В. А. Юмагужин, Классификация линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. II,
Дифференц. уравнения, 2002, том 38, номер 12, 1627–1632

https://www.mathnet.ru/de10747

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 12, с. 1627–1632

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. II

© 2002 г. В. А. Юмагужин

Настоящая работа является продолжением работы [1], поэтому сохраним в ней обозначения и продолжим нумерацию пунктов и формул.

§ 7. РАССЛОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У.

7.1. Рассмотрим тривиальное расслоение $\pi : E = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$. Через x обозначим стандартную координату на базе $\mathbb{R}^1$ этого расслоения, а через $a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots, a_0$ – стандартные координаты на его слое $\mathbb{R}^{n-1}$.

Всякое сечение $S : x \mapsto (x, a_{n-2}(x), a_{n-3}(x), \ldots, a_0(x))$ расслоения π отождествляем с о.д.у. $\mathcal{E}_S = \{y^{(n)} = a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + a_{n-3}(x) y^{(n-3)} + \ldots + a_0(x) y\}$. Ясно, что это отождествление является биекцией множества всех сечений расслоения π на множество всех о.д.у. вида (3.1). Через $S_{\mathcal{E}}$ обозначим сечение, соответствующее уравнению $\mathcal{E}$ при этом отождествлении.

Обозначим через Γ псевдогруппу всех диффеоморфизмов базы расслоения π и через Φ псевдогруппу всех преобразований вида (5.2). Имеет место изоморфизм $\Gamma \to \Phi$, определяемый формулой $f \mapsto (f, \hat{f})$, где $\hat{f}(x,y) = |f'(x)|^{(n-1)/2} y$.

Пусть $\mathcal{E}_2 = \{P_n = A_{n-2}(X) P_{n-2} + A_{n-3}(X) P_{n-3} + \ldots + A_0(X) Y\}$ – произвольное о.д.у. вида (3.1). Подвергая $\mathcal{E}_2$ произвольному преобразованию $(f, \hat{f}) \in \Phi$, получим о.д.у. $\mathcal{E}_1 = \{p_n = a_{n-2}(x) p_{n-2} + a_{n-3}(x) p_{n-3} + \ldots + a_0(x) y\}$ того же вида. Коэффициенты уравнения $\mathcal{E}_1$ выражаются через коэффициенты уравнения $\mathcal{E}_2$ и производные функции f. Очевидно, что по тем же формулам выражаются коэффициенты уравнения $\mathcal{E}_2$ через коэффициенты уравнения $\mathcal{E}_1$ и производные обратной функции f^{-1}:

$$A_{n-i} = F_{n-i}(a_{n-2}, \ldots, a_{n-i}; df^{-1}/dX, \ldots, d^{i+1} f^{-1}/dX^{i+1}), \quad i = \overline{2, n}. \tag{7.1}$$

Уравнения (7.1) определяют поднятие всякого $f \in \Gamma$ до диффеоморфизма $f^{(0)}$ расслоения π так, что $\pi \circ f^{(0)} = f \circ \pi$.

Для всякого $f \in \Gamma$ формулой

$$S \mapsto f(S) = f^{(0)} \circ S \circ f^{-1} \tag{7.2}$$

определим преобразование сечений расслоения π. Теперь уравнения (7.1) могут быть записаны как $S_{\mathcal{E}_2} = f(S_{\mathcal{E}_1})$.

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Пусть $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ – уравнения вида (3.1). Преобразование $(f, \hat{f}) \in \Phi$ преобразует $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_2$ тогда и только тогда, когда $S_{\mathcal{E}_2} = f(S_{\mathcal{E}_1})$.*

Пусть S – сечение расслоения π и p – точка из области определения сечения S. Через $\{S\}_p$ обозначим росток сечения S в точке p. Скажем, что ростки $\{S_1\}_{p_1}$ и $\{S_2\}_{p_2}$ эквивалентны, если существует такой диффеоморфизм $f \in \Gamma$, что $f(\{S_1\}_{p_1}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(S_1)\}_{f(p_1)} = \{S_2\}_{p_2}$.

