Труды по дискретной математике
Том 8, с. 240–252
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ И СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАТРИЦ. II

В. Н. САЧКОВ

Для случайных независимых и равновероятных преобразований $n$-множества $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ и соответствующих им элементарных матриц $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ для случайной матрицы $A = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m$ при $n \to \infty$ и некоторых функциях $m = m(n)$ получены асимптотические выражения для вероятности неразложимости, вероятности примитивности, вероятности вполне неразложимости матрицы $A$. Эти вероятности позволяют оценить вероятности эргодичности простых однородных и неоднородных цепей Маркова произвольных, вообще говоря, неподстановочных вероятностных преобразователей. Для подстановочных преобразователей такая оценка получена в работе [1].

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ — преобразования множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Gamma(\sigma_1), \Gamma(\sigma_2), \dots, \Gamma(\sigma_m)$ — соответствующие этим преобразованиям ориентированные графы и $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ — матрицы смежности этих графов, называемые обычно элементарными матрицами. В соответствии с определением работы [1], вероятностный преобразователь представляет собой семейство конечных автоматов без выхода, преобразующих случайную входную последовательность $\{x^{(t)}\}$, $t = 1, 2, \dots$, в последовательность состояний $\{y^{(t)}\}$, $t = 1, 2, \dots$

Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — входной алфавит, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ — множество состояний, $\{f_t\}$ — семейство функций перехода автоматов и $\sigma_1^{(t)}, \sigma_2^{(t)}, \dots, \sigma_m^{(t)}$ — совокупность преобразований множества $Y$, то при $x^{(t-1)} = x_k$ функция $f_t$ осуществляет преобразование $\sigma_k^{(t)}$ множества $Y$, $t = 1, 2, \dots$ Если $\{x^{(t)}\}$ — последовательность результатов независимых испытаний и вероятность того, что $x^{(t)} = x_k$ равна $\alpha_k^{(t)} > 0$, то

$$\alpha_1^{(t)} + \alpha_2^{(t)} + \ldots + \alpha_m^{(t)} = 1, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

и последовательность состояний образует простую, вообще говоря, неоднородную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$P_t = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(t)} \theta_k^{(t)}, \tag{1.1}$$

где $\theta_k^{(t)}$ — элементарная матрица, соответствующая преобразованию $\sigma_k^{(t)}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $t = 1, 2, \ldots$ Вероятностный преобразователь называется эргодическим, если соответствующая ему цепь Маркова эргодическая.

Если $\sigma_k^{(t)} = s_k^{(t)}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, где $s_k^{(t)}$ — подстановка степени $n$, то вероятностный преобразователь называется подстановочным. Условия эргодичности подстановочного преобразователя были изучены в работе [1], где даны оценки вероятностей неразложимости, примитивности и вполне неразложимости матриц переходных вероятностей $P_t$ при случайном, независимом и равновероятном выборе подстановок $s_1^{(t)}, s_2^{(t)}, \ldots, s_m^{(t)}$.

Очевидно, что матрица $P_t$ обладает свойствами неразложимости, примитивности и вполне неразложимости тогда и только тогда, когда этими свойствами обладает матрица

$$A_t = \theta_1^{(t)} + \theta_2^{(t)} + \ldots + \theta_m^{(t)}, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Поэтому при случайном независимом и равновероятном выборе $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_m$ вероятности наличия указанных свойств совпадают с соответствующими вероятностями выполнения этих свойств для матрицы

$$A = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m, \tag{1.3}$$

где $\theta_k$ — элементарная матрица, отвечающая $\sigma_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Если $P_n^{(m)}$, $P(m, n)$, $P_{mn}$ — вероятности неразложимости, примитивности и вполне разложимости матрицы $A$ соответственно, то при случайном выборе $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ для подстановок $\sigma_k = s_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, в работе [1] установлено, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &P_n^{(m)} \to 1, && m \geqslant 2, \\ &P(m, n) \to 1, && m \geqslant 2, \\ &P_{mn} \to 1, && m \geqslant 3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для произвольных случайных преобразований $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ при $n \to \infty$ при любых ограничениях $m$ соответствующие вероятности стремятся к нулю. Поэтому основной результат данной работы состоит в определении видов функции $m = m(n)$, для которых соответствующие вероятности имели бы при $n \to \infty$ ненулевые предельные значения.

