ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 45—84

Б. Я. ЛЕВИН

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И О СВЯЗАННЫХ С НИМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ *

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье устанавливаются общие положения теории целых функций конечной степени, позволяющие получать различные точные оценки, аналогичные тем, которые были впервые открыты С. Н. Бернштейном и которые играют важную роль в теории аппроксимации. В основе исследования лежит данное автором обобщение принципа Фрагмена-Линделёфа и теорема, аналогичная теореме Эрмита-Билера, относящаяся к целым функциям конечной степени.

Введение

Целой функцией конечной степени мы, следуя С. Н. Бернштейну будем называть целую функцию $f(z)$, для которой

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty.$$

Число $\sigma \geqslant 0$ называется степенью функции $f(z)$.

Функция

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r} \tag{0.1}$$

называется индикатором роста функции $f(z)$ и является, как известно ([1]) ([2]), опорной функцией некоторой ограниченной выпуклой области, называемой индикаторной диаграммой функции $f(z)$.

Одно из самых замечательных свойств целых функций конечной степени было открыто С. Н. Бернштейном:

Если $f(z)$ — целая функция степени $\sigma \geqslant 0$ и $|f(x)| \leqslant L$ при $-\infty < x < \infty$, то $|f'(x)| \leqslant L\sigma$ $(-\infty < x < \infty)$. При этом знак равенства во втором соотношении возможен лишь, если

$$f(x) = c_1 \cos\sigma x + c_2 \sin\sigma x.$$

Эта теорема, являющаяся основной в теории аппроксимации непрерывных функций на всей числовой оси целыми функциями конечной степени, обобщалась многими авторами в различных направлениях.

---

* Основные результаты этой статьи были изложены без доказательств в заметке автора ([14]).

Среди этих обобщений весьма существенным является следующее обобщение С. Н. Бернштейна:

Если $\omega(x) = e^{i\sigma x}\varphi(x)$, *где* $\sigma \geqslant 0$ *и* $\varphi(z)$ — *целая функция нулевого рода, не имеющая корней в нижней полуплоскости, и* $f(x)$ — *целая функция степени, не превышающей* σ, *то из неравенства*

$$|f(x)| \leqslant L|\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty)$$

следует

$$|f'(x)| \leqslant L|\omega'(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Н. И. Ахиезер сделал следующий шаг, показав, что в формулировке этой теоремы можно функцию $\omega(z) = e^{i\sigma z}\varphi(z)$ заменить функцией более общего класса ([5]).

Стремление максимально расширить класс функций $\omega(z)$ приводит нас к особому классу целых функций.

Определение. Целую функцию конечной степени $f(z)$ мы назовем функцией класса P, если:

a) $f(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости,

b) $h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geqslant h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Множество функций класса P степени σ мы будем обозначать через P_σ. В настоящей статье устанавливается, в частности, следующий факт:

Пусть $\omega(z)$ — *функция конечной степени. Для того чтобы из неравенства* $|f(x)| \leqslant |\omega(x)|$ $(-\infty < x < \infty)$, *в котором* $f(z)$ — *произвольная целая функция степени* $\tau \leqslant \sigma$, *следовало неравенство* $|f'(x)| \leqslant |\omega'(x)|$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega(z)$ *была функцией класса* P *и степени, не меньшей* σ.

Более того, мы доказываем общее положение (теорема 4), позволяющее получать неравенства, аналогичные неравенствам С. Н. Бернштейна, причем оператор дифференцирования заменяется значительно более общим оператором.

Для доказательства этой теоремы и ряда других фактов нам пришлось несколько обобщить известный принцип Фрагмена-Линделёфа. Это обобщение формулировано в лемме 2.

Класс P был введен нами ранее ([6]) в связи с другим вопросом.

Известна следующая теорема Эрмита — Билера:

Для того чтобы полином

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z),$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные полиномы, не имел корней в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы

α) $P(z)$ и $Q(z)$ представлялись в форме

$$P(z) = R(z)P_1(z), \quad Q(z) = R(z)Q_1(z),$$

где $R(z)$, $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — полиномы, имеющие лишь вещественные корни, причем корни $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — простые и взаимно разделяются,

т. е. между двумя последовательными корнями одного из этих полиномов находится точно один корень другого.

β) В некоторой точке $x = x_0$

$$Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0.$$

В связи с некоторыми вопросами теории регулирования Н. Г. Чеботарев обобщил эту теорему, рассматривая вместо полиномов некоторые специальные функции конечной степени ([7]).

Несколько более общий класс функций конечной степени был рассмотрен Л. С. Понтрягиным ([8]).

Мною ([6]) и независимо от меня М. Г. Крейном в 1943 г. было показано, что самым общим классом функций конечной степени, на который распространяется критерий Эрмита — Билера, является класс P.

В работе М. Г. Крейна, которая так и осталась неопубликованной, формулировка основной теоремы является более законченной, чем в моей заметке ([6]), поэтому я, пользуясь разрешением автора, публикую здесь эту теорему в формулировке М. Г. Крейна (см. теорему 1).

Замечу, что в тоже время была опубликована заметка Н. Н. Меймана ([9]), в которой теорема Эрмита — Билера обобщается на произвольные целые функции $\omega(z)$, удовлетворяющие условиям:

1) $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости;

2) $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}\right| \leqslant 1$ в верхней полуплоскости.

Эти функции Н. Н. Мейман назвал функциями класса HB. *

Комбинируя обобщенную теорему Эрмита — Билера с некоторыми следствиями из леммы 2, мы получаем ряд экстремальных свойств целых функций конечной степени, являющихся обобщением некоторых теорем С. Н. Бернштейна из его книги «Экстремальные свойства полиномов».

