



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. M. Ivochkina, O. A. Ladyzhenskaya, Parabolic equations generated by symmetric functions of the eigenvalues of the Hessian or by the principal curvatures of a surface. I. Parabolic Monge-Ampère equations, *Algebra i Analiz*, 1994, Volume 6, Issue 3, 141–160

<https://www.mathnet.ru/eng/aa456>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

April 29, 2025, 08:31:44



**О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ
СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ГЕССИАНА ИЛИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ ИСКОМОЙ ПОВЕРХНОСТИ.
ЧАСТЬ I: ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МОНЖА АМПЕРА**

Н. М. Ивочкина, О. А. Ладыженская

В работе доказана глобальная однозначная разрешимость уравнения $-u_t + (\det u_{xx})^{1/n} = g$, $(x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T]$ при начально-краевых условиях $u(x, 0) = \varphi(x, 0)$ для $x \in \Omega$; $u(x, t) = \varphi(x, t)$ для $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$, если g и φ суть достаточно гладкие функции, удовлетворяющие необходимым условиям согласования, $\varphi(x, 0)$ — строго выпукла в $\bar{\Omega}$, а Ω — выпуклая область с достаточно гладкой границей и если выполнено любое из двух условий

$$\min g + \min_{Q_T} \left\{ \min_{(x,t) \in \partial' Q_T} \varphi_t(x, t) \right\} - \frac{1}{2} a d^2 > 0,$$

где $\partial' Q_T$ — боковая поверхность цилиндра Q_T вместе с нижним основанием, d есть радиус наименьшего шара, содержащего Ω , а $a = \max\{0; \max_{Q_T} g_t\}$, или

$$\min_{(x,t) \in \partial' Q_T} \{ \varphi_t(x, t) + g(x, t) \} > 0,$$

причем матрицы $g_{xx}(x, t)$, $((\det \varphi_{xx}(x, 0))^{1/n})_{xx}$, $(x, t) \in Q_T$, неположительны.

В последнем параграфе дано сравнительно простое доказательство предложения общего характера о гёльдеровости некоторого семейства функции. Из этого предложения следуют оценки констант Гёльдера для $u_{x_i x_j}$ в Q_T .

Введение

В данной работе мы исследуем вопрос о глобальной однозначной разрешимости уравнений

$$M[u] \equiv -u_t + F(u_{xx}) = g, \quad F(u_{xx}) = (\det u_{xx})^{1/n}, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

в классах гладких функций при начально-краевом условии

$$(u - \varphi)|_{\partial' Q_T} = 0, \quad \partial' Q_T = \partial'' Q_T \cup \Omega_0, \quad (2)$$

где

$$\partial'' Q_T = \{ (x, t) \mid x \in \partial\Omega, t \in [0, T] \}, \quad \Omega_0 = \{ (x, t) \mid x \in \bar{\Omega}, t = 0 \}.$$

Здесь u_{xx} есть Гессин функции u , т.е. матрица $(u_{x_i x_j})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Область Ω предполагается строго выпуклой, а ее граница $\partial\Omega$ равно, как и функции g и φ , считаются достаточно гладкими. Для упрощения формулировок будем считать, что

$$M[\varphi](x, 0) = g(x, 0), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2')$$

Мы используем следующие обозначения: $\mathcal{H}^{2l+\alpha} \equiv H^{2l+\alpha, l+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\alpha \in (0, 1)$, $l \in \mathbb{N}^+$ — пространства Гёльдера (см. [1]); $C^{l, k}(Q_T)$ — пространство непрерывных в Q_T функций u , имеющих непрерывные в Q_T производные $D_x^i u$, $i \leq l$, $D_t^j u$, $j \leq k$.

Обозначим через K класс функций из $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, являющихся строго выпуклыми по $x \in \bar{\Omega}$ при любом $t \in [0, T]$. Пересечение K с $\mathcal{H}^{2l+\alpha}$ будем обозначать $K^{2l+\alpha}$, а $K \cap C^{2l, l}(\bar{Q}_T) \equiv K^{2l}$.

Тип уравнения (1) зависит от функции u , но на функциях из K оно параболично. Именно в этом классе функций будет доказана разрешимость задачи (1), (2). Функцию φ считаем определенной во всем \bar{Q}_T и выпуклой при $t = 0$. Теорема единственности в этом случае хорошо известна.

Мы докажем справедливость следующего предложения:

Теорема 1. *Задача (1), (2) однозначно разрешима в классе $K^{4+\alpha}$, если Ω — строго выпукла, $\partial\Omega \subset \mathcal{H}^{4+\alpha}$, $g \in \mathcal{H}^{2+\alpha}$, $\varphi \in \mathcal{H}^{4+\alpha}$, $\varphi(\cdot, 0) \in K^{4+\alpha}$, если выполнено одно из условий:*

$$\min_{Q_T} g + \min_{\partial' Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2} a d^2 \equiv \nu_1 > 0, \quad (3)$$

где d есть радиус наименьшего шара $B_d(x^0)$, содержащего Ω , а $a = \max\{0; \max_{Q_T} g_t\}$, или

$$\min_{\partial' Q_T} (\varphi_t + g) \equiv \tilde{\nu}_1 > 0 \quad (4)$$

и матрицы $g_{xx}(x, t)$, $(F(\varphi_{xx}(x, 0)))_{xx}$, $(x, t) \in Q_T$ неположительны.

Заметим благодаря (2') $u_t(x, 0) = \varphi_t(x, 0)$, $x \in \bar{\Omega}$.

Наша работа — это получение априорных оценок для решений и задач вида (1), (2) при выполнении условий (3) или (4). Известно, что достаточно найти мажоранту для нормы решений в пространстве $\mathcal{H}^{2+\beta}$ с каким-либо $\beta > 0$. Дальнейшие оценки получают на основании теории линейных равномерно параболических уравнений.

Для доказательства разрешимости задачи (1), (2) удобно воспользоваться методом продолжения по параметру, соединив ее с задачей того же характера, имеющей гладкое решение. В качестве такого семейства задач можно взять следующие:

$$M[u^\tau] = g^\tau, \quad u^\tau|_{\partial' Q_T} = \varphi^\tau, \quad \tau \in [0, 1], \quad (5)$$

где $g^\tau = \tau g + (1 - \tau)g^0$, $g^0(x, t) \equiv F(\varphi_{xx}(x, 0))$, $\varphi^\tau = \tau\varphi + (1 - \tau)\varphi^0$, $\varphi^0(x, t) \equiv \varphi(x, 0)$. При $\tau = 1$ задача (5) совпадает с задачей (1), (2), а при $\tau = 0$ она имеет решение $u^0 = \varphi^0$. Легко проверить, что в случае (3) при любом $\tau \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\min_{Q_T} g^\tau + \min_{\partial' Q_T} \varphi_t^\tau - \frac{1}{2} a^\tau d^2 \geq \tau \nu_1 + (1 - \tau)g^0 \geq \nu > 0. \quad (3')$$

Благодаря этому, как будет доказано в этой работе, для всех возможных решений u^τ из $K^{4+\alpha}$ равномерно ограничены нормы в пространстве $H^{4+\alpha}$. Это же, как известно, гарантирует разрешимость всех задач (5) (см., например, [1], или [2], или [3]). Аналогично во втором случае из условия (4) для (1), (2) следует выполнимость этого условия для задач (5), если в качестве $\tilde{\nu}$ взять число $\tau\tilde{\nu}_1 + (1-\tau)\min_{\Omega} g^0$. Это же, как будет доказано далее, позволяет получить оценки выше указанных норм и разрешимость задач (5). Отметим еще, что при любом $\tau \in [0, 1)$ для задачи (5) выполнены те же условия согласования, что и для задач (1), (2).

Итак, наша цель — получение мажорант для выпуклых решений задач (1), (2) в пространстве $H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ с каким-либо $\beta > 0$. Для этого мы используем результаты разных авторов как по эллиптическим, так и по параболическим уравнениям. Их мы будем цитировать по ходу дела.

Здесь же отметим, что исследованию полностью нелинейных, но тотально параболических уравнений вида (1) посвящены работы Н. В. Крылова (см. [4, 5]) и Line Wang [6, 7]. В них имеются указания и на работы других математиков по такого рода уравнениям. Уравнению $-u_t \det u_{xx} = g$ посвящены работы Н. В. Крылова [8, 4] и Wang Guanglie [9].

Эволюции типа (1) замкнутых поверхностей исследованы в работах К. Tso[10] и В. Chow [11].

Мы не приводим здесь обширную литературу, посвященную квазилинейным уравнениям, хотя и для них имеется прогресс, особенно по тепловым потокам под действием средней кривизны. Из последних публикаций на эту тему укажем на работу [12].

