КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ГАНЕЕВ Р. М.

ЗАДАЧИ ТИПА ТРИКОМИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

1. Будем рассматривать систему следующего вида

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sgn} y\,|y|^{\varkappa} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ где } \varkappa > 0. \tag{1}$$

Эта система является эллиптической при $y > 0$, гиперболической при $y < 0$. Систему (1) будем рассматривать в области $\Omega = \Omega_1 \bigcup AB \bigcup \Omega_2$, где Ω_1 — верхняя полуплоскость, $(y > 0)$, Ω_2 — область, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, где $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, и характеристиками системы

$$AC: x = (1 - 2\nu)(-y)^{\frac{1}{1-2\nu}}, \tag{2}$$

$$BC: x = 1 - (1 - 2\nu)(-y)^{\frac{1}{1-2\nu}}, \tag{3}$$

где

$$\nu = \frac{\varkappa}{2(\varkappa + 2)}; \text{ очевидно } 0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Задача T^*. В области Ω найти систему функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

1. $u(x, y),\ v(x, y) \in C(\bar{\Omega})$. (4)

2. $[u, v]$ — непрерывно дифференцируемое решение системы (1) в Ω_1 и обобщенное решение в Ω_2.

3. $v(x, 0) \in C^1(0, 1)$. (5)

4. $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$u/AC = g(x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{6}$$

$$v(x, 0) = 0 \text{ при } \left|x - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{7}$$

где
$$g(x)\in C^1\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\quad g'(x)\in H^{1-2\nu+\varepsilon}\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\ \varepsilon>0. \tag{8}$$

5. $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$ исчезают на бесконечности. При решении будем применять метод интегральных уравнений. Соотношение из гиперболической области имеется в [1], (см. формулу (23.7)). Оно имеет вид
$$\varphi(x)=\gamma_1 f_*(x)-\gamma_2\int\limits_0^x\frac{\chi(t)\,dt}{(x-t)^{2\nu}},\ 0<x<1, \tag{9}$$
где
$$\varphi(x)=u(x,\ 0),\ \psi(x)=v(x,\ 0),\ \chi(x)=\psi'(x), \tag{10}$$
$$f_*(x)=x^{1-\nu}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{g\left(\frac{t}{2}\right)dt}{t^{1-2\nu}(x-t)^{\nu}}, \tag{11}$$
$$\gamma_1=\frac{\sin\nu\pi\Gamma^2(\nu)}{\pi\Gamma(2\nu)},\quad \gamma_2=\frac{\sin\nu\pi\,(2-4\nu)^{2\nu}\Gamma^2(\nu)}{2\pi\Gamma(2\nu)}.$$

Чтобы вывести соотношение из эллиптической области, используем представление решения системы (1), при $y>0$, через функцию $v(x,\ 0)=\psi(x)$, $-\infty<x<\infty$, (см. [2], с. 107). Полагая в представлении для $u(x_1,\ y_1)$ $y_1=0$ и учитывая (7), получим
$$\varphi(x)=A_1\int\limits_0^1\frac{(t-x)\,\psi(t)\,dt}{[(t-x)^2]^{1+\nu}}, \tag{12}$$
где
$$A_1=\frac{2^{2\nu}(1-2\nu)^{2\nu}q_1}{\pi},\quad q_1=\frac{\nu\Gamma^2(\nu)}{\Gamma(2\nu)}, \tag{13}$$

а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Учитывая определение интеграла в смысле главного значения по Коши и используя интегрирование по частям в предположении
$$\psi(0)=0, \tag{14}$$
$$\psi(1)=0, \tag{15}$$
получим из (12)
$$\varphi(x)=\frac{A_1}{2\nu}\left[\int\limits_0^x\frac{\psi'(t)\,dt}{(x-t)^{2\nu}}+\int\limits_x^1\frac{\psi'(t)\,dt}{(t-x)^{2\nu}}\right]. \tag{16}$$

Из соотношений (9), (16) получим

$$(1+2\sin\nu\pi)\int\limits_0^x \frac{\chi(t)\,dt}{(x-t)^{2\nu}}+\int\limits_x^1 \frac{\chi(t)\,dt}{(t-x)^{2\nu}}=f(x), \tag{17}$$

где

$$f(x)=\frac{2\nu\gamma_1}{A_1}f_*(x). \tag{18}$$

Лемма 1. *Функция* $f(x)$, *определенная соотношениями* (11), (18), *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $1-2\nu+\varepsilon$ *при* $0\leqslant x\leqslant 1$.