В § 5 мы свели задачу локальной классификации линейных о.д.у. порядка $n \geq 3$ относительно контактных преобразований к локальной классификации линейных о.д.у. вида (3.1) относительно преобразований вида (5.2). Из предложения (7.1) следует, что последняя задача сводится к задаче классификации ростков сечений расслоения π относительно преобразований из Γ, которая, поскольку Γ – транзитивная псевдогруппа, сводится к классификации ростков сечений расслоения π в точке $0 \in \mathbb{R}^1$ относительно диффеоморфизмов из группы изотропии $\Gamma_0 = \{f \in \Gamma | f(0) = 0\} \subset \Gamma$ этой точки.

7.2. Симметрии сечений. Пусть S – сечение расслоения π, ξ – векторное поле на базе $\mathbb{R}^1$ и f_t – его поток. Поле ξ называется симметрией сечения S, если его поток f_t сохраняет сечение S, т.е. $f_t(S) = S$ при всех t. Через $\operatorname{Sym} S$ обозначим алгебру Ли всех симметрий сечения S.

Из предложения (7.1) и формулы (3.2) вытекает

Предложение 7.2. *Пусть $S : x \mapsto (x, a_{n-2}(x), \ldots, a_0(x))$ – сечение расслоения π и $\xi = \varphi(x)\partial/\partial x$. Поле ξ – симметрия сечения S тогда и только тогда, когда $\varphi(x)\partial/\partial x + 2^{-1}(n-1)\varphi' y\partial/\partial y$ – точечная симметрия уравнения $\mathcal{E}_S$.*

Следствие 7.1. *1) Поле $\xi = \varphi(x)\partial/\partial x$ – симметрия сечения S тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ – решение системы (3.3);*

2) $\dim \operatorname{Sym} S$ равно либо 3, либо 1, либо 0.

Легко доказать следующее утверждение.

Предложение 7.3. *Пусть ξ – симметрия сечения S. Тогда для любого $f \in \Gamma$ поле $f_*(\xi)$ – симметрия сечения $f(S)$.*

7.3. Подрасслоение Лагерра–Форсайта. Рассмотрим подпространство $E^{n-3} = \{(x, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0) \in E | a_{n-2} = 0\}$ тотального пространства E расслоения π. Тогда $\tau = \pi|_{E^{n-3}} : E^{n-3} \to \mathbb{R}^1$ – подрасслоение расслоения π. Очевидно, сечения расслоения τ отождествляются с линейными о.д.у. вида (4.2).

Как известно [2, с. 26], точечное преобразование приводит о.д.у. вида (4.2) к уравнению того же вида тогда и только тогда, когда это преобразование имеет вид $X = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$, $Y = C|X'|^{(n-1)/2} y$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, C \in \mathbb{R}$.

Точно так же, как теорема 5.2, доказывается

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – о.д.у. вида (4.2). Если существует точечное преобразование, приводящее $\mathcal{E}_1$ к $\mathcal{E}_2$, то существует и точечное преобразование*

$$X = f(x) = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta), \quad Y = |f'(x)|^{(n-1)/2} y, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

приводящее $\mathcal{E}_1$ к $\mathcal{E}_2$.

Обозначим через G группу Ли всех проективных преобразований $\mathbb{R}^1$, т.е. $G = \{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta) | \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\}$.

Из приведенного выше результата работы [2] и предложения 7.1 следует, что для всякого $f \in G$ диффеоморфизм $f^{(0)}$ сохраняет подрасслоение τ.

Пусть S – сечение расслоения π и $f \in \Gamma$. Скажем, что f – преобразование Лагерра–Форсайта для S, если $f(S)$ – сечение расслоения τ.

Очевидно, что f – преобразование Лагерра–Форсайта для S тогда и только тогда, когда $(f, \hat{f})$ – преобразование Лагерра–Форсайта для уравнения $\mathcal{E}_S$.

§ 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ

8.1. Расслоения джетов. Стандартные координаты x, a_{n-i}, $i = 3, 4, \ldots, n$, на расслоении τ определяют стандартные координаты x, $a_{n-j}^{(r)}$, $j = 3, 4, \ldots, n$, $r = 0, 1, 2, \ldots, k$, на расслоении джетов $\tau_k : J^k\tau \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Пусть $G_+ = \{f \in G | f' > 0\}$, $G_- = \{f \in G | f' < 0\}$. Очевидно, что G_+ – компонента связности единицы группы G и $G = G_+ \cup G_-$, $G_- = \mu \circ G_+$, где $\mu \in G_-$ определено формулой $\mu(x) = -x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^1$.