§1. Ряд известных фактов о функции F

Обозначим через S^n множество всех симметричных матриц $n \times n$, а через S_+^n — множество всех положительно определенных симметричных матриц. Известно, что функция $F: r \in S_+^n \rightarrow (\det r)^{1/n}$ вогнута, т.е. для $r = (r_{ij}) \in S_+^n$ при любых ξ^{ij} верно неравенство

$$\sum_{i,j,k,m=1}^n \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r_{ij} \partial r_{km}} \xi^{ij} \xi^{km} \leq 0. \tag{1.1}$$

Выведем уточненный вариант (1.1). Для матрицы $r = (r_{ij})$ с $\det r \neq 0$ элементы обратной матрицы обозначим буквами r^{ij} , так что $r^{-1} = (r^{ij})$, а алгебраическое дополнение к r_{ij} в r обозначим через R^{ij} . Тогда, как известно, $u^{ji} = R^{ij}(\det r)^{-1}$ и $\sum_{m=1}^n r_{km} R^{lm} = \delta_k^l \det r$ при $\forall k, l$. Дифференцируя это равенство при $k = l$ по r_{km} , получим

$$\frac{\partial}{\partial r_{km}} \det r = R^{km} = r^{mk} \det r.$$

Отсюда следует, что для $r > 0$ (т.е. $r \in S_+^n$) справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial r_{km}} \log \det r = r^{mk} = r^{km}, \quad r > 0,$$

и

$$F_{km}(r) \equiv \frac{\partial F(r)}{\partial r_{km}} = \frac{1}{n} F(r) r^{km}, \quad r > 0. \tag{1.2}$$

Верны также равенства

$$\frac{\partial r^{pm}}{\partial r_{ij}} = -r^{pi} r^{jm}, \quad \det r \neq 0. \quad (1.3)$$

Они выводятся из равенств $\sum_{q=1}^n r^{pq} r_{ql} = \delta_p^l$, продифференцированных по r_{ij} , а также самих этих равенств. Дифференцирование (1.2) по r_{ij} дает с учетом (1.3) равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{ij} \partial r_{km}} \log \det r = -r^{ki} r^{jm}, \quad r > 0. \quad (1.4)$$

Благодаря им для $r > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial r_{ij} \partial r_{km}} (\det r)^{1/n} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left[\frac{1}{n} (\det r)^{1/n-1} \frac{\partial \det r}{\partial r_{km}} \right] = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left[(\det r)^{1/n} \frac{\partial}{\partial r_{km}} \log \det r \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} [(\det r)^{1/n} r^{km}] = \frac{1}{n^2} (\det r)^{1/n} r^{km} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \log \det r + \frac{1}{n} (\det r)^{1/n} \frac{\partial r^{km}}{\partial r_{ij}} \\ &= \frac{1}{n} (\det r)^{1/n} \left[\frac{1}{n} r^{ij} r^{km} - r^{ik} r^{jm} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ суть собственные числа матрицы $r > 0$. Используя инвариантность $F(r)$ относительно ортогональных преобразований r , найдем миноранту для левой части (1.1), считая, что $r_{ij} = \delta_i^j \lambda_i$. А именно, используя это и (1.5), выводим

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j,k,m=1}^n \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r_{ij} \partial r_{km}} \xi^{im} \xi^{km} &= \frac{1}{n} F(r) \left[\sum_{i,m} \lambda_i^{-1} \lambda_m^{-1} (\xi^{im})^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \xi^{ii} \right)^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{n} F(r) \sum_{i \neq m} \lambda_i^{-1} \lambda_m^{-1} (\xi^{im})^2, \quad r > 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

при любых (ξ^{im}) и любых $r \in S_+^n$.

Свойство (1.1) есть свойство (нестрогой) вогнутости (выпуклости вверх) функции F на S_+^n . Ввиду выпуклости самого множества S_+^n это свойство F можно записать в нелокальной форме

$$F(\tau r_1 + (1 - \tau)r_2) \geq \tau F(r_1) + (1 - \tau)F(r_2), \quad (1.7)$$

где $\tau \in [0, 1]$, а $r_1, r_2 \in S_+^n$, или в форме

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F(r)}{\partial r_{ij}} q_{ij} \equiv \sum_{i,j=1}^n F_{ij}(r) q_{ij} \geq F(q), \quad \forall r, q \in S_+^n, \quad (1.8)$$

если учесть еще, что $F(r)$ 1-однородна по r . Помимо вогнутости функция F на S_+^n обладает еще свойством положительной монотонности, т.е.

$$F(r + \eta) \geq F(r) > 0 \quad \text{для } \forall r \in S_+^n \text{ и } \forall \eta \in \overline{S_+^n}. \quad (1.9)$$

Более того, справедлива

Лемма 1.1. Для принадлежности матрицы r к S_+^n необходимо и достаточно, чтобы $\det r > 0$ и (1.9), (1.8) выполнялось для любой неотрицательной матрицы η .

Действительно, необходимость условий леммы следует из (1.7). Для проверки достаточности рассмотрим полином $P_n(t) = \det(r + tI)$. Соотношение (1.9) дает положительность $P_n(t)$ при всех $t \geq 0$. Поэтому все собственные члены матрицы r (а они равны корням полинома $P_n(t)$, взятыми с обратными знаками) положительны, и потому $r \in S_+^n$.

Из (1.2) видно, что матрица $(F_{ij}(r))$ положительно определена на S_+^n и при $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ с $|\xi| \neq 0$

$$F_{ij}(\tau r_1 + (1 - \tau)r_2)\xi_i \xi_j > 0 \quad \text{при } \forall r_1, r_2 \in S_+^n, \tau \in [0, 1]. \quad (1.10)$$

Приведем еще одно нужное нам свойство функции F :

Лемма 1.2. Для любой $r \in S_+^n$ матрицы $(F_{ij}(r))$ удовлетворяет неравенству

$$\text{tr}(F_{ij}(r)) \equiv \sum_{i=1}^n F_{ij}(r) \geq 1.$$

Действительно, след матрицы инвариантен относительно ортогональных преобразований. Поэтому мы можем считать, что матрица $(F_{ij}(r))$ диагональна.

При этом будут диагональны и матрицы r и r^{-1} (см.(1.2)). Пусть $r_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}^1$, тогда

$$\text{tr}(F_{ij}(r)) = \frac{1}{n} F(r) \sum_{i=1}^n r^{ii} = \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \sum_{i=1}^n \lambda_j^{-1} \geq 1.$$

§2. Теоремы сравнения

Уравнение (1) параболично на функциях u , принадлежащих K , ибо для них матрицы $(u_{xx}(x, t))$ принадлежат S_+^n при любой $(x, t) \in \bar{Q}_T$ и потому $F_{ij}(u_{xx}) \equiv \frac{\partial F(u_{xx})}{\partial u_{ij}}$, $i, j \in 1, \dots, n$ в любой точке $(x, t) \in \bar{Q}_T$ образуют положительно определенную матрицу $(F_{ij}(u_{xx}))$ (см. (1.2) и (1.10)). Здесь и далее мы пользуемся сокращенными обозначениями для производных:

$$u_i = u_{x_i}, \quad u_{ij} = u_{x_i x_j}, \quad (u_{ij}) = u_{xx}.$$

Введем по функции $u \in C^{2,0}(Q_T)$ линейный оператор

$$L_u(v) = -v_t + F_{ij}(u_{xx})v_{ij}. \quad (2.1)$$

Для $u \in K$ этот оператор параболичен в \bar{Q}_T , и поэтому для него справедливо следующее утверждение, являющееся частным случаем теоремы Хопфа:

Лемма 2.1. Пусть $u \in K$ и для $v \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ в Q_T выполняется неравенство $L_u(v) \leq 0$. Тогда $\min_{Q_T} v = \min_{\partial Q_T} v$. Если же $L_u(v) \geq 0$, то $\max_{Q_T} v = \max_{\partial Q_T} v$.

Убедимся в справедливости такого утверждения:

Лемма 2.2. Пусть $u' \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $\det u'_{xx} \geq 0$ и в тех точках, где $u'_{xx} > 0$ выполняется неравенство

$$-u'_t(x, t) + h(x, t, u'_x(x, t))F(u'_{xx}(x, t)) \leq f(x, t, u'_x(x, t)), \quad (2.2)$$

а $u'' \in K$ и удовлетворяет в Q_T неравенству

$$-u''_t(x, t) + h(x, t, u''_x(x, t))F(u''_x(x, t)) \geq f(x, t, u'_x(x, t)). \quad (2.3)$$

Здесь h и f суть непрерывные функции указанных аргументов, причем $h \geq 0$.

Тогда если $u'' - u' \leq 0$ на $\partial'Q_T$, то $u'' - u' \leq 0$ и \bar{Q}_T .