Доказательство леммы проводится при помощи замены $t=xz$, с учетом (8).

Уравнение (17) представляет собой обобщенное уравнение Абеля, это уравнение решено Л. Вольферсдорфом [3], его решение имеет вид

$$\chi(x)=\frac{\cos 2\nu\pi+\sin\nu\pi}{2\pi\sin 2\nu\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}+$$

$$+\frac{1-\sin\nu\pi}{2\pi\sin 2\nu\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-2\nu}}+\frac{(1-\sin\nu\pi)\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2}\right)}{2\pi^2(2-2\nu)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\nu-\frac{3}{4}\right)}\times \tag{19}$$

$$\times\int\limits_0^1 f(t)\,[x(1-t)]^{2\nu-2}F\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2},\ 2-2\nu,\ 3-2\nu,\ \frac{x-t}{x(1-t)}\right)dt.$$

Придадим этому решению другой вид. Для этого используем метод К. Д. Сакалюка [4], с. 603. Взяв в качестве канонической функции задачи Римана, соответствующей уравнению (17), функцию

$$\chi(z)=z^{-\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-z)^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}, \tag{20}$$

будем иметь

$$\chi(x)=\frac{\sin 2\nu\pi}{4\pi\sin\nu\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}-$$

$$-\frac{\sin 2\nu\pi\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}(1-2\nu)}{4\pi^2\sin\nu\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{t^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-t)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}\times \tag{21}$$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}(\tau-t)}.$$

Переставляя порядок интегрирования во втором слагаемом, перепишем (21) в следующем виде

$$\chi(x)=\frac{\cos\nu\pi}{2\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}-\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}(1-2\nu)}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\times \tag{22}$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}}\int\limits_0^x\frac{t^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-t)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}(\tau-t)}.$$

Внутренний интеграл, входящий в (22), обозначим через $i(x,\tau)$. При вычислении его приходится различать два случая $x>\tau$, $x<\tau$. В случае $x>\tau$, применяя известный метод теории функции комплексного переменного (см., например [5]) и используя при этом формулу (5), с. 225 [6], получим

$$i(x,\tau)=\pi\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}(1-2\nu)\,\tau^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}(x-\tau)^{2\nu-1}- \tag{23}$$

$$-\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}(1-2\nu)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\nu\pi\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\nu\right)\Gamma(2\nu)(1-x)^{\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}}}{\sin\frac{\pi}{4}(1-2\nu)\,\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{\nu}{2}\right)(1-\tau)}\times$$

$$\times F_1\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\nu,\ \frac{1}{4}(2\nu-1),\ 1,\ \frac{7}{4}+\frac{\nu}{2},\ 1-x,\ \frac{1-x}{1-\tau}\right).$$

В случае $x<\tau$, делая замену $t=xz$ и используя формулу (5), с. 225 [6], получим

$$i(x,\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma(2\nu)\,x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\nu}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\nu\right)\tau}\times$$

$$\times F_1\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2},\ \frac{3}{4}(2\nu-1),\ 1,\ \frac{5}{4}+\frac{3}{2}\nu,\ x,\ \frac{x}{\tau}\right). \tag{24}$$

Подставляя теперь найденные значения $i(x,\tau)$ в (22), получим

$$\chi(x)=\frac{\cos\nu\pi\cos\frac{\pi}{4}(1-2\nu)}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}}+$$

$$+A_2\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{(1-x)^{\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}}f(\tau)}{\tau^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}}\times \tag{25}$$

$$\times F_1\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\nu,\ \frac{1}{4}(2\nu-1),\ 1,\ \frac{7}{4}+\frac{\nu}{2},\ 1-x,\ \frac{1-x}{1-\tau}\right)d\tau-$$

$$-A_3\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\frac{x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\nu}f(\tau)}{\tau^{\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2}}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}}\times$$

$$\times F_1\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2},\ \frac{3}{4}(2\nu-1),\ 1,\ \frac{5}{4}+\frac{3}{2}\nu,\ x,\ \frac{x}{\tau}\right)d\tau,$$