Пользуясь этим же методом, мы устанавливаем некоторые новые неравенства для целых функций конечной степени, которые содержат как частный случай неравенства, доказанные недавно С. Б. Стечкиным ([11]), С. М. Никольским ([12]) и С. Н. Бернштейном ([13]).

В конце статьи дано дополнение, в котором мы находим необходимые и достаточные условия того, чтобы целая функция конечной степени имела мажоранту класса P.

§ 1. В этом параграфе мы докажем две леммы общего характера, на которые будем опираться в дальнейшем изложении, и установим некоторые общие свойства функций класса P (см. введение).

ЛЕММА 1. *Если $\psi(z)$ — функция, голоморфная и экспоненциального типа в верхней полуплоскости (т. е. $\overline{\lim}\frac{\ln|\psi(z)|}{|z|} < \infty$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и $|z| \to \infty$), и $|\psi(x)| \leqslant 1$ **, то существует*

* Н. Н. Мейман провел также ряд других исследований, связанных с теоремой Эрмита — Билера ([10]).

** Это условие можно заменить более слабым:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|\psi(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

$$d = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\psi(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \tag{1.00}$$

и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{\alpha_k}, \tag{1.10}$$

где α_k — *все корни функции* $\psi(z)$ *в верхней полуплоскости.*

Доказательство основывается на известной формуле Карлемана ([14])

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\psi(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta = \sum \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2}\right) \sin\theta_k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^r \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right) \ln |\psi(x) \cdot \psi(-x)| dx + C_\psi(r), \tag{1.11}$$

где $\alpha_k = r_k e^{i\theta_k}$ — корни функции $\psi(z)$, а $C_\psi(r)$ — ограниченная величина, стремящаяся к определенному пределу при $r \to \infty$.

Первые два члена в правой части равенства (1.11) монотонно растут с ростом r. С другой стороны, как это видно из неравенства

$$\ln |\psi(z)| < (k + \varepsilon) |z| \quad \text{при } \varepsilon > 0, \ \operatorname{Im} z \geqslant 0 \text{ и } |z| \geqslant r_\varepsilon,$$

в левой части равенства (1.11) стоит ограниченная величина. Отсюда легко следуют оба утверждения леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ — *целые функции конечной степени, причем* $\omega(z)$ *не имеет корней в верхней полуплоскости и*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{1.12}$$

Тогда функция $\psi(z) = \frac{f(z)}{\omega(z)}$ *экспоненциального типа в верхней полуплоскости, причем*

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k \sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{1.20}$$

и

$$|\psi(z)| \leqslant e^{ky} \quad (y = \operatorname{Im} z \geqslant 0). \tag{1.21}$$

Здесь $k = h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *а* $h_f(\theta)$ — *индикатор роста функции* $f(z)$ (см. введение).

Доказательство. По известному критерию Линделёфа принадлежности функции целого порядка $\omega(z)$ к нормальному типу,

$$\left| \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} \frac{1}{\alpha_k} \right| \leqslant M < \infty, \tag{1.30}$$

где M не зависит от r и α_k — корни функции $\omega(z)$.

Принимая во внимание условие $\operatorname{Im} \alpha_k \leqslant 0$, мы получаем отсюда, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{\alpha_k}$ сходится.

Заметим, далее, что из представления

$$\omega(z) = cz^m e^{pz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}$$

следует, что при $y>0$

$$|\omega(iy)|\geqslant|c||y|^m\exp\left(-\operatorname{Im}p-\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right)y$$

или при $y>1$

$$\omega(iy)>|c|\exp\ k_1 y, \tag{1.40}$$

где c — константа и

$$k_1=-\left(\operatorname{Im}p+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Отсюда получим, что

$$h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\overline{\operatorname{Lim}}_{y\to\infty}\frac{\ln|\psi(iy)|}{y}\leqslant\tau-k_1, \tag{1.41}$$

где τ — степень функции $f(z)$. Далее, из (1.41) и (1.12) убеждаемся, что функция

$$\varphi(z)=\psi(z)\exp[i(k+\varepsilon)z] \tag{1.42}$$

при $k=h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\varepsilon>0$ ограничена при $z=x$ $(-\infty<x<\infty)$ и $z=iy$ $(y>0)$.

Кроме того, по классической теореме Адамара, существует последовательность окружностей $|z|=r_j$ $(r_j\to\infty)$, на которых выполняется неравенство

$$|\omega(z)|>\exp(-|z|^{1+\varepsilon}). \tag{1.43}$$

Так как $|f(z)|<c\exp[(\tau+\varepsilon)|z|]$, то при $j>j_\varepsilon$ и $|z|=r_j$

$$|\varphi(z)|<\exp(|z|^{1+\varepsilon}). \tag{1.44}$$

По принципу Фрагмена — Линделёфа, из ограниченности функции $\varphi(z)$ при $z=x$ $(-\infty<x<\infty)$ и $z=iy$ $(y>0)$ и из (1.44) следует, что функция $\varphi(z)$ ограничена при $\operatorname{Im}z\geqslant0$. Так как из (1.12) имеем $|\varphi(x)|\leqslant1$ при $-\infty<x<\infty$, то, в силу того же принципа, получается $|\varphi(z)|\leqslant1$ при $\operatorname{Im}z\geqslant0$. Таким образом,

$$|\psi(z)|\leqslant e^{(k+\varepsilon)y}\quad(y=\operatorname{Im}z\geqslant0)$$

при любом $\varepsilon>0$, а следовательно,

$$|\psi(z)|\leqslant e^{ky}\quad\left(y=\operatorname{Im}z\geqslant0,\quad k=h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Второе утверждение леммы доказано.