Для доказательства этого утверждения введем функции $w'(x, t) = u'(x, t)e^{-\lambda t}$ и $w''(x, t) = u''(x, t)e^{\lambda t}$ с $\lambda > 0$. Для них из (2.2) и (2.3) следуют неравенства

$$-w'_t - \lambda w' + h(x, t, u'_x)F(u'_{xx})e^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda t} f(x, t, u'_x) \quad (2.2')$$

и

$$-w''_t - \lambda w'' + h(x, t, u''_x)F(u''_{xx})e^{-\lambda t} \geq e^{-\lambda t} f(x, t, u''_x). \quad (2.3')$$

Если функция $w(x, t) = w''(x, t) - w'(x, t)$ имеет свой максимум \bar{Q}_T на $\partial'Q_T$, то в силу условия леммы он неположителен, и потому $w(x, t) = e^{-\lambda t}(u'' - u'(x, t)) \leq 0$ в Q_T . В противном случае, максимум w реализуется в какой-либо точке $(x^0, t^0) \in Q_T \setminus \partial'Q_T$ и в ней мы имеем: $w_x = 0$, $w_t \geq 0$ и $w_{xx} \leq 0$. Отсюда следуют соотношения: $u'_x = u''_x$, $u'_{xx} \geq u''_{xx} > 0$ (ибо $u'' \in K$), и потому в этой точке выполняются оба неравенства: (2.2') и (2.3'), причем h и f в них совпадают. Разность этих неравенств дает

$$-w_t - \lambda w + he^{-\lambda t}[F(u''_{xx}) - F(u'_{xx})] \geq 0. \quad (2.4)$$

Но в рассматриваемой точке $w_t \geq 0$ и $F(u''_{xx}) - F(u'_{xx}) \leq 0$ (ибо в ней $u'_{xx} \geq u''_{xx} > 0$). Поэтому из (2.4) следует $w(x^0, t^0) \leq 0$. Отсюда же имеем $w(x, t) = 0$, а потому и $u''(x, t) - u'(x, t) \leq 0$ во всех $(x, t) \in Q_T$. Лемма доказана.

Из леммы 2.2 следует известный факт:

Теорема 2.1. *Задача (1), (2) может иметь не более одного решения в классе K .*

§3. Оценки для u_t , u и u_x

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для решения u задачи (1), (2) из класса K верны неравенства*

$$\frac{1}{2}a(x - x^0)^2 + \min_{\partial'Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2}ad^2 \leq u_t(x, t) \leq -\frac{1}{2}b(x - x^0)^2 + \max_{\partial'Q_T} \varphi_t + \frac{1}{2}bd^2, \quad (3.1)$$

в которых $a = \max\{0; \max_{Q_T} g_t\}$, $b = \max\{0; \max_{Q_T} (-g_t)\}$, $a x^0$ — центр шара $B_d(x^0)$ радиуса d , содержащего Ω .

Если

$$\min_{Q_T} g + \min_{\partial'Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2}ad^2 \equiv \nu_1 > 0, \quad (3.2)$$

то

$$u_t(x, t) + g(x, t) \geq \nu_1 > 0 \text{ в } \bar{Q}_T. \quad (3.3)$$

Для доказательства теоремы используем уравнение

$$L_u u_t = g_t. \quad (3.4)$$

Ему удовлетворяет производная u_t решения u уравнения (1). Введем функцию $v(x, t) = u_t(x, t) - \frac{1}{2}a(x - x^0)^2$ с x^0 и a , указанными в лемме. Для нее в силу (3.4), леммы 1.2 и выбора a имеем

$$L_u v = g_t - a \sum_{i=1}^n F_{ii}(u_{xx}) \leq g_t - a \leq 0.$$

Поэтому в соответствии с леммой 2.1 в $\forall(x, t) \in \bar{Q}_T$

$$v(x, t) = u_t(x, t) - \frac{1}{2}a(x - x^0)^2 \geq \min_{\partial' Q_T} v \geq \min_{\partial' Q_T} \varphi_t - \frac{1}{2}ad^2.$$

Для доказательства правого неравенства в (3.1) возьмем функцию $w(x, t) = u_t(x, t) + \frac{b}{2}(x - x^0)^2$. Для нее $L_u w \geq 0$, и потому (в силу леммы 2.1) $w \leq \max_{\partial' Q_T} w$. Это же дает правую часть (3.1). Утверждение (3.3) есть следствие левого неравенства из (3.1) и предположения (3.2).

Из правого неравенства строки (3.1) сделаем такой вывод:

$$u_t(x, t) + g(x, t) \leq \max_{\partial' Q_T} \varphi_t + \frac{1}{2}bd^2 + \max_{Q_T} g \equiv M_1 \text{ в } Q_T. \quad (3.5)$$

Выделим еще один случай, когда мы можем оценить u_t снизу.

Теорема 3.2. Пусть u есть решение из класса K уравнения (1), в котором g удовлетворяет условию:

$$\text{матрица } g_{xx}(x, t) \text{ неположительна в } \bar{Q}_T. \quad (3.6)$$

Тогда

$$u_t(x, t) + g(x, t) \geq \min_{\partial' Q_T} (\varphi_t + g), \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad (3.7)$$

и потому, если

$$\min_{\partial' Q_T} (\varphi_t + g) \equiv \tilde{\nu}_1 > 0, \quad (3.8)$$

то

$$u_t(x, t) + g(x, t) \geq \tilde{\nu}_1 > 0. \quad (3.9)$$

Справедливость теоремы следует из того, что функция $w(x, t) \equiv u_t(x, t) + g(x, t)$ удовлетворяет уравнению $L_u w = g_t + L_u g = F_{ij}(u_{xx})g_{ij}$. Из условия (3.6) и принадлежности u к K следует, что $L_u(w) \leq 0$, а это в силу леммы 2.1 дает (3.7).

Будем считать в дальнейшем тексте, что для исследуемого решения u мы имеем оценки

$$0 < \nu_1 \leq \psi(x, t) \equiv u_t(x, t) + g(x, t) \leq \mu_1. \quad (3.10)$$

Благодаря им мы можем привлекать те результаты по стационарным уравнениям Монжа-Ампера

$$\det u_{xx}(x, t) = [\psi(x, t)]^n = [u_t(x, t) + g(x, t)]^n, \quad (3.11)$$

которые используют о ψ лишь информацию (3.10). Переменная t при этом играет роль параметра. К числу таких результатов относится мажорирование $\max_{x \in \Omega} |u(x, t)|$ и $\max_{x \in \Omega} |u_x(x, t)|$ числами, зависящими лишь от ν_1 и μ_1 , а также от φ и Ω . Следствием этого является

Теорема 3.3. Если выполнено условие (3) или (4), то для решения u класса K^3 задачи (1), (2) справедливы оценки

$$\max_{Q_T} |u| \leq M_0, \quad \max_{Q_T} |u_x| \leq M_1, \quad (3.12)$$

мажоранты в которых зависят лишь от v_1 из (3) или \tilde{v}_1 из (4), а также от φ и Ω .

Мы затрудняемся сказать, кто первый построил мажоранты для $\max_{\Omega} |u|$ и $\max_{\Omega} |u_x|$ в случае стационарного уравнения (3.11) только при условиях (3.10). Для уравнений, включающих эти уравнения, таковые можно извлечь из работ А. Д. Александрова 50-х—начала 60-х годов. Оценки (3.12) имеются также в книге [13] и в работах [14, 15, 16], причем для более общих, чем (3.11), уравнений.

§4. Мажорирование $\max_{Q_T} |u_{xx}|$

Обозначим символом u_{γ} производную от u по направлению $\gamma \in \mathbb{R}^n$, т.е. $u_{\gamma} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \cos(\gamma, x_i)$, а символом $u_{\gamma\gamma} = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} \cos(x_i, \gamma) \cos(x_j, \gamma)$ — производную второго порядка от u по направлению γ . Направления γ будут братья различными, но общими для всех точек Q_T , т.е. $\cos(\gamma, x_i)$ не будут зависеть от x и t .

Приведем следующие известные факты.

Лемма 4.1. Пусть $u \in C^2(Q_T)$. Если при любом направлении γ верны неравенства

$$0 \leq u_{\gamma\gamma} \leq \mu, \quad (4.1)$$

то для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, верна оценка

$$|u_{x_i x_j}| \leq \mu. \quad (4.2)$$

Если к тому же

$$0 < \nu \leq \det u_{xx}, \quad (4.3)$$

то при любом γ

$$u_{\gamma\gamma} \geq \nu \mu^{1-n}. \quad (4.4)$$

Неравенства (4.2) следуют из соотношений

$$0 \leq \frac{1}{2} (\partial_{x_i} \pm \partial_{x_j})^2 u = \frac{1}{2} (u_{x_i x_i} + u_{x_j x_j}) \pm u_{x_i x_j} \leq \mu.$$

Для доказательства (4.3) повернем оси x_i так, чтобы в рассматриваемой точке $u_{x_i x_j} = \lambda_i \delta_i^j$. По условию (4.3) $\det u_{xx} = \lambda_1 \dots \lambda_n \geq \nu$, а в силу (4.1) $\lambda_i \in [0, \mu]$. Поэтому при любом i $\lambda_i \geq \nu \mu^{1-n}$, а это дает (4.4).