где

$$A_2=\frac{\cos\nu\pi\cos\frac{\pi}{4}(1-2\nu)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\nu\pi\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\nu\right)\Gamma(2\nu)}{2\pi^2\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{\nu}{2}\right)},$$

$$A_3=\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}(1-2\nu)\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma(2\nu)}{2\pi^2\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\nu\right)}.$$

Используя формулы из [7], на с. 20, 15, 24, нетрудно показать, что решение уравнения (17), определенное соотношением (25), совпадает с (19).

Лемма 2. *Если* $f(x)\in H^{1-2\nu+\varepsilon}[0,\ 1]$, *то решение интегрального уравнения* (17) *имеет вид*

$$\chi(x)=[x(1-x)]^{-(1-2\nu-\varepsilon)}\tilde{\chi}(x), \tag{26}$$

где

$$\tilde{\chi}(x)\in H[0,\ 1].$$

Утверждение леммы доказано в [3].

Для решения задачи мы должны найти функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\psi'(x) = \chi(x), \tag{27}$$

$$\psi(0) = 0, \tag{28}$$

$$\psi(1) = 0, \tag{29}$$

(см. (10), (14), (15)).

Из (27), (28) найдем $\psi(x)$ в следующем виде

$$\psi(x) = \int_0^x \chi(t)\,dt, \tag{30}$$

где $\chi(x)$ определена соотношением (25).

Итак, $\psi(x)$ есть первообразная функции $\chi(x)$, удовлетворяющая условию $\psi(0) = 0$. Нетрудно видеть, что $\psi(x)$ получается из (25) или (21) вычеркиванием символа $\frac{d}{dx}$.

Нетрудно убедиться, что функция $\psi(x)$, определенная таким образом, будет удовлетворять условию (29), если

$$\int_0^1 \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{1-2\nu}{4}}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}} = 0. \tag{31}$$

Следовательно, условие (31) является необходимым условием разрешимости задачи T^*.

Зная $\psi(x)$, можно определить функцию $\varphi(x)$ по формуле (9). Займемся теперь исследованием свойств $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Для этого используем следующее выражение

$$\psi(x) = B_1 \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}} + B_2 \int_0^x \frac{N(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\nu}}, \tag{32}$$

где

$$B_1 = \frac{\cos\nu\pi}{2\pi}, \quad B_2 = -\frac{\cos\nu\pi \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-2\nu)}{2\pi^2},$$

$$N(t) = t^{\frac{1-2\nu}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)} \int_0^1 \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{1}{4}(1-2\nu)}(1-\tau)^{\frac{3}{4}(1-2\nu)}(\tau-t)}. \tag{33}$$

Это выражение получится из (21), путем интегрирования.

Лемма 3. *Функция $N(t)$, определенная соотношением* (33), *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\frac{1}{4}(1-2\nu)$, *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Утверждение леммы следует из свойства интеграла типа Коши [8], § 25, 1°, при этом учитывается лемма 1.

Лемма 4. *Функция* $\psi(x)$, *определенная соотношением* (32), *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* 2ν, *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Утверждение леммы следует из теоремы Харди — Литтлвуда [9], с. 109, с учетом лемм 1 и 3.

Лемма 5. *Функция* $\theta(x)$, *определенная соотношением*

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{\rho(t)\,dt}{t^\beta (x-t)^{1-\alpha}},$$

при $|\rho(x)| < N$, $\alpha - \beta > 0$, *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha - \beta$ *при* $0 \leqslant x < 1$.

Лемма доказывается совершенно аналогично лемме 2.5 из [10].

Лемма 6. *Функция* $\varphi(x)$, *определенная соотношением* (9), *непрерывна на* $[0, 1]$.

Утверждение леммы для первого слагаемого следует из леммы 1, а для второго слагаемого — из леммы 5 с учетом леммы 2.

