau+\gamma}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\tau}}\right)$$

$$(0 \leqslant \gamma \leqslant 1),$$

$$\nu(\beta, \tau) = a\sqrt{\beta}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(1+\tau-\beta)\sqrt{1+\tau}} + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau}}\right)\dfrac{1}{\tau-\beta} & (0<\beta<\tau) \\ \dfrac{1}{1+\tau-\beta}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\tau}} - \sqrt{\dfrac{\beta-\tau}{\beta}}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau}}\right)\dfrac{1}{\beta-\tau} & (\beta>\tau). \end{array}\right.$$

Графики изменения тех же самых параметров, что и на рис. 2, для этого примера изображены на рис. 3 а — г. Как видно из рисунков, граница каверны в окрестности точки $\beta = \tau$ образует петлю, внутри которой течение неоднолистно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fox J. L., Morgan G. W. On the stability of some flows of an ideal fluid with free surfaces.— Quart. Appl. Math., vol. 2, 1954, p. 439—456.
2. Гуревич М. И., Хаскинд М. Д. Струйное обтекание контура, совершающего малые колебания.— ПММ, 17, вып. 5, 1953, с. 599—603.
3. Woods L. C. Unsteady cavity flow past curved obstacles with infinite wakes.— Proc. Roy. Soc., ser. A 229, London, 1955, p. 152—180.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979.
5. Кузнецов А. В. Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.

Доложено на семинаре 2 февраля 1984 года.