Дифференцирование (1) по направлению γ дает уравнение для u_{γ} :

$$L_u u_{\gamma} = g_{\gamma}. \quad (4.5)$$

Повторное дифференцирование (4.5) по направлению γ дает уравнение

$$L_u u_{\gamma\gamma} = - \frac{\partial^2 F(u_{xx})}{\partial u_{ij} \partial u_{kl}} u_{\gamma ij} u_{\gamma kl} + g_{\gamma\gamma}. \quad (4.6)$$

Благодаря вогнутости $F(u_{xx})$ из (4.6) следует неравенство

$$L_u u_{\gamma\gamma} \geq g_{\gamma\gamma}. \quad (4.7)$$

Справедливо следующее предложение:

Предложение 4.1. Для любого направления γ верна оценка

$$u_{\gamma\gamma}(x, t) \leq \max_{\partial' Q_T} u_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \mu_2 d^2, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad (4.8)$$

где $\mu_2 = \max_{Q_T} (-g_{\gamma\gamma})$, а d — то же, что и выше.

Действительно, для x^0 и d , указанных в теореме 1 Введения, имеем

$$L_u \left(u_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \mu_2 (x - x^0)^2 \right) \geq g_{\gamma\gamma} + \mu_2 \geq 0. \quad (4.9)$$

Отсюда в силу леммы 2.1 заключаем о справедливости (4.8).

Таким образом, проблема мажорирования $|u_{x_i x_j}|$ в Q_T сведена к мажорированию $u_{\gamma\gamma}$ на $\partial' Q_T = \partial\Omega \times [0, T]$.

Мажоранта для $\max_{\partial' Q_T} |u_{\alpha\beta}|$, где $u_{\alpha\beta}$ суть производная второго порядка по направлениям касательным к $\partial\Omega$, нам уже известны, ибо $u_{\alpha\beta}$ выражаются через производные от u первого порядка и производные от граничной функции φ второго порядка.

Займемся оценкой модуля смешанных производных второго порядка $u_{\alpha\beta}$, содержащих одно дифференцирование по касательному направлению и одно по нормали. Для этого возьмем произвольную точку $x^0 \in \partial\Omega$ и будем считать, что начало координат в \mathbb{R}^n помещено в эту точку (так что $x^0 = 0$), а ось x_n направлена по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x^0 = 0$.

Пусть в окрестности этой точки уравнение границы $\partial\Omega$ задается уравнением

$$x_n = \omega(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad |x'| \leq \delta. \quad (4.10)$$

В силу строгой выпуклости Ω функция ω при малых δ удовлетворяет неравенствам

$$\kappa_1 |x'|^2 \leq \omega(x') \leq \kappa_2 |x'|^2, \quad \kappa_i > 0, \quad |x'| \leq \delta, \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Дальнейшие рассуждения проведем в цилиндре $Q_{h,T} \equiv \Omega_h x(0, t)$ с $\Omega_h = \{x \mid x = (x', x_n) \in \Omega, x_n \in (0, h)\}$ и $h = \kappa_1 \delta^2 \leq 1$. Для таких h проекция Ω_h в \mathbb{R}^n на гиперплоскость $x_n = 0$ лежит в шаре $B_\delta^{n-1}(0)$. Рассмотрим в $Q_{h,T}$ функции

$$v^k = (u - \varphi)_{x_k} + (u - \varphi)_{x_n} \omega_{x_k}, \quad k \in \{1, \dots, (n-1)\},$$

считая $\omega(x')$ продолженной на Ω_h так, что значение продолжения в точке $x = (x', x_n)$ равно значению $\omega(x')$. Сохраним за таким продолжением обозначение ω и заметим, что $\omega_{x_n} \equiv 0$.

Для всех таких v^k мы имеем

$$v^k|_{\Gamma'_{h,T}} = 0, \quad \text{где } \Gamma'_{h,T} = S'_h x(0, T), \text{ а } S'_h = \partial\Omega_h \cap \partial\Omega, \quad (4.12.1)$$

$$|v^k|_{\Gamma''_{h,T}} \leq m_1, \quad \text{где } \Gamma''_{h,T} = S''_h x(0, T), \text{ а } S''_h = \partial\Omega_h \setminus S'_h \quad (4.12.2)$$

и

$$v^k(x, 0) = 0 \quad \text{для } x \in \Omega_h. \quad (4.12.3)$$

Подсчитаем $L_u v^k$, используя сокращенные обозначения $u_i = u_{x_i}$, $u_{ij} = u_{x_i x_j}$ не только для u , но и для φ , ω , g :

$$\begin{aligned} L_u v^k &= L_u u_k - \omega_k L_u u_n + 2F_{ij}(u_{xx}) u_{ni} \omega_{kj} + u_n F_{ij}(u_{xx}) \omega_{kij} - L_u(\varphi_k + \varphi_n \omega_k) \\ &= g_k - g_n \omega_k + u_n F_{ij} \omega_{kij} - L_u(\varphi_k + \varphi_n \omega_k). \end{aligned} \quad (4.13)$$

При этом мы использовали (1.2), что дало следующее:

$$F_{ij}(u_{xx}) u_{ni} \omega_{kj} = \frac{1}{n} F(u_{xx}) \delta_j^n \omega_{kj} = \frac{1}{n} F(u_{xx}) \omega_{kn} = 0.$$

Из (4.13), ограниченности производных φ и ω , входящих в (4.13), и известной нам оценки $\max_{Q_T} |u_x| \leq M_1$, сделаем такой вывод:

$$|L_u v^k| \leq c_1 \left(\sum_{i,j=1}^n |F_{ij}(u_{xx})| + 1 \right), \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (4.14)$$

В силу положительной определенности матрицы $(F_{ij}(u_{xx}))$ при любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ справедливы неравенства

$$F_{ij}^2(u_{xx}) \leq F_{ii}(u_{xx})F_{jj}(u_{xx}) \leq A^2, \quad A \equiv \sum_{i=1}^n F_{ii}(u_{xx}). \quad (4.15)$$

Благодаря им и $A \geq 1$ (лемма 1.2) из (4.14) следует оценка

$$|L_u v^k| \leq c_2 A, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (4.16)$$

Построим для v_{xx}^k в $Q_{h,T}$ миноранту $w(x,t)$, равную нулю при $x=0$. Она имеет вид: $w(x,t) = \frac{1}{2}ax^2 - bx_n$ с $a \gg 1$ и $b \gg a$. Действительно,

$$L_u(w) = a \sum_{i=1}^n F_{ii}(u_{xx}) = aA.$$

Поэтому при $a = c_2$ из (4.16) имеем в $Q_{h,T}$

$$L_u(w) \leq L_u(\pm v^k), \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (4.17)$$

Чтобы удовлетворить требованию

$$0 \geq w(x,t) - v_{(x,t)}^k|_{\Gamma'_{h,T}} = \frac{1}{2}a[(x')^2 + \omega^2(x')] - b\omega(x'), \quad (4.18.1)$$

достаточно подчинить параметр b неравенству

$$b \geq \frac{1}{2}a(1 + \kappa_1)\kappa_1^{-1}. \quad (4.19.1)$$

Это легко проверить, используя (4.11). Чтобы удовлетворить требованию

$$w - v^k|_{\Gamma''_{h,T}} \leq 0, \quad (4.18.2)$$

выберем b так, чтобы $w + m_1 \leq 0$ на $\Gamma''_{h,T}$, где m_1 взято из (4.12.2). Так как в силу выбора δ и h

$$\begin{aligned} w + m_1|_{\Gamma''_{h,T}} &= \frac{1}{2}a[(x')^2 + h^2] - bh + m_1|_{\Gamma''_{h,T}} \\ &\leq \frac{1}{2}a(\delta^2 + h^2) - bh + m_1 = \frac{1}{2}a(\kappa_1^{-1}h + h^2) - bh + m_1 \\ &\leq \frac{1}{2}ah(\kappa_1^{-1} + 1) - bh + m_1, \end{aligned}$$

то мы удовлетворим (4.18.2), взяв

$$b \geq m_1 h^{-1} + \frac{1}{2}a(\kappa_1^{-1} + 1). \quad (4.19.2)$$

Наконец, как легко подсчитать, мы удовлетворим требованию

$$w(x) - v^k(x,0) = m(x) \leq 0 \quad \text{при } x \in \Omega_h, \quad (4.18.3)$$

подчинив b неравенству

$$b \geq a \max\{1, \kappa_1^{-1}\}. \quad (4.19.3)$$

Таким образом, если $a = c_2$ из (4.16) и b удовлетворяет требованиям (4.19.k), $k = 1, 2, 3$, то $w - v^k \leq 0$ на $\partial' Q_{h,T}$, а в $Q_{h,T}$ выполняется неравенство $L_u(w) \geq L_u(v^k)$ (см. (4.17)). Поэтому лемма 2.1 дает оценку

$$w(x) - v^k(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{h,t}. \quad (4.20)$$

Так как в точке $x = 0$ $w(0) = v^k(0, t) = 0$ при $\forall t \in [0, T]$, то $\frac{\partial w(x)}{\partial x_n} - \frac{\partial v^k(x, t)}{\partial x_n} \Big|_{x=0} \leq 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_n} \Big|_{x=0} - b \leq \frac{\partial v^k(x, t)}{\partial x_n} \Big|_{x=0} = (u - \varphi)_{x_k x_n}(0, t),$$

т.е.

$$u_{x_k x_n}(0, t) \geq \varphi_{x_k x_n}(0, t) - b, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.21.1)$$

Это верно в любой точке $x = 0 \in \partial\Omega$. Для оценки $u_{x_k x_n}(0, t)$ сверху используем ту же функцию $w(x, t) = \frac{1}{2}ax^2 - bx_n$. На границе $\partial' Q_{h,T}$ цилиндра $Q_{h,T}$ она удовлетворяет не только неравенствам (4.18.k), $k = 1, 2, 3$, но и неравенству

$$w + v^k \leq 0 \quad \text{на } \partial' Q_{h,T}. \quad (4.22)$$

Это легко проверить, заметив, что при выборе параметров a и b мы использовали относительно v^k лишь информацию (4.17) и (4.12.k), $k = 1, 2, 3$. Поэтому (см. лемму 2.1)

$$w(x) + v^k(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_{h,T}.$$

Отсюда, как и выше, сделаем заключение

$$u_{x_k x_n}(0, t) \leq \varphi_{x_k x_n}(0, t) + b, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.21.2)$$

Подытожим доказанное.