В § 2 установлено, что если $m = \ln n + \gamma_n$, $\gamma_n = o(\ln n)$ и $n \to \infty$, то события, состоящие в неразложимости случайной матрицы $A$ и отсутствии в этой матрице нулевых столбцов, в пределе имеют одну и ту же вероятность, которая равна $e^{-e^{-\gamma}}$ при $\gamma_n \to \gamma$ и 1 при $\gamma_n \to \infty$.

В § 3 показано, что при $m = \ln n + \gamma_n$ и $n \to \infty$ вероятность примитивности случайной матрицы $A$ имеет те же самые предельные выражения, что и вероятность неразложимости. Отсюда в качестве следствия получены предельные выражения для вероятности эргодичности однородной цепи Маркова для произвольного, вообще говоря, неподстановочного вероятностного преобразователя.

Одинаковая предельная вероятность события, состоящего в отсутствии нулевых столбцов в матрице $A$, и событий, связанных с ее неразложимостью и примитивностью, совпадает с предельной вероятностью того, что в мультиграфе $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$, полученном суперпозицией графов $\Gamma(\sigma_1), \Gamma(\sigma_2), \ldots, \Gamma(\sigma_m)$, отсутствуют начальные вершины.

В § 4 показано, что если $m = \ln n + \ln\ln n + \delta_n$, $\delta_n = o(\ln\ln n)$ и $n \to \infty$, то события, состоящие в том, что случайная матрица $A$ вполне неразложима и что матрица $A$ не имеет столбцов с одной положительной координатой, имеют одну и ту же вероятность $e^{-e^{-\delta}}$ при $\delta_n \to \delta < \infty$ и 1 при $\delta_n \to \infty$.

В соответствии с результатами статьи [1] класс вполне неразложимых матриц удовлетворяет условию марковости. Вместе с ограничениями на положительные элементы матриц переходных вероятностей свойство марковости обеспечивает достаточные условия эргодичности неоднородной цепи Маркова, отвечающей соответствующему вероятностному преобразователю.

## § 2. ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЦЫ

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ — система случайных независимых и равновероятностных преобразований множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ — соответствующие преобразованиям элементарные матрицы и

$$A = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m$$

— матрица, полученная сложением в кольце целых чисел матриц $\theta_1, \theta_2, \ldots$ $\ldots, \theta_m$. Обозначим через $P_n^{(m)}$ вероятность того, что случайная матрица $A$ неразложима. Основное содержание данного параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $m = m(n) = \ln n + \gamma_n + o(1)$, *где* $\gamma_n = o(\ln n)$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место следующие предельные соотношения*:

$$P_n^{(m)} \to \begin{cases} e^{-e^{-\gamma}}, & \text{если } \gamma_n \to \gamma < \infty, \\ 1, & \text{если } \gamma_n \to \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 представим вероятность $P_n^{(m)}$ в виде разности

$$P_n^{(m)} = P_{n0}^{(m)} - Q_n^{(m)}, \tag{2.2}$$

где $P_{n0}^{(m)}$ — вероятность того, что случайная матрица $A$ не имеет нулевых столбцов и $Q_n^{(m)}$ — вероятность того, что матрица $A$ разложима, но не имеет нулевых столбцов.

Обозначим через $\xi_{mn}(s)$ случайную величину, равную количеству столбцов случайной матрицы, в которых сумма элементов равна $s$. Случайную величину $\xi_{mn}(s)$ можно рассматривать как число элементов некоммутативного несимметричного $n$-базиса, которые встретились ровно $s$ раз в случайной $mn$-выборке. С учетом этого имеет место следующая лемма, которая является несложной модификацией теоремы 3.1, приведенной в книге [2, с. 122] и имеющей также очевидную интерпретацию в классической схеме размещения [3].