Для доказательства первого утверждения воспользуемся неравенством Неванлинны ([14]) $(y<r)$:

$$\frac{\ln|\psi(iy)|}{y}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}\ln|\psi(x)|\left\{\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{r^2}{r^4+x^2y^2}\right\}dx+$$

$$+\frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi}\ln|\psi(re^{i\theta})|\frac{(r^2-y^2)\sin\theta d\theta}{|r^2e^{2i\theta}+y^2|^2} \tag{1.50}$$

или

$$\frac{\ln|\psi(iy)|}{y} \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta + \int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})| O\left(\frac{1}{r^s}\right) d\theta. \quad (1.51)$$

Первое слагаемое, по лемме 1, имеет предел $2d$ при $r\to\infty$. С другой стороны, из (1.43) следует, что при $j > j_\varepsilon$

$$\ln|\psi(r_j e^{i\theta})| < r_j^{1+\varepsilon}.$$

Положив в (1.51) $r = r_j$ и перейдя к пределу при $j\to\infty$, получим при $y > 0$

$$2d \geqslant \frac{\ln|\psi(iy)|}{y}$$

или

$$2d \geqslant \overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|\psi(iy)|}{y} = k. \quad (1.52)$$

С другой стороны, из (1.21) следует

$$\frac{\ln|\psi(re^{i\theta})|}{r} \leqslant k\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \quad (1.53)$$

или

$$\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \leqslant k.$$

Сопоставляя этот результат с (1.52), получаем

$$2d = \lim_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta = k. \quad (1.60)$$

Из (1.53) и (1.60) легко следует, что если $r_n\to\infty$, то для всех значений $0 < \theta < 1$, за исключением, быть может, множества меры нуль, существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\psi(r_n e^{i\theta})|}{r_n} = k\sin\theta. \ *$$

По теореме В. Бернштейна, для целой функции степени σ при всех значениях θ имеет место равенство **

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\chi(n\delta e^{i\theta})|}{n\delta} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\chi(re^{i\theta})|}{r} = h_\chi(\theta),$$

если $\frac{\pi}{\delta} > \sigma$.

---

* Можно доказать более сильное утверждение, а именно, что при $r > r_\varepsilon$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$\left|\frac{\ln|\psi(re^{i\theta})|}{r} - k\sin\theta\right| < \varepsilon,$$

если только r не принадлежит некоторому множеству нулевой плотности.

** см. ([14]), стр. 100.

Выберем число δ так, чтобы иметь $\frac{\pi}{\delta} > \max(\sigma, r)$, где σ — степень функции $\omega(x)$, а τ — степень функции $f(x)$, и положим $r_n = n\delta$. Тогда почти для всех значений $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|f(r_n e^{i\theta})|}{r_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\omega(r_n e^{i\theta})|}{r_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\psi(r_n e^{i\theta})|}{r_n}$$

и, в силу теоремы В. Бернштейна,

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k\sin\theta \quad \left(k = h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{1.70}$$

Так как все входящие в это равенство функции непрерывны, то (1.70) выполняется во всем сегменте $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Индикаторная диаграмма целой функции $\omega(z)$ конечной степени, не имеющей корней в нижней полуплоскости, симметрична относительно некоторой прямой, параллельной оси абсцисс.*

Для доказательства достаточно положить в лемме 2 $f(z) = \omega(z)$ и $\omega(z)$ заменить функцией $\overline{\omega}(z)$; так как $h_{\overline{\omega}}(\theta) = h_\omega(-\theta)$, то (1.20) запишется в виде

$$h_\omega(\theta) = h_\omega(-\theta) = k\sin\theta.$$

Таким образом, верхняя часть диаграммы $(0 < \theta < \pi)$ получается из нижней $(-\pi < \theta < 0)$ преобразованием симметрии относительно вещественной оси и сдвигом в направлении оси Oy на отрезок k.

Осью симметрии индикаторной диаграммы функции служит прямая $y = \frac{k}{2}$.

Определение. Число $-\frac{k}{2} = h\left(-\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ мы будем называть *дефектом* целой функции конечной степени $\omega(z)$ и обозначать через d_ω.

Из формулы (1.60) следует, что если $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, то

$$d_\omega = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln\left|\frac{\omega(re^{i\theta})}{\overline{\omega}(re^{i\theta})}\right| \sin\theta d\theta. \tag{1.71}$$

Отсюда получаем

Следствие 2. *При перемножении целых функций конечной степени, не имеющих корней в нижней полуплоскости, их дефекты складываются.*

Класс P может быть, очевидно, определен как класс целых функций конечной степени с неотрицательным дефектом, не имеющих корней в нижней полуплоскости.

Из следствия 2 получаем, что *произведение функций класса P есть функция класса P.*

При $\psi(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}$ в неравенстве (1.21) $k = -2d_\omega$ и легко получается

Следствие 3. *Для того чтобы функция конечной степени $\omega(z)$, не имеющая общих невещественных корней с функцией $\overline{\omega}(z)$, принадле-*

жала к классу P, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}\right| \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{1.72}$$

Таким образом, класс P состоит из всех функций конечной степени, принадлежащих классу HB (см. введение).

Следствие 4. *Если последовательность $\omega_n(z)$ функций класса P сходится равномерно в каждой ограниченной области к функции конечной степени $\omega(z)$, то $\omega(z)$ есть также функция класса P.*

Очевидно, $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости. Кроме того, из неравенств $\left|\frac{\omega_n(z)}{\overline{\omega_n(z)}}\right| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ следует $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}\right| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Следствие 5. *Всякая функция $\omega(z)$ класса P представляется в форме*

$$\omega(z) = c \cdot z^m e^{az} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{z \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}, \tag{1.73}$$

причем $\nu = \operatorname{Im} a = d_\omega \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \alpha_k \geqslant 0$. *

Доказательство. При доказательстве леммы 2 мы, исходя из известной теоремы Линделёфа, получили, что если целая функция $\omega(z)$ конечной степени не имеет корней в нижней полуплоскости, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)$ сходится. Заметив это, мы, воспользовавшись общим разложением Вейерштрасса для функции $\omega(z)$ не выше чем первого рода, легко получим разложение вида (1.73). Покажем, что $\nu = \operatorname{Im} a \geqslant 0$.