Предложение 4.2. Если выполнено условие (3) или (4), то для решения u класса K^4 задачи (1), (2) справедливы оценки

$$\max_{\partial'' Q_T} |u_{\alpha\beta}|; \max_{\partial'' Q_T} |u_{\alpha n}| \leq \mu_3, \quad (4.22)$$

мажоранта в которых определяется данными задачи, а также числами ν_1 из (3) или $\tilde{\nu}_1$ из (4).

Недостающую оценку $\max_{\partial'' Q_T} |u_{nn}|$ мы получим из леммы 6 работы [17]. А именно, согласно этой лемме для выпуклых решений $u(x, t)$ уравнений Монжа-Ампера (3.11) $\max_{x \in \partial\Omega} |u_{nn}(x, t)|$ мажорируется числом, зависящим лишь от чисел ν_1 и μ_1 из (3.10), числом μ_3 из (4.22), чисел M_0 и M_1 из (3.12), а также $\|\varphi(\cdot, t)\|_{C^4(\Omega)}$ и нормой $\partial\Omega$ в C^4 . Благодаря этому и доказанным выше фактам справедлива

Теорема 4.1. Если выполнено условие (3) или (4), то для решения u класса K^4 задачи (1), (2) справедливы оценки

$$\max_{Q_T} |u_{x_i x_j}| \leq M_2, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.23)$$

и

$$\min_{Q_T} u_{x_i x_i} \geq \nu_2 > 0, \quad (4.24)$$

в которых M_2 и ν_2 определяются константой ν_1 из (3) или $\tilde{\nu}_1$ из (4), а также нормами $\|\partial\Omega\|_{C^4}$ и $\|\varphi\|_{C^{4,2}(Q_T)}$.

Отметим, что для получения оценки $\max_{x \in \partial\Omega} \|u_{nn}(x, t)\|$ можно воспользоваться также результатами работы [15].

Дальнейшие параграфы посвящены оценкам констант Гельдера для u_t и $u_{x_i x_j}$.

§5. Оценка констант Гёльдера для u_t в \bar{Q}_T и $u_{x_i x_j}$ на $\partial'' Q_T$

Здесь и далее будем считать выполненным условие (3) или (4) и u — решением задачи (1), (2) из класса $K^{4+\alpha}$. Из результатов предыдущих параграфов следует, что квадратичная форма

$$a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \equiv F_{ij}(u_{xx}(x, t))\xi_i\xi_j$$

удовлетворяет при любых $(x, t) \in \bar{Q}_T$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенствам

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad 0 < \nu \leq \mu, \quad (5.1)$$

с постоянными ν и μ , которые можно вычислить по данным задачи. Благодаря этому оператор

$$L_u \equiv -\partial_t + F_{ij}(u_{xx}(x, t))\partial_{x_i x_j}^2 \equiv -\partial_t + a_{ij}(x, t)\partial_{x_i x_j}^2$$

является равномерно параболическим, и для него можно использовать результаты, полученные в работах [18, 23, 4]. Нам нужны оценки констант Гёльдера для u_t и $u_{x_i x_j}$ в \bar{Q}_T .

Следуя [1], будем обозначать константу Гёльдера с показателем $\alpha \in [0, 1)$ для v в \bar{Q}_T символом $\langle v \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$, а соответствующую ей норму Гёльдера для v в \bar{Q}_T символом $|v|_{Q_T}^{(\alpha)}$, так что

$$|v|_{Q_T}^{(\alpha)} = \max_{Q_T} |v| + \langle v \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}.$$

Оценка для $\max_{Q_T} |u_t|$ получена в §3 на базе того, что u_t есть решение линейной параболической задачи

$$L_u u_t = g_t, \quad u_t|_{\partial' Q_T} = \varphi_t|_{\partial' Q_T} \quad (5.2)$$

с известной нам функцией φ_t . Теперь мы имеем о L_u дополнительную информацию — неравенства (5.1). Она позволяет воспользоваться теоремой 1.2 из работы [12] (или, что то же, из работы [20] или [21]) и сделать следующее заключение:

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения u задачи (1), (2) из класса K^4 справедлива оценка

$$|u_t|_{Q_T}^{(\alpha)} \leq M_3 \quad (5.3)$$

с некоторым $\alpha \in (0, 1)$, определяемым, как и M_3 , известным в задаче (1), (2) величинами.

Оценка $|u_t|_{Q_T}^{(\alpha)} \leq c$ для $Q'_T \ll Q_T$ следует также из результатов работы [18], предшествовавшей работе [19].

Для мажорирования величин $(u_{x_i x_j})_{Q_T}^{(\alpha)}$ нам потребуются оценки констант Гёльдера для $u_{x_i x_j}$ на $\partial'' Q_T$. Их мы можем получить с помощью теоремы 5.1 из работы [22] (или соответствующей теоремы из [23]). Для удобства читателя приведем частный случай этой теоремы, который нам достаточен для целей данной работы.

Лемма 5.1. Пусть для v , принадлежащей $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, выполняется неравенство

$$|a_{ij}(x, t)v_{x_i x_j}(x, t) - v_t(x, t)| \leq c_1 \quad (5.4)$$

с a_{ij} , удовлетворяющими (5.1), и пусть $v|_{\partial'Q_T} = 0$. Тогда при некотором $\alpha \in (0, 1)$ справедливы оценки

$$|v_{x_i}|_{\partial''Q_T}^{(\alpha)} \leq c_2, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.5)$$

Величины α и c_2 определяются числами ν и μ из (5.1) и c_1 из (5.4).

Применим эту лемму к функции v , равной любой из функций $v^k(x, t)\xi(x, t)$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, где

$$v^k(x, t) = [u(x, t) - \varphi(x, t)]_{x_k} + [u(x, t) - \varphi(x, t)]_{x_n} \omega_{x_k}(x),$$

а ξ равны нулю вне малого цилиндра $\Omega^\delta \times [0, T]$, примыкающего к $\partial''Q_T$. Точнее, здесь, как и в §4, где введены функции v^k , выбираем произвольную точку $x^0 \in \partial\Omega$, помещаем в нее начало координат x , ось x_n направляем по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0 и все рассуждения проводим для $x \in \Omega^\delta \equiv \{x | x \in \Omega, |x| < \delta\}$, где δ столь мало, что величины $\max_{|x'| \leq \delta} |\omega_{x_k}(x')|$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, не превосходят какого-либо числа c_3 . Будем считать так же, что $\omega(x) = \omega(x')$, $x = (x', x_n)$, для $|x| \leq \delta$ и $x_n \geq 0$. Функцию $\xi(x, t)$ возьмем неотрицательной, достаточно гладкой и равной нулю при $|x| \geq \delta$. Каждое из $v = v^k \xi$ ($k \in \{1, \dots, n-1\}$) определено в цилиндре $Q_T^\delta = \Omega^\delta \times (0, T)$ и равно нулю на $\partial'Q_T^\delta$. Кроме того, для них верно неравенство

$$\max_{Q_T} |L_u(v^k \xi)| \leq c_4, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (5.6)$$

в котором c_4 легко подсчитывается. Поэтому для $v = v^k \xi$ справедлива лемма 5.1. Она гарантирует оценки норм Гёльдера на границе $\partial''Q_T$ для всех производных $u_{x_i x_j}$ решения u , кроме u_{nn} — производной второго порядка по нормали к $\partial\Omega$. Оценка же для $|u_{nn}|_{\partial''Q_T}^{(\alpha)}$ получается непосредственно из уравнения (1).

Итак, мы убедились в справедливости следующего:

Теорема 5.2. При выполнении условий теоремы 1 для решения u задачи (1), (2) из класса K^4 справедливы оценки

$$|u_{x_i x_j}|_{\partial''Q_T}^{(\alpha)} \leq M_4, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (5.7)$$

в которых M_4 и $\alpha \in (0, 1)$ определяются по известным в задаче (1), (2) величинам.