Всякий диффеоморфизм $f^{(0)}$, $f \in G$, может быть поднят до диффеоморфизма $f^{(k)}$ расслоения джетов $J^k\tau$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, так, что $\tau_{l,m} \circ f^{(l)} = f^{(m)} \circ \tau_{l,m}$ для $l > m$. Это поднятие определяется формулой $f^{(k)}([S]_p^k) = [f^{(0)} \circ S \circ f^{-1}]_{f(p)}^k$. В частности, в стандартных координатах поднятие

$$\mu^{(k)}((x, a_{n-j}^{(r)})) = (-x, (-1)^{j+r} a_{n-j}^{(r)}), \quad j = 3, 4, \ldots, n, \quad r = 0, 1, \ldots, k. \tag{8.1}$$

Пусть $G^{(k)} = \{f^{(k)} | f \in G\}$, $k = 0,1,2,\ldots,\infty$, и $G_\pm^{(k)} = \{f^{(k)} | f \in G_\pm\}$. Очевидно, что $G_+^{(k)}$ – компонента связности единицы группы $G^{(k)}$ и $G^{(k)} = G_+^{(k)} \cup G_-^{(k)}$, $G_-^{(k)} = \mu^{(k)} \circ G_+^{(k)}$.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G. Как векторное пространство над $\mathbb{R}$ она порождена векторными полями $\xi_0 = \partial/\partial x$, $\xi_1 = x\,\partial/\partial x$, $\xi_2 = x^2\,\partial/\partial x$.

Пусть $\xi \in \mathfrak{g}$ и f_t – поток поля ξ. Тогда $f_t^{(k)}$ – поток в расслоении $J^k\tau$. Соответствующее ему векторное поле в $J^k\tau$ обозначим через $\xi^{(k)}$ и назовем поднятием поля ξ в расслоение $J^k\tau$. Очевидно, что $(\tau_{l,m})_*(\xi^{(l)}) = \xi^{(m)}$, $l > m$.

Пусть $\xi = \varphi(x)\,\partial/\partial x$ – произвольный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда векторное поле $\xi^{(\infty)}$ определяется формулой (см. [3, с. 207])

$$\xi^{(\infty)} = \varphi D_x + \Im_\psi, \tag{8.2}$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=3}^{n} a_{n-j}^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(k)}}, \quad \Im_\psi = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=3}^{n} D_x^k(\psi_{n-j}) \frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(k)}}$$

– операторы полной производной по переменной x и эволюционного дифференцирования с производящей функцией $\psi = (\psi_{n-3},\ldots,\psi_0)^t$ соответственно. Производящая функция определяется следующим образом. Пусть $x_1 = [S]_x^1 \in J^1\tau$, $x = \tau_1(x_1)$, и f_t – поток векторного поля ξ, тогда

$$\psi(x_1) = (\psi_{n-3}(x_1),\ldots,\psi_0(x_1))^t = \frac{d}{dt}(f_t^{(0)} \circ S \circ f_t^{-1})(x)|_{t=0}.$$

Пусть $S : x \mapsto (x, a_{n-3}(x),\ldots,a_0(x))$. Принимая во внимание, что $(df_t/dt)|_{t=0} = \varphi$ и $\varphi''' = 0$, нетрудно вычислить, что

$$\begin{gathered}\psi_{n-3} = -3a_{n-3}\varphi' - a_{n-3}^{(1)}\varphi,\\ \psi_{n-k} = -2^{-1}(k-1)(n-k+1)a_{n-k+1}\varphi'' - ka_{n-k}\varphi' - a_{n-k}^{(1)}\varphi, \quad k = 4,5,\ldots,n.\end{gathered} \tag{8.3}$$

Теперь отсюда и из (8.2) следует, что для любого $k = 0,1,2,\ldots,\infty$

$$\xi_0^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_1^{(k)} = x\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{r=0}^{k}\sum_{j=3}^{n}(j+r)a_{n-j}^{(r)}\frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(r)}},$$

$$\xi_2^{(k)} = x^2\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{r=0}^{k}\sum_{j=3}^{n}[2x(j+r)a_{n-j}^{(r)} + (j-1)(n-j+1)a_{n-(j-1)}^{(r)} + (2j+r-1)ra_{n-j}^{(r-1)}]\frac{\partial}{\partial a_{n-j}^{(r)}},$$

где $a_{n-2}^{(r)} = 0$.