В самом деле, если $\omega(z) \in P$, то $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}\right| < 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Умножив функцию $\psi(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}$ на конечное произведение

$$\chi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z}{\overline{\alpha_k}}}{1 - \frac{z}{\alpha_k}} \right)$$

и применяя принцип Фрагмена — Линделёфа, получим

$$|\psi(z)\chi_n(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{1.73'}$$

Из сходимости ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)$ следует сходимость бесконечного произведения $\chi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \frac{z}{\overline{\alpha_k}}} \right)$ и, переходя к пределу в (1.73′) при $n \to \infty$,

* М. Г. Крейн [(6), стр. 239] дал аналогичное представление для произвольной целой функции класса B.

получаем

$$|\psi(z)\chi(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

или, что то же, $|e^{2i\nu z}| \leqslant 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Отсюда следует, что $\nu \geqslant 0$. Так как функция $\varphi(z) = \omega(z) e^{-id_\omega z} \in P$, то, по доказанному, $\nu - d_\omega \geqslant 0$. С другой стороны, функция $\varphi(z) = \omega(z) e^{-i\nu z} \in P$, так как

$$\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi(z)}} = \chi(z)$$

и, очевидно, $|\chi(z)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Следовательно, $d_\omega \geqslant \nu$. Итак, $\nu = d_\omega$.

Замечание 1. *Если функция $\omega(z)$ имеет представление* (1.73) *при* $\operatorname{Im} a \geqslant 0$, *то существует такая последовательность полиномов $\omega_n(z)$, не имеющих корней в нижней полуплоскости, что $\omega_n(z) \rightrightarrows \omega(z)$ в любой ограниченной области.*

В самом деле, при заданной области G и заданном $\varepsilon > 0$ можно выбрать число p так, что

$$\left| \omega(z) - cz^m e^{\varkappa_p z} \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z \in G, \tag{1.74}$$

где

$$\varkappa_p = a + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Очевидно, что при достаточно большом значении натурального числа q полином

$$\omega_{q,p}(z) = cz^m \left(1 + \frac{\varkappa_p z}{q}\right)^q \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)$$

удовлетворяет неравенству

$$|\omega(z) - \omega_{p,q}(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in G. \tag{1.75}$$

Этот полином не имеет корней в нижней полуплоскости, так как $\operatorname{Im} \varkappa_p = \nu \geqslant 0$.

§ 2. Покажем, как на функции класса P обобщается теорема Эрмита — Билера.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы целая функция конечной степени*

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z), \tag{2.00}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные функции, была функцией класса P, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

А) *Функции $P(z)$ и $Q(z)$ конечной степени и представляются в форме*

$$P(z) = R(z) \cdot P_1(z) \quad \text{и} \quad Q(z) = R(z) \cdot Q_1(z),$$

где $P_1(z)$, $Q_1(z)$ и $R(z)$ — вещественные целые функции, имеющие лишь вещественные корни, причем корни функций $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ простые и взаимно разделяются (т. е. между любыми двумя корнями одной функции находится корень другой).

В) *Индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают.*

C) *При некотором вещественном* $x = x_0$

$$Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0. \ *$$

Доказательство необходимости: Из следствия 3 § 1 получаем, что функция $\psi(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости $z\,(\operatorname{Im} z > 0)$ на единичный круг $(|\psi| < 1)$ плоскости ψ. Преобразуя с помощью функции $F = \frac{1}{i}\frac{\psi - 1}{\psi + 1}$ единичный круг плоскости ψ на верхнюю полуплоскость плоскости F, мы получим функцию

$$F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{2.10}$$

отображающую верхнюю полуплоскость плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости F.

Из вещественности этой функции следует также, что она нижнюю полуплоскость отображает на нижнюю.

Иначе, при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что все корни и полюсы функции $F(z)$ вещественные. Общие корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ являются также общими корнями функций $\omega(z)$ и $\overline{\omega}(z)$ и, следовательно, вещественные.

Из (2.11) также следует и то, что когда точка z обходит один раз произвольную окружность с центром на вещественной оси, то приращение функции $\arg F(x)$ не превосходит по абсолютной величине числа 2π. Таким образом, разность между числом полюсов и числом корней функции $F(z)$, попавших в такую окружность, не превосходит единицы.

Итак, все корни и полюсы функции $F(z)$ простые, между двумя соседними полюсами функции $F(z)$ находится точно один ее корень и между двумя соседними корнями один полюс. Иначе говоря, выполнено условие A).