§6. Мажорирование константы Гёльдера для $u_{x_i x_j}$ в \bar{Q}_T

В данном параграфе мы найдем мажоранты для величин $\langle u_{x_i x_j} \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$, следуя идее Л. Эванса и Н. В. Крылова рассматривать некоторый специальный набор функций u^k , для которого удастся извлечь из исходной задачи информацию, достаточную для оценки констант Гёльдера $\langle u^k \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$, причем из этой последней следуют оценки для $\langle u_{x_i x_j} \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ [24, 25, 4]. Как и у них, в качестве таких функций мы берем функции $u^k \equiv u_{\gamma_k \gamma_k}$, $k = 1, \dots, N$, с направлениями γ_k , которые выбираются в соответствии с теоремой Вазова-Мощкина [26] (ее мы формулируем ниже как лемму 6.1). Для каждой u^k мы имеем неравенство (4.7), из которого используем лишь следующую информацию:

$$\|(-L_u u^k)_+\|_{n+1, Q_T} \leq c_1, \quad k \in \{1, \dots, N\}, \quad (6.1)$$

При этом существенно то, что оператор $L_u = -\partial_t + a_{ij} \partial_{x_i x_j}^2$, $a_{ij}(x, t) \equiv F_{ij}(u_{xx}(x, t))$ строго параболичесен, и мы знаем константы ν и μ , входящие в неравенства (5.1).

В (6.1) $u(x, t)$ есть исследуемое решение задачи (1), (2), а символ $(\cdot)_+$ означает, как обычно, следующее: $a_+ = \max\{0; a\}$. Символ $\|v\|_{q, Q_T}$ означает норму Лебега в пространстве $L_q(Q_T)$.

Лемма 6.1. Для всего множества $S_+^n(\nu, \mu)$ симметрических положительно определенных матриц $A = (a_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, с собственными значениями, расположенными на отрезке $[\nu, \mu] \in (0, \infty)$, существует N единичных векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в \mathbb{R}^n таких, что

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^N \beta_k \gamma_{ki} \gamma_{kj}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (6.2)$$

причем $\beta_k \in [\nu^*, \mu^*]$, где ν^* и μ^* — положительные числа, определяемые n , ν и μ , а γ_{ki} ($i \in \{1, \dots, n\}$) — компоненты вектора γ_k . Кроме того, набор векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ можно выбрать так, чтобы он включал в себя координатные векторы e_1, \dots, e_n и векторы $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \pm e_j)$.

Матрицы $(a_{ij}(x, t))$ из L_u удовлетворяют условиям этой леммы, и мы возьмем набор векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ так, как указано в конце леммы. Функции u^k , построенные по этим γ_k , т.е. $u^k = u_{\gamma_k \gamma_k}$, и будут предметом последующих рассуждений.

Коэффициенты β_k в (6.2) для (a_{ij}) из L_u зависят от (x, t) , но нам существенно лишь то, что они удовлетворяют неравенствам:

$$0 < \nu^* \leq \beta_k(x, t) \leq \mu^* < \infty.$$

Благодаря этому разность $j \equiv F(u_{xx}(z_2)) - F(u_{xx}(z_1))$ для любой пары точек $z_1 = (x', t')$ и $z_2 = (x'', t'')$ из Q_T можно представить, используя обозначение $u_{xx}^\tau \equiv \tau u_{xx}(z_2) + (1 - \tau)u_{xx}(z_1)$, в виде

$$\begin{aligned} j &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} F(u_{xx}^\tau) d\tau = \int_0^1 F_{ij}(u_{xx}^\tau) d\tau [u_{ij}(z_2) - u_{ij}(z_1)] \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^N \beta_k^\tau d\tau [u^k(z_2) - u^k(z_1)] \\ &= \sum_{k=1}^N \beta_k^* [u^k(z_2) - u^k(z_1)], \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\beta_k^* \equiv \int_0^1 \beta_k^\tau d\tau \in [\nu^*, \mu^*]$. В силу (1) и (5.3)

$$|j| = |u_t(z_2) - u_t(z_1) + g(z_2) - g(z_1)| \leq c_2 [d(z_1, z_2)]^\alpha, \quad (6.4)$$

где $d(z_1, z_2) \equiv (|x' - x''| + |t' - t''|)^{1/2}$, а c_2 определяется известными нам величинами. Из (6.3) и (6.4) следует неравенство

$$\nu^* \sum_{k=1}^n [u^k(z_2) - u^k(z_1)]_+ - \mu^* \sum_{k=1}^N [u^k(z_2) - u^k(z_1)]_- \leq c_2 [d(z_1, z_2)]^\alpha,$$

которое запишем в виде

$$\delta \sum_{i=1}^N [u^k(z_2) - u^k(z_1)]_+ - \sum_{i=1}^N [u^k(z_2) - u^k(z_1)]_- \leq c_3 \rho^\alpha, \quad \delta > 0, \quad (6.5)$$

считая, что $d(z_1, z_2)$ имеет порядок ρ . Отметим, что значения показателя α , вообще говоря, разные в разных наших утверждениях. На каждом следующем этапе рассмотрений его значение может понизиться, но нам существенно лишь то, что оно остается положительным и число возможных его понижений конечно. Кроме того, мы всюду считаем $\rho \leq \rho_0 \leq 1$, и потому $\rho^{\alpha_1} < \rho^{\alpha_2}$ для $\alpha_1 > \alpha_2$.

Неравенства (6.1) и (6.5) вместе с полученными ранее оценками для $|u^k|_{\partial''Q_T}^{(\alpha)}$ служат той информацией о u^k , на основе которой будут найдены мажоранты для $\langle u^k \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$. При этом мы будем придерживаться плана Н. В. Крылова (см. [4, гл. V]), но реализовать его несколько иначе, используя одну теорему из работы [19]. Это позволяет облегчить все рассуждение и сделать его единообразным для внутренних и приграничных цилиндров. Для удобства читателя сформулируем те два известных предложения, которые нам будут нужны.

Лемма 6.2. Пусть фиксированы числа $N_1, N_2 \geq 0, \alpha, \delta_1$ и l из $(0, 1)$ и $\rho_0 \in (0, 1]$, и пусть на $[0, 2\rho_0]$ определены неубывающие функции $w_i(\rho), i = 1, \dots, m$, со значениями из $[0, l]$. Пусть, далее, для любого $\rho \in [0, \rho_0]$ верно или неравенство

$$w_k(\rho) \leq \delta_1 w_k(2\rho) + N_2 \rho^\alpha \rho_0^{-\alpha}, \tag{6.6}$$

или неравенство

$$\sum_{i \in B(\rho)} w_i(\rho) \leq N_1 \sum_{i \in A(\rho)} w_i(2\rho) + N_2 \rho^\alpha \rho_0^{-\alpha}, \tag{6.7}$$

где $A(\rho)$ есть совокупность индексов k из $\{1, \dots, m\}$, для которых верно (6.6), а $B(\rho) = \{1, \dots, m\} \setminus A(\rho)$. Тогда при $\forall \rho \in [0, 2\rho_0]$

$$\sum_{i=1}^m w_i(\rho) \leq N_3 \rho^\alpha \rho_0^{-\alpha} \left(\sum_{i=1}^m w_i(2\rho_0) + N_2 \right), \tag{6.8}$$

где N_3 определяется входящими в условие леммы параметрами.

Эта лемма является частным случаем леммы из [4, с. 123, гл. IV, §3]. Множество $A(\rho)$ или $B(\rho)$ может быть и пустым.

Теорема 6.1. Пусть $v \in W_{n+1}^{2,1}(Q_T)$ и $v \geq 0$ в Q_T . Для любого $\varkappa \in (0, 1]$ существуют постоянные $\beta > 0$ и $c > 0$ такие, что справедливы следующие утверждения:

(1) если цилиндр $Q_{2\rho} \equiv Q_{2\rho}(x^0, t^0)$ принадлежит Q_T и для любого $k > 0$

$$\text{mes}\{\hat{A}_k \cap \hat{Q}_\rho(x^0, t^0)\} \geq \varkappa \text{mes} \hat{Q}_\rho(x^0, t^0), \tag{6.9}$$

то

$$\inf v \geq \beta k - c \rho^{\frac{n}{n+1}} \|(Lv)_+\|_{n+1, Q_{2\rho}}. \tag{6.10}$$

Здесь и далее $Q_\rho = Q_\rho(x^0, t^0) = \{(x, t) \mid |x - x^0| < \rho, t \in (t^0 - \rho^2, t^0)\}$, $Q_{2\rho} = Q_{2\rho}(x^0, t^0) = \{(x, t) \mid |x - x^0| < 2\rho, t \in (t^0 - 4\rho^2, t^0)\}$, $\hat{Q}_\rho(x^0, t^0) = \{(x, t) \mid |x - x^0| < \rho, t \in (t^0 - 4\rho^2, t^0 - 3\rho^2)\}$, $\hat{A}_k = \{(x, t) \in Q_T \mid v(x, t) \geq k\}$, а $L = -\partial_t + a_{ij} \partial_{x_i}^2 x_j$ — параболический оператор с a_{ij} , удовлетворяющими неравенствам (5.1).