Лемма 1. *Пусть* $m = \ln n + s \ln\ln n + \gamma_n + o(1)$, *где* $\gamma_n = o(\ln n)$ *при* $s = 0$, $\gamma_n = o(\ln\ln n)$ *при* $s > 0$ *и* $s < \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$:

а) *если* $\gamma_n \to \gamma$, *то* $\xi_{mn}(s)$ *имеет в пределе распределение Пуассона с параметром* $\lambda = \dfrac{1}{s!} e^{-\gamma}$;

б) *если* $\gamma_n \to \infty$, *то* $\mathbf{P}(\xi_{mn}(s) = 0) \to 1$.

Доказательство леммы следует из известной формулы для биномиальных моментов $\xi_{mn}(s)$ (см. [2]), имеющей следующее асимптотическое представление:

$$B_k^{(s)}(m, n) = \frac{1}{k!}\left(\frac{nm^s e^{-m}}{s!}\right)^k \left(1 + O\left(\frac{m}{n}\right)\right). \tag{2.3}$$

Так как $\xi_{mn} = \xi_{mn}(0)$, то из леммы 1 получаем следствие 1.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *и* $n \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$P_n^{(m)} \to \begin{cases} e^{-e^{-\gamma}}, & \text{если } \gamma_n \to \gamma < \infty, \\ 1, & \text{если } \gamma_n \to \infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

Перейдем теперь к оценке вероятности $Q_n^{(m)}$. Разложимую матрицу $A$, не имеющую нулевых столбцов, некоторой одинаковой перестановкой строк и столбцов можно привести к следующему виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $A_1$ и $A_2$ — квадратные матрицы порядков $s$ и $(n-s)$ соответственно и 0 — нулевая матрица.

Представим вероятность $Q_n^{(m)}$ в виде суммы

$$Q_n^{(m)} = Q_n^{(m)}(1) + Q_n^{(m)}(2), \tag{2.6}$$

где $Q_n^{(m)}(1)$ и $Q_n^{(m)}(2)$ — вероятности разложимости матрицы $A$ при условии, что в ее представлении вида (2.5) порядок матрицы $A_1$ заключен в пределах $1 \leqslant s \leqslant [n/2]$ и $[n/2]+1 \leqslant s \leqslant n-1$ соответственно.

Оценим сначала вероятность $Q_n^{(m)}(1)$. Матрица $A_1$ в (2.5) не содержит нулевых столбцов, поэтому в каждом столбце $A_1$ имеется, по крайней мере, один положительный элемент.

Выберем $s^s$ способами расположения $s$ элементов по одному в каждом столбце. Если эти положительные элементы расположены в $t$ строках, $1 \leqslant t \leqslant s$, то $N(A_1, A_3)$ — число способов построения матриц $A_1$ и $A_3$ — оценивается следующим образом:

$$N(A_1, A_3) \leqslant s^s n^{m(s-t)} \prod_{i=1}^{t} \sum_{v_i=k_i}^{m} \binom{m}{v_i} \Delta^{k_i} 0^{v_i} (n-k_i)^{m-v_i}. \tag{2.7}$$

Для достаточно больших $n$ с учетом порядка роста $m$ в соответствии с условиями теоремы имеем

$$N(A_1, A_3) \leqslant s^s m^{2s} n^{(m-1)s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{2.8}$$

Число способов построения матрицы $A_2$ оценивается следующим образом:

$$N(A_2) \leqslant (n-s)^{m(n-s)}. \tag{2.9}$$

Из оценок (2.8) и (2.9) следует, что

$$Q_n^{(m)}(1) \leqslant \sum_{s=1}^{[n/2]} \binom{n}{s} \left(\frac{m^2 s}{n}\right) \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{m(n-s)}. \tag{2.10}$$

Используя формулу Стирлинга для оценки $s!$ и проводя очевидные преобразования правой части (2.10), получаем

$$Q_n^{(m)}(1) \leqslant \sum_{s=1}^{[n/2]} \left(em^2 e^{m/2}\right)^s. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что для достаточно больших $m$

$$Q_n^{(m)}(1) \leqslant \frac{em^2 e^{-m/2}}{1 - eme^{-m/2}}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) получаем окончательную оценку, определяющую порядок стремления к нулю $Q_n^{(m)}(1)$ при $n \to \infty$:

$$Q_n^{(m)}(1) = O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.13}$$

Оценим теперь вероятность $Q_n^{(m)}(2)$. Оказывается, что в этом случае достаточно применить грубую оценку

$$Q_n^{(m)}(2) \leqslant \sum_{s=[n/2]+1}^{n-1} \binom{n}{s} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{m(n-s)}. \tag{2.14}$$