Перенумеруем корни функции $P_1(z) - \{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ так, чтобы $a_{-1} \cdot a_0 < 0$ (не нарушая общности, можно считать, что нуль не является корнем функций $P_1(z)$ или $Q_1(z)$), и корни $Q_1(z) - \{b_k\}_{-\infty}^{\infty}$ так, чтобы $a_{k-1} < b_k < a_k\,(\pm k = 0, 1, 2, \ldots,)$. Легко видеть, что произведение

$$\Phi(z) = \frac{b_0}{a_0} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{b_k}}{1 - \frac{z}{a_k}} \tag{2.12}$$

сходится и что

$$\arg \Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\arg(z - b_k) - \arg(z - a_k)],$$

---

* Здесь мы исключаем тот тривиальный случай, когда $\omega(z)$ с точностью до постоянного множителя — вещественная функция. Тогда возможно, что функция $Q(z) \equiv 0$ и, следовательно, не имеет индикаторной диаграммы. Кроме того, в этом случае

$$Q'(x)P(x) - Q(x)P'(x) \equiv 0.$$

откуда при $\operatorname{Im} z > 0$ $0 < \arg \Phi(z) < \pi$. Иначе, при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$\operatorname{Im} \Phi(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.13}$$

С другой стороны, из представления целых функций

$$\begin{gathered} P_1(z) = c_1 e^{pz} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}, \\ Q_1(z) = c_2 e^{qz} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) e^{\frac{z}{b_k}}, \ * \end{gathered} \tag{2.14}$$

где p, q, c_1, c_2 — вещественные числа, следует, что

$$F(z) = c e^{\delta z} \Phi(z), \tag{2.15}$$

причем c и $\delta = q - p + \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}\right)$ — вещественные числа. Сопоставляя (2.11), (2.13) и (2.15), мы получаем, что при $\operatorname{Im} z > 0$

$$-\pi < \arg c e^{\delta z} < 2\pi,$$

что возможно лишь при $\delta = 0$. Таким образом,

$$Q(z) = c\, \Phi(z) P(z). \tag{2.16}$$

В силу известных неравенств Каратеодори для функций, отображающих полуплоскость на полуплоскость, получаем неравенства

$$c_3 \frac{|\sin \theta|}{r} \leqslant |\Phi(re^{i\theta})| \leqslant c_4 \frac{r}{|\sin \theta|}, \tag{2.17}$$

в которых c_3 и c_4 — константы, зависящие лишь от $\Phi(z)$, и $\left|\theta \pm \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$.

Из (2.16) и (2.17) следует, что при $\theta \neq 0, \pi$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |Q(re^{i\theta})|}{r} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |P(re^{i\theta})|}{r},$$

а в силу непрерывности обоих индикаторов роста, равенство $h_Q(\theta) = h_P(\theta)$ выполняется при всех значениях θ, т. е. индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают.

Для доказательства условия С) достаточно заметить, что, в силу (2.11), отношение $F(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ монотонно возрастает. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Из условия А) и представления (2.14) следует (2.15), т. е.

$$Q(z) = c e^{\delta z} \Phi(z) P(z), \tag{2.20}$$

где c и δ — вещественные числа. Далее, из (2.20) и неравенства Каратеодори (2.17) вытекает, что индикаторная диаграмма функции $Q(z)$ получается из индикаторной диаграммы функции $P(z)$ параллельным

* Бесконечные произведения сходятся, так как точки взяты из множества корней функции конечной степени.

сдвигом на отрезок δ. Но, по условию B), индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают и, следовательно, в (2.20) следует положить $\delta = 0$. Сопоставляя (2.20) с (2.13), получаем

$$\operatorname{sign}\{\operatorname{Im} F(z)\cdot \operatorname{Im} z\} = \operatorname{sign} C \quad \text{при } \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Присоединяя условие C), которое можно записать в форме $F'(x_0) > 0$, убеждаемся в том, что

$$\operatorname{Im} F(z)\cdot \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Итак, функция $F = F(z)$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости F. Преобразуя с помощью функции $\psi = \frac{F-i}{F+i}$ верхнюю полуплоскость плоскости F на единичный круг плоскости ψ, мы получим, что

$$\left|\frac{\omega(z)}{\bar{\omega}(z)}\right| < 1 \quad \text{при } \operatorname{Im} z > 0.$$

Кроме того, функции $\omega(z)$ и $\bar{\omega}(z)$ не имеют общих невещественных корней, так как в противном случае такие корни были бы у функций $P(z)$ и $Q(z)$, что противоречит условию A). По следствию 3 § 1, функция $\omega(z)$ принадлежит классу P. Теорема доказана.

Из совпадения индикаторов $h_P(\theta) = h_Q(\theta)$ непосредственно следует

Замечание. Если $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ есть функция класса P, то

$$h_\omega(\theta) \leqslant h_P(\theta) = h_Q(\theta).$$

Проанализируем связь между условиями A), B) и C) теоремы 1. При доказательстве достаточности условий мы установили, что если функции конечной степени $P(z)$ и $Q(z)$ удовлетворяют условию A), то индикаторная диаграмма функции $Q(z)$ получается из индикаторной диаграммы функции $P(z)$ параллельным сдвигом на вещественный отрезок δ. Рассмотрим теперь тот случай, когда условие B) не выполнено, т. е. $\delta \neq 0$. При этом, конечно, [см. (2.20)] функция

$$[e^{-\delta x} F(x)]' = c\Phi'(x)$$

сохраняет знак при $-\infty < x < \infty$, ибо $\Phi'(x) \geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если функции конечной степени $P(z)$ и $Q(z)$ удовлетворяют условию* A) *теоремы* 1 *и* $\delta = h_Q(0) - h_P(0) \neq 0$, *то*:

1) *дефект функции* $\omega(z)$ $d_\omega = 0$;

2) *если* $[e^{-\delta x} F(x)]' \geqslant 0$, *то в каждой из полос*

$$\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < |\delta| y < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 1, 2, \ldots; y = \operatorname{Im} z) \tag{2.21}$$

и

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi < |\delta| y < \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi \quad (-n = 1, 2, \ldots; y = \operatorname{Im} z) \tag{2.22}$$

находится точно один корень функции $\omega(z)$. *Все остальные ее корни находятся в полосе*

$$0 \leqslant y < \frac{\pi}{2|\delta|}. \tag{2.23}$$

При $[e^{-\delta x}F(x)]' \leqslant 0$ *утверждение остается верным, если все полосы* (2.21), (2.22) *и* (2.23) *заменить симметричными им относительно вещественной оси.*