8.2. Инвариантные подрасслоения. Подпространство E^i, $i = n-3, n-4,\ldots,0,-1$, пространства E^{n-3} определим формулой $E^i = \{(x, a_{n-3}, a_{n-4},\ldots,a_0) \in E^{n-3} | a_j = 0$ при $j > i\}$. Очевидно, имеет место флаг $E^{n-3} \supset E^{n-4} \supset \ldots \supset E^0 \supset E^{-1}$.

Предложение 8.1. *Каждое подпространство E^i инвариантно относительно $G^{(0)}$.*

Доказательство. Легко проверить, что ограничения векторных полей $\xi_0^{(0)}$, $\xi_1^{(0)}$, $\xi_2^{(0)}$ на E^i касаются E^i. Следовательно, каждое подрасслоение E^i инвариантно относительно $G_+^{(0)}$. Из (8.1) следует $\mu^{(0)}(E^i) = E^i$. Предложение доказано.

Подмножество E_i, $i = n-3, n-4,\ldots,0,-1$, пространства E^{n-3} определим следующим образом: $E_i = E^i \setminus E^{i-1}$ при $i \geq 0$ и $E_{-1} = E^{-1}$. Очевидно, что $E^{n-3} = E_{n-3} \cup E_{n-4} \cup \ldots \cup E_0 \cup E_{-1}$.

Рассмотрим подрасслоения $\tau^i = \tau|_{E_i} : E_i \to \mathbb{R}$ расслоения τ.

Следствие 8.1. *Каждое подрасслоение E_i инвариантно относительно группы $G^{(0)}$.*

Следствие 8.2. *Каждое подрасслоение джетов $J^k\tau^i$ инвариантно относительно группы $G^{(k)}$ и, в частности, относительно подгруппы $G_+^{(k)} \subset G^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots,\infty$.*

8.3. Скалярные дифференциальные инварианты. Функция $I \in C^\infty(J^k\tau^i)$ называется скалярным дифференциальным инвариантом группы G (G_+), если $(f^{(k)})^* I = I$ $\forall f \in G$ (G_+) (см. [4, с. 218]).

Пусть S – сечение расслоения τ^i и I – скалярный дифференциальный инвариант группы G (G_+). Положим $I(S) = (j_k S)^* I$.

Для любого $f \in G$ имеем

$$I(f(S)) \circ f = I(S). \tag{8.4}$$

Действительно, $I(f(S)) = (j_k f(S))^* I = (j_k(f^{(0)} \circ S \circ f^{-1}))^* I = (f^{(k)} \circ j_k S \circ f^{-1})^* I = (f^{-1})^* \circ (j_k S)^* \circ (f^{(k)})^* I = (f^{-1})^* \circ (j_k S)^* I = (f^{-1})^* I(S) = I(S) \circ f^{-1}$.

Ясно, что $I \in C^\infty(J^k\tau^i)$ – скалярный дифференциальный инвариант группы G_+ тогда и только тогда, когда I – решение системы линейных уравнений в частных производных

$$\bar{\xi}_0^{(k)}(I) = 0, \quad \bar{\xi}_1^{(k)}(I) = 0, \quad \bar{\xi}_2^{(k)}(I) = 0, \tag{8.5}$$

где $\bar{\xi}_0^{(k)}$, $\bar{\xi}_1^{(k)}$, $\bar{\xi}_2^{(k)}$ – ограничения векторных полей $\xi_0^{(k)}$, $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$ на $J^k\tau^i$.

Через $\mathcal{A}_i^k$ обозначим алгебру скалярных дифференциальных инвариантов группы G_+ на $J^k\tau^i$ и отождествим A_i^k с ее образом $(\tau_{l,k}^i)^*(\mathcal{A}_i^k)$, $l > k$. В результате имеем последовательность $A_i = A_i^\infty \supset \ldots \supset A_i^k \supset \ldots \supset A_i^1 \supset A_i^0$.

Через $\mathcal{D}_i^k$ обозначим распределение на $J^k\tau^i$, порожденное векторными полями $\bar{\xi}_0^{(k)}$, $\bar{\xi}_1^{(k)}$, $\bar{\xi}_2^{(k)}$. Легко проверить, что если $i = k = 0$, то $\dim \mathcal{D}_i^k = 2$, в противном случае $\dim \mathcal{D}_i^k = 3$.