Проводя замену переменной суммирования $s^1 = n - s$ и применяя формулу Стирлинга для оценки $s!$, получаем

$$Q_n^{(m)}(2) \leqslant \sum_{s=1}^{[n/2]} \left(e\left(\frac{s}{n}\right)^{m-1}\right)^s. \tag{2.15}$$

Отсюда для достаточно больших $m$ следует оценка

$$Q_n^{(m)}(2) \leqslant \frac{e/2^{m-1}}{1 - e/2^{m-1}}. \tag{2.16}$$

Из этой оценки находим порядок стремления к нулю при $n \to \infty$ для вероятности $Q_n^{(m)}(2)$:

$$Q_n^{(m)}(2) = O\left(\frac{1}{n^{\ln 2}}\right). \tag{2.17}$$

Из соотношений (2.13) и (2.17) и равенства (2.6) вытекает, что при выполнении теоремы 1 при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$Q_n^{(m)} \to 0. \tag{2.18}$$

Из равенства (2.2), соотношений (2.4) и (2.18) вытекает справедливость теоремы 1.

## § 3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРИМИТИВНОСТИ МАТРИЦЫ

Для выполнения условия примитивности неразложимой матрицы $A$ достаточно, чтобы хотя бы один из графов $\Gamma(\sigma_1), \Gamma(\sigma_2), \ldots, \Gamma(\sigma_m)$ имел, по крайней мере, одну петлю. Для системы случайных независимых и равновероятных преобразований $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ вероятность того, что хотя бы один из графов $\Gamma(\sigma_1), \Gamma(\sigma_2), \ldots, \Gamma(\sigma_m)$ имеет петлю равна

$$\widetilde{P}_n^{(m)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{mn}. \tag{3.1}$$

Если величина $m$ при $n \to \infty$ определяется условиями теоремы 1, то

$$\widetilde{P}_n^{(m)} = 1 - \frac{e^{-\gamma_n}}{n}(1 + O(1)). \tag{3.2}$$

ТЕОРЕМА 2. *При $m = \ln n + \gamma_n$, $\gamma_n = o(\ln n)$ и $n \to \infty$ при случайном независимом и равновероятном выборе преобразований $n$-множества $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ вероятность примитивности соответствующей матрицы $A = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m$ удовлетворяет соотношениям*

$$P(m, n) \to \begin{cases} e^{-e^{-\gamma}}, & \text{если } \gamma_n \to \gamma < \infty, \\ 1, & \text{если } \gamma_n \to \infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

Действительно, из очевидных неравенств

$$\widetilde{P}_n^{(m)} + P_n^{(m)} - 1 \leqslant P(m, n) \leqslant P_n^{(m)}, \tag{3.4}$$

используя соотношения (3.2) и (2.1), получаем соотношение (3.3).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для случайного независимого и равновероятного выбора преобразований $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ вероятность эргодичности простой однородной цепи Маркова вероятностного преобразователя с матрицей переходных вероятностей*

$$P = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \theta_k, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1,$$

*при $n \to \infty$ и выполнении условий теоремы 2 определяется предельными соотношениями* (3.3).

Систему преобразований $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ будем называть замкнутой, если соответствующий мультиграф $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$, полученный суперпозицией графов $\Gamma(\sigma_1), \Gamma(\sigma_2), \ldots, \Gamma(\sigma_m)$, не имеет начальных вершин, т. е. вершин, в которые не заходят никакие дуги. Ясно, что для неразложимости и примитивности матрицы $A$ необходима замкнутость системы

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. С другой стороны, система $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ замкнута тогда и только тогда, когда $A$ не содержит нулевых столбцов. В соответствии с теоремой 1, следствием 1 и теоремой 2 вероятности неразложимости и примитивности матрицы $A$ асимптотически совпадают с вероятностью того, что матрица $A$ не имеет нулевых столбцов и, следовательно, система $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ замкнута.