Доказательство положения 1) основывается на равенстве (2.20), из которого следует, что

$$\omega(z) = P(z)\chi(z),$$

где $\chi(z) = 1 + ice^{\delta z}\Phi(z)$. Из неравенств (2.17) следует, что предел

$$h_\chi(\theta) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\chi(re^{i\theta})|}{r}$$

существует, если $\theta \neq m\frac{\pi}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, причем при $\delta > 0$ (для определенности) и $|\theta - \pi| < \frac{\pi}{2}$ верно $h_\chi(\theta) = 0$, а при $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ верно $h_\chi(\theta) = \delta\cos\theta$. Отсюда получаем

$$h_\omega(\theta) = h_P(\theta) + h_\chi(\theta).$$

Таким образом, индикаторная диаграмма функции $\omega(z)$ является наименьшей выпуклой областью, содержащей индикаторную диаграмму функции $P(z)$ и эту же диаграмму, сдвинутую на отрезок δ. Она, очевидно, симметрична относительно оси абсцисс и, следовательно, $d_\omega = 0$.

Для доказательства положения 2) оценим предварительно сумму

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{z-b_k} - \frac{1}{z-a_k}\right]. \tag{2.30}$$

Функция $u = \frac{1}{z-\zeta}$ отображает, при фиксированном z, вещественную ось плоскости ζ на окружность (c), построенную на отрезке $\left(0, \frac{1}{iy}\right)$ $(y = \operatorname{Im} z)$ как на диаметре. Точки $\frac{1}{z-b_k}$ и $\frac{1}{z-a_k}$ располагаются на этой окружности в том же порядке, в каком расположены точки b_k и a_k на вещественной оси.

Каждый вектор $\left[\frac{1}{z-b_k} - \frac{1}{z-a_k}\right]$ изображается хордой окружности (c), причем эти хорды не пересекаются, а их направления таковы, что соответствующее им направление обхода окружности сохраняется. Сумма проекций всех этих векторов на любое направление меньше диаметра окружности (c). Таким образом, имеем

$$\left|\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right| < \frac{1}{|y|} \quad \text{при } y = \operatorname{Im} z \tag{2.31}$$

и из (2.20) получаем, что при $|y| > \frac{1}{|\delta|}$

$$[\ln F(z)]' = \delta + \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \neq 0. \tag{2.32}$$

Отсюда следует, что вдоль каждой кривой $\arg F(z) = \text{const}$, расположенной в одной из полуплоскостей $|y| > \frac{1}{|\delta|}$, функция $\ln|F(z)|$ меняется монотонно.

Из (2.20), как уже было отмечено, следует

$$F(z) = ce^{\delta z}\Phi(z), \tag{2.33}$$

где c — вещественная константа и, так как $\Phi'(x) \geqslant 0$, то

$$\operatorname{sign}[e^{-\delta x}\cdot F(x)]' = \operatorname{sign} c.$$

Положим, для определенности, $c > 0$ и $\delta > 0$. Корни функции $\omega(z)$ или, что то же, корни уравнения $F(z) - i = 0$, очевидно, должны лежать на кривых

$$\delta y + \arg\Phi(z) = 2\pi n + \frac{\pi}{2}. \tag{2.34}$$

Но при $y > 0$ имеем $0 < \arg\Phi(z) < \pi$, следовательно, кривые (2.34), находящиеся в верхней полуплоскости, расположены в полосах

$$\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < \delta y < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.35}$$

При $n \geqslant 1$ получается $y > \frac{3}{2}\frac{\pi}{\delta}$ и из (2.32) и (2.33) заключаем, что вдоль кривых, соответствующих этим значениям n, функция $\ln|F(z)|$ монотонно меняется от $-\infty$ до ∞.

Таким образом, в каждой из полос (2.35) при $n = 1, 2, \ldots$ находится точно один корень функции $\omega(z)$. Так как при $y < 0$ имеем $-\pi < \arg\Phi(z) < 0$, то в нижней полуплоскости кривые (2.34) расположены в полосах

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi < \delta y < \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi \quad (-n = 1, 2, \ldots). \tag{2.36}$$

Во всех этих полосах $|y| > \frac{\pi}{2\delta}$ и снова из (2.32) и (2.33) заключаем, что в каждой полосе (2.36) находится точно один корень функции $\omega(z)$. Все остальные корни $\omega(z)$ должны лежать в пересечении верхней полуплоскости и полосы $-\frac{\pi}{2} < \delta y < \frac{\pi}{2}$, т. е. в полосе $0 \leqslant \delta y < \frac{\pi}{2}$. Случаи $\delta < 0$ и $c < 0$ исследуются аналогично.

Из 1) следует, что при выполнении условия А) при $d_\omega \neq 0$ в равенстве (2.33) $\delta = 0$. Если при этом $c > 0$, то

$$\operatorname{Im} F(z)\cdot\operatorname{Im} z > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0$$

и $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}\right| < 1$, т. е. в этом случае $\omega(z) \in P$. Если же $c < 0$, то $\overline{\omega}(z) \in P$.

Итак, получается

ТЕОРЕМА 3. *Если дефект функции* $\omega(z)$ *положителен* ($d_\omega > 0$), *то условие* А) *является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция* $\omega(z)$ *не имела корней в нижней полуплоскости* (*т. е. чтобы* $\omega(z) \in P$).

Если $d_\omega < 0$ *и* $\omega(z)$ *не имеет корней в нижней полуплоскости, то условие* А) *не может быть выполнено, т. е. на этот случай теорема Эрмита—Билера не переносится.*

Определение. Пару целых функций $P(z)$ и $Q(z)$ мы будем, следуя Н. Г. Чеботареву ([7]), называть *вещественной парой*, если при любых вещественных μ и ν функция $\mu P(z) + \nu Q(z)$ имеет лишь вещественные корни.