Через N_i^k обозначим число функционально независимых скалярных дифференциальных инвариантов в A_i^k. Ясно, что $N_i^k = \dim J^k\tau^i - \dim \mathcal{D}_i^k$. Нетрудно проверить, что

$$N_0^0 = 0, \quad N_0^1 = 0, \quad N_0^k = k - 1, \quad k \geq 2, \tag{8.6}$$

$$N_1^0 = 0, \quad N_1^k = 2k, \quad k \geq 1, \tag{8.7}$$

$$N_i^0 = i - 1, \quad N_i^k = (k+1)(i-1) + 2k, \quad k \geq 1. \tag{8.8}$$

Рассмотрим векторное поле на $J^\infty\tau^i$

$$\zeta_i = |a_i|^{-1/(n-i)} \bar{D}_x, \tag{8.9}$$

где $\bar{D}_x = D_x|_{J^\infty\tau^i} = \partial/\partial x + \sum_{r=0}^\infty \sum_{j=i}^0 a_j^{(r+1)} \partial/\partial a_j^{(r)}$ – оператор полной производной по переменной x, ограниченный на $J^\infty\tau^i$.

Предложение 8.2. *Векторное поле ζ_i инвариантно относительно $G_+^{(\infty)}$.*

Доказательство. Через $\bar{\xi}_r^{(\infty)}$, $r = 0, 1, 2$, обозначим ограничение векторного поля $\xi_r^{(\infty)}$ на $J^\infty\tau^i$. Принимая во внимание (8.2) и тождество $[\bar{D}_x, \bar{Э}_\psi] = 0$, справедливое для любого ψ, нетрудно убедиться, что $[\zeta_i, \ \bar{\xi}_r^{(\infty)}] = 0$, $r = 0, 1, 2$. Предложение доказано.

Пусть $I \in \mathcal{A}_i^k$. Через $\zeta_i(I)$ обозначим производную Ли функции I вдоль векторного поля ζ_i. Очевидно, что $\zeta_i(I) \in \mathcal{A}_i^{k+1}$.

Теорема 8.1. *Алгебра $\mathcal{A}_i$ порождена своими свободными образующими $\zeta_i^k(I_{i-m})$, $m = 0, 1, \ldots, i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где*

$$I_i = [2a_i a_i^{(2)} - ((2(n-i)+1)/(n-i))(a_i^{(1)})^2](a_i)^{-2(n-i+1)/(n-i)}, \tag{8.10}$$

$$I_{i-1} = [a_{i-1} - (i/2)a_i^{(1)}]\,|a_i|^{-(n-i+1)/(n-i)}, \tag{8.11}$$

$$I_{i-m} = \left[a_{i-m} + \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{r=n-i+1}^{n-i+m-1} \frac{(n-r)r}{(n-i)i} (a_i)^{1-m} (a_{i-1})^m + \right.$$

$$+\sum_{l=n-i+1}^{n-i+m-1}\frac{(-1)^{n-i+m-l}}{(n-i+m-l)!}\prod_{r=l}^{n-i+m-1}\frac{(n-r)r}{(n-i)i}(a_i)^{i-n+l-m}(a_{i-1})^{n-i+m-l}a_{n-l}\Bigg]\times$$

$$\times|a_i|^{-(n-i+m)/(n-i)},\quad 2\le m\le i. \tag{8.12}$$

Доказательство. Легко проверить, что функции I_{i-m} удовлетворяют уравнениям (8.5). Из (8.9)–(8.12) следует, что $\zeta_i^k(I_{i-m})$ – свободные образующие алгебры $\mathcal{A}_i$. Осталось показать, что эти образующие составляют полный набор образующих алгебры $\mathcal{A}_i$.

Для $i=0$ это немедленно следует из (8.6).

Для $i>0$ определим инвариант $J\in\mathcal{A}_i^1$ формулой $J=I_i+(4/i)\zeta_i(I_{i-1})\operatorname{sgn}a_i$. Очевидно, что семейство свободных образующих $J,I_{i-1},I_{i-2},\dots,I_0,\dots,\zeta_i^k(J),\zeta_i^k(I_{i-1}),\zeta_i^k(I_{i-2}),\dots$ $\dots,\zeta_i^k(I_0),\dots$ и исходное семейство образующих эквивалентны.