## § 4. ВЕРОЯТНОСТЬ ВПОЛНЕ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЦЫ

Неотрицательная матрица $A$ порядка $n$ называется частично разложимой, если она содержит нулевую подматрицу размера $(n-s) \times s$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Матрица $A$ порядка $n$ называется вполне неразложимой, если она не является частично разложимой.

Частично разложимую матрицу перестановкой строк и столбцов можно привести к виду, указанному в (2.5), где нулевая подматрица расположена в первых $s$ столбцах и последних $n-s$ строках.

Столбец неотрицательной матрицы $A$ называется единичным, если он имеет единственный положительный элемент, а остальные элементы равны нулю. Если матрица $A$ имеет единичные столбцы, то она является частично разложимой.

Для системы случайных независимых и равновероятных преобразований $n$-множества $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ с соответствующими элементарными матрицами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ рассмотрим случайную величину $\eta_{mn}$, равную числу единичных столбцов в матрице $A = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m$. В отличие от распределения $\xi_{mn}$ точное распределение $\eta_{mn}$ по понятной причине не удается выразить через распределение $\xi_{mn}(s)$. Поэтому докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Вероятностное распределение случайной величины $\eta_{mn}$ имеет следующий вид*:

$$\mathbf{P}(\eta_{mn} = r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} B_k(m,n), \qquad r = 0, 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

*где $B_k(m,n)$ — биномиальные моменты $\eta_{mn}$, определяемые формулой*

$$B_k(m,n) = \frac{\binom{n}{k}}{n^{mn}} \sum_{t=1}^{k} \binom{n}{t} (n-k)^{m(n-t)} \times$$
$$\times \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_t=k \\ k_i \geqslant 1}} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_t!} \prod_{i=1}^{t} \sum_{v_i=k_i}^{m} \binom{m}{v_i} \Delta^{k_i} 0^{v_i} (n-k)^{m-v_i}, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{4.2}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (4.2) используем известное равенство

$$B_k(m,n) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.3}$$

где $A_j$ — событие, состоящее в том, что $j$-й столбец матрицы $A$ единичный.

Числом способов, равным $\binom{n}{k}$, выбираем $k$ столбцов, которые являются единичными. Далее, $\binom{n}{t}$ способами выбираем строки, в которых расположены $k$ положительных элементов этих столбцов.

Полиномиальный коэффициент $k!\,(k_1!\,k_2!\ldots k_t!)^{-1}$ определяет распределение $k$ положительных элементов единичных столбцов по $t$ строкам, $1 \leqslant t \leqslant k$, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_t = k$, $k_i \geqslant 1$. Произведение

$$\binom{m}{v_i} \Delta^{k_i} 0^v \,(n-k)^{m-v_i}$$

определяет число способов, которыми $v_i$ преобразований из совокупности $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ имеют множество образов элемента $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, покрывающее множество номеров $i$-й строки, соответствующее $k_i$ положительным элементам. Наконец, $(n-k)^{m(n-t)}$ есть число способов выбора образов преобразований $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ для элементов, соответствующих строкам, не входящим в $t$ выбранных. Беря соответствующее произведение и проводя необходимые суммирования, после деления на $n^{mn}$ получаем формулу (4.2).

Формула (4.1) получается в результате использования метода включения-исключения.

Предельное распределение $\eta_{mn}$ при $n \to \infty$ описывается следующей леммой.

Лемма 3. *Пусть $m = m(n)$ и при $n \to \infty$ выполнено условие*

$$m = \ln n + \ln\ln n + \delta_n + o(1), \tag{4.4}$$

*где $\delta_n = o(\ln\ln n)$. Тогда*

а) *если $\delta_n \to \delta < \infty$, то случайная величина $\eta_{mn}$ в пределе имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = e^{-\delta}$.*

б) *если $\delta_n \to \infty$, то предельное распределение $\eta_{mn}$ — вырожденное и при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(\eta_{mn} = 0) \to 1. \tag{4.5}$$