Замечание (Н. Г. Чеботарев). Для того чтобы целая функция $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ принадлежала классу HB, необходимо и достаточно, чтобы функции $P(z)$ и $Q(z)$ составляли вещественную пару и чтобы в некоторой точке выполнялось

$$Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0.$$

В самом деле, тот факт, что $P(z)$ и $Q(z)$ образуют вещественную пару, означает, что функция

$$F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \tag{2.40}$$

не принимает вещественных значений при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

При $Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0$ имеем $F'(x_0) > 0$ и функция $F(z)$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости z $(\operatorname{Im} z > 0)$ на верхнюю полуплоскость плоскости $F(\operatorname{Im} F > 0)$, а следовательно, $\psi(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}$ отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг, т. е.

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega(z)}}\right| < 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.41}$$

Все корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ вещественны и, следовательно, функции $\omega(z)$ и $\overline{\omega(z)}$ не имеют общих невещественных корней. Итак, $\omega(z) \in HB$.

Обратное положение следует немедленно, если заметить, что (2.41) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0 \text{ при } \operatorname{Im} z \neq 0.$$

§ 3. В этом параграфе мы установим общий принцип, позволяющий доказывать неравенства, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна, и дадим некоторые приложения этого принципа.

ЛЕММА 3. *Пусть $\omega(z)$ и $f(z)$ — функции конечных степеней соответственно σ и τ, причем $\sigma \geqslant \tau$. Для того чтобы функция*

$$\varphi_u(z) = f(z) - u\omega(z) \tag{3.00}$$

принадлежала классу P при любом комплексном u, удовлетворяющем условию $|u| \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(z)$ принадлежала классу P и чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3.10}$$

Доказательство необходимости. При $u \to \infty$ функция $\frac{1}{u}\varphi_u(z)$ стремится к $\omega(z)$ равномерно в любой ограниченной области и, по следствию 4 § 1, $\omega(z) \in P$. Далее, функция $\frac{\varphi_u(z)}{\omega(z)} = \frac{f(z)}{\omega(z)} - u$ голоморфна и не обращается в нуль в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, если только $|u| \geqslant 1$. Иначе, $\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| < 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и, следовательно, выполнено (3.10).

Доказательство достаточности. Рассмотрим частное

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\omega(z)}. \tag{3.11}$$

Эта функция удовлетворяет (с заменой верхней полуплоскости на нижнюю) условиям леммы 2 § 1 и, следовательно,

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k|\sin\theta| \quad (\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{3.12}$$

и

$$|\psi(z)| \leqslant e^{k|y|} \quad \text{при} \quad y = \operatorname{Im} z < 0.$$

Как видно из (3.12), нижняя часть индикаторной диаграммы функции $f(z)$ получается из нижней части индикаторной диаграммы функции $\omega(z)$ сдвигом на отрезок k в направлении мнимой оси. При $k > 0$ мы будем иметь

$$\tau \geqslant \sup h_f(\theta) \geqslant \sqrt{k^2 + \sigma^2} > \sigma,$$

что противоречит условию леммы. Итак, $k \leqslant 0$ и, следовательно,

$$|\psi(x)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{3.13}$$

Знак равенства в (3.13) хотя бы в одной точке z_0, $\operatorname{Im} z_0 < 0$, возможен лишь, если $f(z) \equiv e^{i\gamma} \cdot \omega(z)$ (γ — вещественная константа), и тогда $\varphi_u(z) \in P$, при всех значениях u.

Если в (3.13) нет тождественного равенства, то $|\psi(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и при $|u| \geqslant 1$ функция $\varphi_u(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости.

Пусть $|u| > 1$. Тогда при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ имеем

$$|\psi(z) - u| \geqslant |u| - 1$$

и, следовательно,

$$h_\varphi(\theta_0) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\varphi_u(re^{i\theta})|}{r} = \sigma \quad \text{при} \quad h_\varphi(\theta_0) = \sigma.$$

С другой стороны, $h_\varphi(-\theta_0) \leqslant \sigma$ и, так как (см. следствие 1 § 1) индикаторная диаграмма функции $\varphi_u(z)$ симметрична относительно прямой, параллельной вещественной оси, то $h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и дефект функции $\varphi_u(z)$ неотрицателен.

Итак, при $|u| > 1$ имеем $\varphi_u(z) \in P$.

При $|u| = 1$ следует сделать предельный переход при $u \to e^{i\gamma}$ и $|u| > 1$ и воспользоваться следствием 4 § 1. Лемма доказана*.

Определение. Аддитивный однородный оператор $\mathfrak{B}[f(z)]$ над функциями конечной степени мы будем называть *$\mathfrak{B}$-оператором*, если он функции класса P переводит в функции класса P.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\omega(z)$ — функция класса P степени σ и $f(z)$ — целая функция степени $\tau \leqslant \sigma$, а $\mathfrak{B}[f(x)]$ — произвольный $\mathfrak{B}$-оператор, то из неравенства*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.20}$$

следует неравенство

$$|\mathfrak{B}[f(x)]| \leqslant |\mathfrak{B}[\omega(x)]| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3.21}$$

* Это доказательство является развитием одного приема, примененного Н. И. Ахиезером ([5]).