Теперь из (8.7) следует, что при $i=1$ набор образующих $I_{i-1},J;\zeta_i(I_{i-1}),\zeta_i(J);\dots;\zeta_i^k(I_{i-1})$, $\zeta_i^k(J);\dots$ является полным. При $i>1$ из (8.8) следует, что $I_{i-2},\dots,I_0;I_{i-1},J;\dots;\zeta_i^k(I_{i-2}),\dots$ $\dots,\zeta_i^k(I_0);\zeta_i^k(I_{i-1}),\zeta_i^k(J);\dots$ – полный набор образующих. Теорема доказана.

Предложение 8.3. *Для любого сечения S расслоения τ^i, $\dim\operatorname{Sym}S=1$ тогда и только тогда, когда $I_i(S),I_{i-1}(S),\dots,I_0(S)$ – константы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S – сечение расслоения τ^i, допускающее 1-мерную алгебру симметрий, ξ – симметрия сечения S, f_t – поток векторного поля ξ и $I\in\mathcal{A}_i^k$. Тогда $I(S)=I(f_t(S))=I(f_t(S))\circ f_t=I(S)\circ f_t$.

Достаточность. Пусть $S:x\mapsto(0,\dots,0,a_i(x),\dots,a_0(x))$ и инварианты $I_i(S),I_{i-1}(S),\dots$ $\dots,I_0(S)$ являются константами.

Предположим, что векторное поле $\varphi(x)\partial/\partial x\in\mathfrak{g}$ является симметрией сечения S. Тогда в силу следствия 7.1 это эквивалентно тому, что $\varphi(x)$ является решением системы (3.3), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varphi'''=0,\quad (n-i)a_i\varphi'+a_i'\varphi=0,\quad 2^{-1}(n-j-1)(j+1)a_{j+1}\varphi''+(n-j)a_j\varphi'+a_j'\varphi=0, \tag{8.13}$$

где $j=i-1,i-2,\dots,0$. Из второго уравнения этой системы следует, что $\varphi=C|a_i|^{-1/(n-i)}$, $C\in\mathbb{R}$.

Из тождеств $dI_m(S)/dx\equiv0$, $m=i,i-1,\dots,0$, прямым вычислением можно убедиться, что функция $|a_i|^{-1/(n-i)}$ удовлетворяет всем уравнениям системы (8.13). Таким образом, векторное поле $|a_i|^{-1/(n-i)}\partial/\partial x$ – симметрия сечения S.

Следствие 8.3. *Для любого сечения S расслоения τ^i, $\dim\operatorname{Sym}S=1$ тогда и только тогда, когда $I(S)$ – константа для всякого $I\in\mathcal{A}_i$.*

§ 9. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У. С $n+1$-МЕРНЫМИ АЛГЕБРАМИ СИММЕТРИЙ

9.1. Регулярные ростки. Пусть S – сечение расслоения π, p – точка из области определения S и f – преобразование Лагерра–Форсайта для S, определенное в некоторой окрестности точки p. Точку p назовем точкой класса i для сечения S (для уравнения $\mathcal{E}_S$), если найдутся такие окрестность U' точки $f(p)$ и подрасслоение E_i расслоения τ, что $\operatorname{Im}f(S)|_{U'}\subset E_i$. Очевидно, что это определение корректно. Сечение S назовем сечением класса i, если каждая точка области определения S является точкой класса i.

Пусть S – сечение класса i, $\dim\operatorname{Pnt}\mathcal{E}_S=n+1$, f – преобразование Лагерра–Форсайта для S и $I_i,I_{i-1},\dots,I_0$ – образующие алгебры скалярных дифференциальных инвариантов $\mathcal{A}_i$, определенных в теореме 8.1. Рассмотрим функции $I_i(S'),I_{i-1}(S'),\dots,I_0(S')$ в $\mathbb{R}^1$, где $S'=f(S)$. Из $\dim\operatorname{Pnt}\mathcal{E}_S=n+1$ имеем, что $\dim\operatorname{Pnt}\mathcal{E}'=n+1$. Из предложения 8.3 следует существование такого числа j, $i\le j\le 0$, что функция $I_j(S')$ не является константой. Точку p из области определения S назовем регулярной точкой сечения S (уравнения $\mathcal{E}_S$), если $dI_j(S')|_{f(p)}\ne0$. Очевидно, что множество всех регулярных точек сечения S является всюду плотным подмножеством области определения этого сечения.