Доказательство. Так как $1 \leqslant t \leqslant k$, $1 \leqslant k_i \leqslant v_i \leqslant m$, $i = 1, 2, \ldots, t$, то для любого $k$ при достаточно больших $m$ в соответствии с условиями теоремы имеем:

$$\prod_{i=1}^{t} \sum_{v_i=k_i}^{m} \binom{m}{v_i} \Delta^{k_i} 0^{v_i} (n-k)^{m-v_i} = (n-k)^{mt-k} m^k \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right). \tag{4.6}$$

С учетом известного равенства

$$\Delta^{k_i} 0^{v_i} = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_t=k \\ k_i \geqslant 1}} \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_t!} \tag{4.7}$$

из формулы (4.2) находим, что

$$B_k(m,n) = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{mn} \left(\frac{m}{n}\right)^k \sum_{k=1}^{k} \binom{n}{t} \Delta^t 0^k \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Отсюда следует асимптотика

$$B_k(m,n) = (mne^{-m})^k \frac{1}{k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

из которой в силу условия (4.4) леммы 3 получаем, что

$$B_k(m,n) = \frac{1}{k!} e^{-\delta_n k} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{4.8}$$

Следовательно, при выполнении условия (4.4) леммы 3, если $\delta_n \to \delta < \infty$, то

$$B_k(m,n) = \frac{1}{k!} (e^{-\delta})^k, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

т. е. случайная величина $\eta_{mn}$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\lambda = e^{-\delta}$.

Если $\delta_n \to \infty$, то из соотношения (4.8) следует соотношение (4.5).

Из леммы 1 и леммы 3 следует, что при $n \to \infty$ и одинаковом росте $m = m(n)$ предельные распределения $\eta_{mn}$ и $\xi_{mn}(1)$ совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 3. *При выполнении условий леммы 3 в соответствии с теоремой 1 при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(\xi_{mn} = 0) \to 1,$$

*т. е. для достаточно больших $n$ с вероятностью, стремящейся к единице, в матрице $A$ отсутствуют нулевые столбцы.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *При выполнении условий леммы 3, если $n \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}(\eta_{mn} = 0) \to \begin{cases} e^{-e^{-\delta}}, & \delta_n \to \delta < \infty, \\ 1, & \delta_n \to \infty. \end{cases} \tag{4.9}$$

Для системы случайных независимых и равновероятных преобразований $n$-множества $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ обозначим через $P_{mn}$ вероятность вполне неразложимости матрицы $A = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m$. Основное содержание данного параграфа заключается в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $m = m(n) = \ln n + \ln\ln n + \delta_n$, где $\delta_n = o(\ln\ln n)$. Тогда при $n \to \infty$ имеют место следующие предельные соотношения:*

$$P_{mn} \to \begin{cases} e^{-e^{-\delta}}, & \delta_n \to \delta < \infty, \\ 1, & \delta_n \to \infty. \end{cases} \tag{4.10}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 используем следующее равенство

$$P_{mn} = \mathbf{P}(\eta_{m,n} = 0) - Q_{mn}, \tag{4.11}$$

где $Q_{mn}$ — вероятность того, что матрица $A$ частично разложима, но не имеет единичных столбцов. Вероятность $Q_{mn}$ представим в виде суммы

$$Q_{mn} = Q_{mn}^{(1)} + Q_{mn}^{(2)}, \tag{4.12}$$

где $Q_{mn}^{(1)}$ и $Q_{mn}^{(2)}$ — вероятности того, что матрица $A$ частично разложима и имеет нулевые подматрицы $s \times (n-s)$ для $2 \leqslant s \leqslant [n/2]$ и $[n/2] \leqslant s \leqslant n-1$ соответственно, причем в обоих случаях в матрице $A$ отсутствуют единичные столбцы.