2) Если $t^0 \in (0, \rho^2)$ и $\partial''Q_T \cap Q_{2\rho}(x^0, t^0) = \emptyset$, то для любого k , удовлетворяющего неравенству

$$k \leq \inf_{|x-x^0| < 2\rho} v(x, 0), \tag{6.11}$$

справедливо неравенство

$$\inf_{Q_\rho \cap Q} v \geq \beta k - c\rho^{\frac{n}{n+1}} \|(Lv)_+\|_{n+1, Q_{2\rho} \cap Q_T}. \quad (6.12)$$

3) Если $(x^0, t^0) \in \partial''Q = \partial\Omega \times [0, T]$ и

$$k \leq \inf_{\partial'Q \cap Q_{2\rho}} v, \quad (6.13)$$

то верно (6.12).

Постоянные β и c в (6.10) и (6.12) в случаях 1) и 2) определяются числами n , ν , и μ из (5.1). Ими же определяются β и c и в случае 3), если $\partial\Omega$ — гладкая.

Теорема 6.1 является частным случаем теоремы 1.1 препринта из [19] (он опубликован в широкой печати в статьях [20] и [21]), только в [19] в условии (6.9) κ взято равным $1/2$. Но легко видеть, что данное в [16] доказательство остается в силу для любого другого значения κ из $(0, 1]$.

Теперь мы покажем, как используются лемма 6.2 и теорема 6.1 для оценки осцилляций функций u^i , $i \in \{1, \dots, N\}$, по маленьким цилиндрам $Q_{2\rho}$. Делается это по-разному в зависимости от расположения $Q_{2\rho}$ по отношению к Q_T . А именно различаются три возможности, перечисленные в теореме 6.1.

Введем для каждого $Q_{s\rho}$, $s = 1, 2$, следующие числа

$$m_i(s\rho) = \min u^i, \quad M_i(s\rho) = \max_{Q_{s\rho} \cap Q_T} u^i, \quad (6.14)$$

$$\omega_i(s\rho) = M_i(s\rho) - m_i(s\rho) \quad \text{и} \quad \xi_i = (1 - \xi)M_i(2\rho) + \xi m_i(2\rho),$$

где ξ — достаточно малое число; возьмем ξ равным $\frac{1}{2}\delta(N + \delta)^{-1}$, где δ — число из (6.5).

Рассмотрим первый случай:

1) $Q_{2\rho} \subset Q_T$. Для такого $Q_{2\rho}$ множество индексов $\{1, \dots, N\}$ разобьем на две части $A(\rho)$ и $B(\rho) \equiv \{1, \dots, N\} \setminus A(\rho)$ следующим образом: к $A(\rho)$ отнесем те индексы i , для которых множества

$$\Gamma_i(\rho) = \{z \in \hat{Q}_\rho \mid u^i(z) < (1 - \xi)M_i(2\rho) + \xi m_i(2\rho) = \xi_i\} \quad (6.15)$$

имеют меру, не меньшую, чем $1/N$, т.е.

$$A(\rho) = \left\{ i \mid |\Gamma_i(\rho)| \geq \frac{1}{N} |\hat{Q}_\rho| \right\}.$$

Здесь и далее $|\Gamma|$ означает меру множества Γ в \mathbb{R}^{n+1} . Следовательно, для $i \in B(\rho)$ верны неравенства

$$B(\rho) = \left\{ i \mid |\Gamma_i(\rho)| < \frac{1}{N} |\hat{Q}_\rho| \right\}. \quad (6.17)$$

Благодаря (6.17) ясно, что в \hat{Q}_ρ существует точка $z(\rho)$, которая не принадлежит $\Gamma_i(\rho)$ с $\forall i \in B(\rho)$. В ней

$$u^i(z(\rho)) \geq \xi_i \quad \text{для} \quad \forall i \in B(\rho). \quad (6.18)$$

Пусть $z^j(\rho)$ есть точка $\overline{Q_{w\rho}}$, в которой u^j достигает своего минимума, т.е.

$$u^j(z^j(\rho)) = m_j(2\rho). \quad (6.19)$$

Благодаря (6.18) и (6.19) для $\forall i \in B(\rho)$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [u^i(z(\rho)) - u^i(z^j(\rho))]_+ &\geq [u^j(z(\rho)) - u^j(z^j(\rho))]_+ \\ &\geq [\xi_j - m_j(2\rho)] = (1 - \xi)\omega_j(2\rho). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.5) с $z_2 = z(\rho)$ и $z_1 = z^j(\rho)$ следует

$$\begin{aligned} \delta(1 - \xi)\omega_j(2\rho) &\leq \sum_{i=1}^N [u^i(z(\rho)) - u^i(z^j(\rho))]_- + c_3\rho^\alpha \\ &\leq \sum_{i \in B(\rho)} [-\xi_i + M_i(2\rho)] + \sum_{i \in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_3\rho^\alpha \\ &= \xi \sum_{i \in B(\rho)} \omega_i(2\rho) + \sum_{i \in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_3\rho^\alpha, \forall j \in B(\rho). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Суммируя эти неравенства по $j \in B(\rho)$ и приводя подобные члены, получим

$$[\delta(1 - \xi) - N\xi] \sum_{j \in B(\rho)} \omega_j(2\rho) = \frac{\delta}{2} \sum_{j \in B(\rho)} \omega_j(2\rho) \leq N \sum_{i \in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_4\rho^\alpha. \quad (6.21)$$

С другой стороны, для каждой из функций

$$v^i \equiv M_i(2\rho) - u^i \quad (6.22)$$

с $i \in A(\rho)$ мы имеем

$$\|(L_u v^i)_+ \|_{n+1, Q_{2\rho}} \leq c_1$$

(см. (6.1)) и при $z \in \Gamma_i(\rho)$ соотношения

$$v^i(z) \equiv M_i(2\rho) - u^i(z) \geq M_i(2\rho) - \xi_i = \xi\omega_i(2\rho),$$

причем $|\Gamma_i(\rho)| \geq \frac{1}{N} |\tilde{Q}_\rho|$. Благодаря им мы можем воспользоваться п. 1) теоремы 6.1, взяв $\kappa = 1/N$ и $k = \xi\omega_i(2\rho)$. Неравенство (6.10) будет иметь вид

$$\inf_{Q_\rho} v^i \geq \beta\xi\omega_i(2\rho) - cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}}.$$

Из него следует, что в Q_ρ $u^i \leq M_i(2\rho) - \beta\xi\omega_i(2\rho) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}}$. Поэтому $\omega_i(\rho) = M_i(\rho) - m_i(\rho) \leq M_i(2\rho) - \beta\xi\omega_i(2\rho) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}} - m_i(\rho) = \omega_i(2\rho)(1 - \beta\xi) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}} + m_i(2\rho) - m_i(\rho)$ и, следовательно,

$$\omega_i(\rho) \leq (1 - \beta\xi)\omega_i(2\rho) + cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}} \quad \text{для } \forall i \in A(\rho). \quad (6.23)$$

Теперь, имея (6.21) и (6.23) для функций $\omega_i(\rho) = \omega_i(\rho)$, $i = 1, \dots, N$, мы можем воспользоваться леммой 6.2 и заключить, что для $Q_\rho \subset Q_{2\rho_0} \subseteq Q_T$ справедливы оценки

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(\rho) \equiv \sum_{i=1}^N \text{osc}_{Q_\rho} u^i \leq c_5\rho^\alpha \rho_0^{-\alpha}, \quad \rho \leq \rho_0, \quad (6.24)$$

с некоторым $\alpha \in (0, \frac{n}{n+1})$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда цилиндры $Q_{2\rho} = Q_{2\rho}(x^0, t^0)$ пересекают нижнее основание цилиндра Q_T , но не соприкасаются с $\partial' Q_T$ (точнее, см. п. 2) теоремы 6.1). Для них мы иначе разобьем множество $\{1, \dots, N\}$ на $A(\rho)$ и $B(\rho)$. К $A(\rho)$ отнесем те i , для которых

$$\max_{|x-x^0| < 2\rho} u^i(x, 0) \leq \xi_i \equiv (1 - \xi)M_i(2\rho) + \xi m_i(2\rho), \quad \xi = \frac{\delta_1}{2(\delta_1 2 + N)} \quad (6.25)$$

(см. (6.14)). Используем для функций $v^i(z) = M_i(2\rho) - u^i(z)$, $i \in A(\rho)$, п. 2) теоремы 6.1. Его условия выполнены для $k = \xi\omega_i(2\rho)$, ибо благодаря (6.25) $\inf_{|x-x^0| < 2\rho} v^i(x, 0) \geq \xi\omega_i(2\rho)$. Поэтому

$$\inf_{Q_\rho \cap Q} v^i \geq \beta\xi\omega_i(2\rho) - cc_1\rho^{\frac{n}{n+1}}, \quad \forall i \in A(\rho). \quad (6.26)$$