Росток сечения расслоения π в регулярной точке класса i будем называть регулярным ростком класса i.

Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_i$, $i = n-3, n-4, \ldots, 0$, – множество регулярных ростков $\{S\}_0$ класса i. Тогда $\tilde{\mathcal{F}}_i$ инвариантно относительно Γ_0.

9.2. Классификация регулярных ростков. Пусть $\{S\}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_i$ и f – преобразование Лагерра–Форсайта для S, $S' = f(S)$ и $p = f(0)$. Пусть $m = \max\{j \in \{i, i-1, \ldots, 0\} \mid dI_j(S')|_p \neq 0\}$. Из (8.4) следует, что число m является инвариантом действия псевдогруппы Γ.

Из $dI_m(S')|_p \neq 0$ вытекает существование такой окрестности U точки p, что $I_m(S')|_U \in \Gamma$. Пусть $\tilde{f} = I_m(S')|_U - I_m(S')(p)$. Очевидно, $\tilde{f} \in \Gamma$. Нам будет удобно представлять функцию $\tilde{f}$ в виде $\tilde{f} = R_{I_m(S')(p)} \circ I_m(S')|_U$, где функция $R_a : x \mapsto x - a$.

Росток $\{\tilde{f}(S')\}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_i$ назовем канонической формой ростка $\{S\}_0$. В частности, корректность определения канонической формы ростка $\{S\}_0$ утверждает

Теорема 9.1. *Пусть* $\{S_1\}_0, \{S_2\}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_i$. *Тогда* $\{S_1\}_0$ *и* $\{S_2\}_0$ *эквивалентны, если и только если их канонические формы совпадают.*

Доказательство. Пусть $\{S_1\}_0$ и $\{S_2\}_0$ эквивалентны. Это значит, что существует такое $g \in \Gamma_0$, что $\{g(S_1)\}_0 = \{S_2\}_0$. Пусть f_1 и f_2 – преобразования Лагерра–Форсайта в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^1$ для S_1 и S_2 соответственно, пусть $S_1' = f_1(S_1)$ и $S_2' = f_2(S_2)$, и наконец, пусть $p_1 = f_1(0)$ и $p_2 = f_2(0)$. Тогда в некоторой окрестности точки p_2 имеем $\tilde{f}_2 = I_m(S_2') - I_m(S_2')(p_2) = I_m((f_2 \circ g \circ f_1^{-1})(S_1')) - I_m((f_2 \circ g \circ f_1^{-1})(S_1'))(p_2) = I_m(S_1') \circ (f_1 \circ g^{-1} \circ$ $\circ f_2^{-1}) - I_m(S_1')(p_1) = R_{I_m(S_1')(p_1)} \circ I_m(S_1') \circ (f_1 \circ g^{-1} \circ f_2^{-1})$. Следовательно, в соответствующей окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^1$ $\tilde{f}_2(S_2') = R_{I_m(S_1')(p_1)} \circ I_m(S_1') \circ (f_1 \circ g^{-1} \circ f_2^{-1})((f_2 \circ g \circ f_1^{-1})(S_1')) =$ $= (R_{I_m(S_1')(p_1)} \circ I_m(S_1'))(S_1') = \tilde{f}_1(S_1')$.

Необходимость очевидна. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{F}_i$ – множество канонических форм всех ростков из $\tilde{\mathcal{F}}_i$ и пусть $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{n-3} \mathcal{F}_i$.

Из сказанного вытекает следующая классификация с точностью до эквивалентности в окрестности регулярной точки всех линейных о.д.у. порядка $n \geq 3$ с $n+1$-мерными алгебрами точечных симметрий.

Теорема 9.2. *1) Всякий регулярный росток сечения расслоения* π *эквивалентен некоторому ростку из* $\mathcal{F}$.

2) Любые два ростка из $\mathcal{F}$ *не эквивалентны.*

Автор благодарен В.А. Константинову за поддержку и внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юмагужин В.А.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т 38. № 8. С. 1063–1070.
2. *Wilczynski E.J.* Projective differential geometry of curves and ruled surfaces / Teubner B.G. Leipzig, 1906.
3. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. Виноградов А.М., Красильщик И.С. М., 1997.
4. *Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1988. Т. 28.

Институт программных систем РАН,
г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию
31.01.2002 г.