Решение задачи T^* по известным φ и ψ находим, решая в Ω_1 задачу Гильберта по формулам [2] с. 107, а в Ω_2 — задачу Коши по формулам (119), (120) [11], с. 103, при $A_3 = B_3 = 0$. В Ω_2 оно является обобщенным в смысле Т. В. Чекмарева [11].

Сформулируем результат.

Теорема 1. *Обобщенное решение задачи* T^* *существует при выполнении условия* (31).

2. Теперь рассмотрим систему следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sgn} y\,|y|^{-\varkappa} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{aligned}\right\}, \quad 0 < \varkappa < 1. \tag{34}$$

Эта система является эллиптической при $y > 0$, гиперболической при $y < 0$. Систему (34) будем рассматривать в области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где Ω_1 — верхняя полуплоскость $(y > 0)$, Ω_2 — область, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, где $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, и характеристиками системы

$$AC: x = (1 + 2\beta)(-y)^{\frac{1}{1+2\beta}}, \tag{35}$$

$$BC: x = 1 - (1 + 2\beta)(-y)^{\frac{1}{1+2\beta}}, \quad y < 0, \tag{36}$$

где

$$\beta = \frac{\varkappa}{2(2-\varkappa)}; \text{ очевидно } 0 < \beta < \frac{1}{2}. \tag{37}$$

Задача $\widetilde{T}$. В области Ω найти систему функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

1. $v(x, y) \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$, $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$.

2. $[u, v]$ — непрерывно дифференцируемое решение системы (34) в Ω_1 и обобщенное решение в Ω_2.

3. Функция $v(x, y)$ удовлетворяет условию склеивания на AB

$$v(x, +0) = -v(x, -0) = \tau(x), \quad 0 < x < 1, \tag{38}$$

где

$$\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1).$$

4. $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$u(x, 0) = 0 \ \text{ при } \left| x - \frac{1}{2} \right| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{39}$$

$$v/AC = g(x) \ \text{ при } \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{40}$$

где

$$g(x) \in C^1[0, 1], \ g'(x) \in H^{1-2\beta+\varepsilon}\left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{41}$$

5. $u(x, y)$, $v(x, y)$ исчезают на бесконечности. Поставленная задача является аналогом видоизмененной задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго порядка (см. [9], гл. 5).

Задача $\widetilde{T}$ для системы (34) при помощи замены независимых переменных

$$t = (1-\varkappa)^{-\frac{2(1-\varkappa)}{2-\varkappa}} |y|^{1-\varkappa} \operatorname{sgn} y, \quad x = x$$

и замены функций

$$\omega = -(1-\varkappa)^{\frac{\varkappa}{2-\varkappa}} \operatorname{sgn} t \cdot v, \quad u = u$$

сводится к рассмотренной выше задаче T^* для системы

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sgn} t\, |t|^{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}} \omega_x - u_t &= 0 \\ \omega_t + u_x &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует существование обобщенного решения задачи $\widetilde{T}$ при выполнении условия (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекмарев Т. В. Задачи с граничными условиями для некоторых систем уравнений различных типов. Докт. дис. Казань, 1971.
2. Чекмарев Т. В. О свойствах решений вырождающейся эллиптической системы уравнений типа уравнения Трикоми, II. — „Изв. вузов, Математика“, 1969, № 11, с. 103—109.
3. Wolfersdorf L. Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die Verallgemeinerte Tricomi—Gleichung. — Mathem. Nachrichten, 29, *H* 3/4, 1965.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Крикунов Ю. М. Задача Трикоми для одного частного случая уравнения $K(y)u_{xx}+u_{yy}=0$ II. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 5. Изд-во Казан. ун-та, 1968, с. 122—136.
6. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., „Наука“, 1965.
7. Appell Paul and Kampe de Fereit M. L., 1926: Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite, Gauthier — Villars.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., „Наука“, 1968.
9. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., „Наука“, 1970.
10. Солодовников И. Е. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с обобщенными условиями склеивания. Канд. дис. Казань, 1974.
11. Чекмарев Т. В. Задачи Коши, Гурса и Коши-Гурса для вырождающихся систем уравнений, II. — „Изв. вузов, Математика“, 1970, № 1, с. 98—107.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 г.