Отсюда, как показано выше, следуют неравенства (6.23) для рассматриваемых $Q_\rho \cap Q_T$ и $Q_{2\rho} \cap Q_T$. С другой стороны, для $j \in B(\rho)$ имеем

$$\max_{|x-x^0|<2\rho} u^j(x, 0) > \xi_j. \quad (6.27)$$

Так как $\text{osc}_{|x-x^0|<2\rho} u^j(x, 0) \leq c_6\rho$, то благодаря (6.26)

$$u^j(x^0, 0) > \xi_j - c_6\rho \quad \text{для } j \in B(\rho),$$

и потому неравенство (6.5) и (6.20) с $z_2 = (x^0, 0)$ и $z_1 = z^j(\rho)$ — точкой минимума u^j в $Q_{2\rho} \cap Q$ дает следующее:

$$\begin{aligned} & \delta(1 - \xi)\omega_j(2\rho) \\ &= \delta[\xi_j - m_j(2\rho)] < \delta[u^j(z_2) - u^j(z^j(\rho))]_+ + c_6\delta\rho \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^N [u^i(z_2) - u^i(z^j(\rho))]_+ + c_6\delta\rho \leq \sum_{i=1}^N [u^i(z_2) - u^i(z^j(\rho))]_- + c_3\rho^\alpha + c_6\delta\rho \\ &\leq \sum_{i \in B(\rho)} [-\xi_i + M_i(2\rho)]_+ + \sum_{i \in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_3\rho^\alpha + c_6\delta\rho \\ &\leq \xi \sum_{i \in B(\rho)} \omega_i(2\rho) + \sum_{i \in A(\rho)} \omega_i(2\rho) + c_7\rho^\alpha, \quad \rho \leq \rho_0. \end{aligned}$$

Суммирование этих неравенств по $j \in B(\rho)$ после приведения подобных членов дает неравенство (6.21), только с другим коэффициентом при ρ^α . Таким образом, и в случае цилиндров $Q_{2\rho}$, пересекающих нижнее основание Q_T , мы получили аналоги неравенств (6.21) и (6.23), из которых, в свою очередь, следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(\rho) \equiv \sum_{i=1}^N \text{osc}_{Q_\rho \cap Q_T} u^i \leq c_8\rho^\alpha \rho_0^{-\alpha}, \quad \rho \leq \rho_0. \quad (6.28)$$

Осталось рассмотреть случай цилиндров $Q_{2\rho} \equiv Q_{2\rho}(x^0, t^0)$ с $x^0 \in \partial\Omega$, фигурирующих в п. 3 теоремы 6.1. Для них мы разбиваем множество индексов $\{1, 2, \dots, N\}$ на $A(\rho)$, содержащее те i , для которых

$$\max_{T_{2\rho}} u^i \leq \xi_i, \quad (6.29.1)$$

и оставшееся множество $B(\rho)$ индексов i , где

$$\max_{T_{2\rho}} u^i > \xi_i.$$

Здесь $T_{2\rho}$ есть пересечение $Q_{2\rho}$ с $\partial'Q_T$. Благодаря результатам п. 5 мы знаем, что колебание функций u^i на $T_{2\rho}$ имеет порядок ρ^α , и потому

$$u^i(x^0, t^0) > \xi_i - c_9\rho^\alpha, \quad i \in B(\rho). \quad (6.30)$$

Этот факт мы используем для получения аналога неравенства (6.21) из неравенства (6.5). Для этого (6.5) рассматривается в точке $z_2 = (x^0, t^0)$ и точке z_1 , являющейся минимумом u^j в $Q_{2\rho} \cap Q_T$.

Для u^i с $i \in A(\rho)$ берутся, как и выше, функции $v^i = M_i(2\rho) - u^i$ (см.(6.22)) и для них используется результат п. 3 теоремы 6.1 с $k = \xi\omega_i(2\rho)$. Все дальнейшие рассуждения, приводящие к оценке (6.28), аналогичны изложенным выше для других расположений цилиндра $Q_{2\rho}$ в Q_T .

Таким образом, доказано следующее предложение.

Теорема 6.2. Пусть имеется набор функций u^k , $k = 1, \dots, N$, принадлежащих $W_{n+1}^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, и пусть для u^k выполняются неравенства (6.1) и неравенство (6.5) при любых z_1 и z_2 из \bar{Q}_T с какими-либо положительными числами c_1, c_3, δ и α . Пусть, наконец, известно, что на $\partial'Q_T$ $|u^k|_{\partial'Q_T}^{(\alpha)} \leq c$, $k \in \{2, \dots, N\}$. Тогда при любом k $u^k \in H^{\beta, \beta/2}(\bar{Q}_T)$, и $|u^k|_{Q_T}^{(\beta)} \leq C$, где β и C положительны и определяются указанными выше параметрами, $\max_{Q_T} |u^k|$, $k \in \{1, \dots, N\}$ и константами ν и μ из (5.1).

Вспоминая начало параграфа, убеждаемся в возможности мажорирования $(u_{x_i x_j})_{Q_T}^{(\alpha)}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, с некоторым $\alpha > 0$, величинами, определяемыми лишь данными задачи (1), (2).

Подытожим сделанное в форме теоремы:

Теорема 6.3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения u класса K^4 задачи (1), (2) можно мажорировать норму в пространстве $H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ с некоторым $\beta > 0$ величиной, определяемой лишь нормой g в пространстве $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, нормой φ в пространстве $C^{4,2}(\bar{Q}_T)$, нормой $\partial\Omega$ в C^4 и числами ν_k , входящими в условия (3) или (4).

Как отмечено во Введении, из такой априорной оценки для решения u задачи (1), (2) разрешимость задачи выводится известными методами.

Список литературы

- [1] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [2] Miranda C., *Partial Differential equations of elliptic type*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1970.
- [3] Friedman A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, INC, 1964.
- [4] Крылов Н. В., *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка*, Наука, М., 1985.
- [5] Krylov N. V., *Some new results in the theory of nonlinear elliptic and parabolic equations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, USA, 1986, pp. 1101–1109.
- [6] Line Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations*. I, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 27–76.
- [7] Line Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations*. II, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 141–178.
- [8] Крылов Н. В., *Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения*, Изв. АН СССР, сер. мат. 46 (1982), № 3, 487–523.
- [9] Wang Guanglie, *The first boundary value problem for parabolic Monge-Ampere equation*, North. Math. J. 3(4) (1987), 463–478.
- [10] Tso K., *Deforming a hypersurface by its Gauss-Kroneker curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), no. 6, 867–882.
- [11] Chow B., *Deforming convex hypersurfaces by the n -th root of the Gauss curvature*, J. Diff. Geom. 22 (1985), no. 1, 117–138.
- [12] Oliker V. I., Uraltseva N. N., *Evolution of nonparametric surfaces with speed depending on curvature*. II. *The mean curvature case*, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 97–135.
- [13] Gilbarg D., Trudinger N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd ed., Springer-Verlag, 1983.
- [14] Ивочкина Н. М., *Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа-Ампера*, Мат. сб. 128 (1985), 403–415.
- [15] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations*. I. *Monge-Ampere equation*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), 369–402.

- [16] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations*, Acta Math. **155** (1985), no. 3, 4, 261–304.
- [17] Ивочкина Н. М., *Априорная оценка $\|u\|_{C^2(\Omega)}$ выпуклых решений задачи Дирихле для уравнений Монжа-Ампера*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **96** (1980), 69–79.
- [18] Крылов Н. В., Сафонов М. В., *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами*, Изв. АН СССР, сер. мат. **44** (1980), № 1, 161–175.
- [19] Ladyzhenskaya O. A., Uralt'ceva N. N., *Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form*, Preprint LOMI, E-11-81, pp. 1–35.
- [20] Ladyzhenskaya O. A., Uralt'ceva N. N., *Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form*, Sciences and Computers, Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol. 10, Acad. Press USA, 1986, pp. 1–22.
- [21] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Оценка константы Гёльдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентами*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **147** (1985), 72–94.
- [22] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Оценка на границе области норм Гёльдера производных решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида*, Препринт ЛОМИ, P-1-85, с. 1–43.
- [23] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Мажорирование на границе области норм Гёльдера производных для функций, удовлетворяющих квазилинейному эллиптическому или параболическому неравенству*, Тр. МИАН **179** (1986).
- [24] Evans L. C., *Classical solutions of fully nonlinear convex, second order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1982), 333–363.
- [25] Крылов Н. В., *Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области*, Изв. АН СССР, сер. мат. **47** (1983), № 1, 75–108.
- [26] Morzkin T., Wasow W., *On the approximations of linear elliptic differential equations by difference equations with positiv coefficients*, J. Math. Phys. **31** (1952), 253–259.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
198005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, 4

Поступило 31 января 1994 г.