Для $Q_{mn}^{(2)}$ получаем следующую очевидную оценку:

$$Q_{mn}^{(2)} \leqslant \sum_{s=[n/2]}^{n-1} \binom{n}{s}^2 \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{m(n-s)},$$

из которой после замены переменной суммирования $s' = n - s$ следует, что

$$Q_{mn}^{(2)} \leqslant \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{s^{2s}}{(s!)^2} \left(\frac{s}{n}\right)^{(m-2)s}.$$

Применяя формулу Стирлинга для оценки $s!$, получаем, что

$$Q_{mn}^{(2)} \leqslant \sum_{s=1}^{[n/2]} \left(\frac{e^2}{2^{m-2}}\right)^s.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $m$

$$Q_{mn}^{(2)} \leqslant \frac{e^2/2^{m-2}}{1 - e^2/2^{m-2}}. \tag{4.13}$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$Q^{(2)}_{mn} = O\left(\frac{1}{(n\ln n)^{\ln 2}}\right). \tag{4.14}$$

Оценим теперь вероятность $Q^{(1)}_{mn}$.

Пусть $A$ — частично разложимая матрица, не имеющая единичных столбцов. Перестановкой строк и столбцов матрица $A$ может быть приведена к виду (2.5), где нулевая матрица имеет $s$ столбцов и $n-s$ строк, причем $2 \leqslant s < n/2$. Подматрица $A_2$ в каждом столбце имеет не менее двух положительных элементов, так как $A$ не содержит единичных столбцов.

Дадим оценку числа матриц $A$, удовлетворяющих указанным свойствам. Число способов выбора расположений для $2s$ таких положительных элементов, что в каждом столбце матрицы $A$ имеется по два положительных элемента, равно $\binom{s}{2}^2$. При фиксированном расположении этих положительных элементов число способов построения матриц $A_1$ и $A_3$ равно

$$N(A_1, A_3) = n^{m(s-t)} \prod_{i=1}^{t} \sum_{v_i=k_i}^{m} \binom{m}{v_i} \Delta^{k_i} 0^{v_i} (n-k_i)^{m-v_i}, \tag{4.15}$$

где $k_i$ — число указанных положительных элементов в $i$-й строке матрицы $A_1$, $1 \leqslant i \leqslant t$, и $t$ — число строк, в которых располагаются эти элементы. Из равенства (4.15) при $n \to \infty$ и выполнении условий теоремы 3 для достаточно больших $n$ с учетом того, что $2 \leqslant t \leqslant s$, имеем:

$$N(A_1, A_3) \leqslant m^{3s} n^{(m-2)s}. \tag{4.16}$$

Так как число способов построения матрицы $A_2$ равно $(n-s)^{m(n-s)}$, то из неравенства (4.16) следует оценка

$$Q^{(2)}_{mn} \leqslant \sum_{s=2}^{n/2-1} \binom{n}{s}^2 \binom{s}{2}^s \left(\frac{m^3}{n^2}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{m(n-s)}. \tag{4.17}$$

Из неравенства (4.17) для достаточно больших $n$ имеем:

$$Q^{(2)}_{mn} \leqslant \sum_{s=2}^{n/2-1} \left(\frac{e^2 m}{2} e^{-m/2}\right)^s.$$

Отсюда для достаточно больших $n$ следует оценка

$$Q^{(2)}_{mn} \leqslant \frac{e^4 m^2 e^{-m/4}}{1 - e^2 m e^{-m/2}/2}, \tag{4.18}$$

из которой при выполнении условий теоремы получаем, что при $n \to \infty$

$$Q^{(2)}_{mn} = O\left(\frac{(\ln n)^{7/4}}{n^{1/4}}\right). \tag{4.19}$$

Из равенства (4.11), леммы 3, равенства (4.12) и асимптотических оценок (4.14) и (4.19) вытекает справедливость теоремы 3.

В работе [1] определены достаточные условия эргодичности неоднородной цепи Маркова произвольного, вообще говоря, неподстановочного преобразователя. Эти условия состоят в следующем:

а) матрицы переходных вероятностей принадлежат к классу вполне неразложимых матриц;

б) минимальные элементы этих матриц ограничены снизу положительной постоянной.

Для случайных независимых и равновероятных преобразований $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ теорема 3 при выполнении условия б) дает асимптотическую при $n \to \infty$ оценку вероятности эргодичности произвольного вероятностного преобразователя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Сачков В. Н.* Вероятностные преобразователи и правильные мультиграфы. I. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 1. — М.: ТВП, 1997, с. 227–250.
2. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.
3. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1976.