Доказательство основывается на лемме 3. При выполнении условий теоремы 4 функция

$$\varphi_u(z) = f(z) - u\omega(z)$$

принадлежит классу P при $|u| \geqslant 1$. Применяя оператор $\mathfrak{B}$, мы получаем, что

$$\mathfrak{B}[f(z)] - u\,\mathfrak{B}[\omega(z)] \in P \quad \text{при} \quad |u| \geqslant 1.$$

В силу первой части леммы 3 (необходимости), отсюда следует (3.21). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Оператор дифференцирования* $f'(x) = Df(x)$ *есть* $\mathfrak{B}$-*оператор.*

Для доказательства рассмотрим мнимую часть производной от логарифма функции $\omega(z)$ класса P. Из представления (1.73) получается

$$\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \nu + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(y-\gamma_k)}{(x-\beta_k)^2+(y-\gamma_k)^2}, \tag{3.30}$$

где $d_\omega = \nu \geqslant 0$, $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$ $(\gamma_k \geqslant 0)$, и, легко видеть, что при $y < 0$ $\omega'(z) \neq 0$.

Пусть

$$M_1(r) = \max_{|z|=r}|\omega'(z)|, \qquad M(r) = \max_{|z|=r}|\omega(z)|.$$

Так как $M_1(r)$ монотонно растет с ростом r, то

$$|\omega(z) - \omega(0)| = \left|\int_0^z \omega'(z)\,dz\right| \leqslant M_1(r)\cdot r,$$

или

$$M_1(r) \geqslant |M(r) - |\omega(0)||\cdot r^{-1}. \tag{3.31}$$

Отсюда следует, что степень функции при дифференцировании не уменьшается.

С другой стороны, как известно [см., например, ([1])], при произвольном $\varepsilon > 0$ и $r > r_\varepsilon$

$$\ln|\omega(re^{i\theta})| < (h(\theta) + \varepsilon)r \tag{3.32}$$

и из неравенства

$$|\omega'(z_0)| \leqslant \max_{|\zeta|=1}|\omega(z_0+\zeta)|,$$

вытекающего из формулы Коши, получаем

$$h_{\omega'}(\theta) \leqslant h_\omega(\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \tag{3.33}$$

Если дефект функции $\omega(z)$ положителен $(d_\omega > 0)$, то ось симметрии индикаторной диаграммы проходит под осью абсцисс и $h_\omega(\theta) < \delta$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, а из (3.33) следует, что и $h_{\omega'}(\theta) < \delta$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. С другой стороны, из (3.31) следует, что степень функции $\omega'(z)$ равна σ и, следовательно [см. ([1])], при некотором $\theta = \theta_0$ $h_{\omega'}(\theta_0) = \sigma$. Очевидно, $\pi < \theta_0 < 2\pi$ и $h_{\omega'}(-\theta_0) < \sigma$. Отсюда следует, что дефект функции $\omega'(z)$ положителен. Более того, из неравенства (3.33) и $h_\omega(\theta_0) \leqslant \sigma$ следует, что $d_{\omega'} \geqslant d_\omega$. Если $d_\omega = 0$, то функция $e^{ipz}\omega(z)$ при $p > 0$

принадлежит классу P, а следовательно, и $[e^{ipz}\omega(z)]' \in P$. Переходя к пределу при $p \to 0$, мы, на основании следствия 4 § 1, заключим, что $\omega'(z) \in P$.

Замечание 1. При дифференцировании функции класса P ее дефект не уменьшается.

Замечание 2. Если функция $\omega(z)$ класса P не имеет кратных вещественных корней и $\omega'(z)$ имеет хотя бы один вещественный корень, то $\omega(z)$ — с точностью до постоянного множителя вещественная функция. В самом деле, из (3.30) следует, что $\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$ может обратиться в нуль при $y=0$ только, если $\nu=0$ и $\operatorname{Im}\alpha_k=0$ при всех $k=1, 2, \ldots$, а это, как видно из представления (1.73), эквивалентно тому, что $\omega(z)$ вещественна с точностью до постоянного множителя.

ТЕОРЕМА 6. *Если $\omega(z)$ такая целая функция степени $\sigma \geqslant 0$, что ни $\omega(z)$, ни $\overline{\omega}(z)$, не принадлежат классу P, то существует целая функция $f(z)$ степени $\tau \leqslant \sigma$, удовлетворяющая неравенству* (3.20) *и такая, что в некоторой вещественной точке x_0*

$$|f'(x_0)| > |\omega'(x_0)|.$$

Доказательство. Пусть функция $\omega(z)$ имеет корни в обеих полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. Выберем точку x_0 так, чтобы $\omega(x_0) \neq 0$ и $\omega'(x_0) \neq 0$. Пусть, для определенности, $\operatorname{Im}\frac{\omega(x_0)}{\omega'(x_0)} \leqslant 0$. Положим

$$f(z) = \frac{z-\overline{\alpha}}{z-\alpha}\,\omega(z),$$

где α — корень функции $\omega(z)$ из верхней полуплоскости. Очевидно, имеем

$$|f(x)| = |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

С другой стороны,

$$|f'(x)| = |\omega'(x)| \cdot \left|2i \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\omega(x)}{\omega'(x)} + 1\right|.$$

При $x = x_0$ отличный от нуля вектор $2i \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\omega(x_0)}{\omega'(x_0)}$ образует с положительным направлением вещественной оси угол, не превосходящий прямого и, следовательно,

$$|f'(x_0)| > |\omega'(x_0)|.$$

Пусть $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости. Для того чтобы ни $\omega(z)$, ни $\overline{\omega}(z)$ не принадлежали классу P, необходимо, чтобы $\omega(z)$ имела по меньшей мере один корень в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}\alpha > 0$) и отрицательный дефект $d_\omega < 0$. Положим в этом случае

$$f(z) = e^{2i\delta z}\omega(z),$$

где $\delta = -d_\omega$. Очевидно, что $|f(x)| = |\omega(x)|$ и $\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right\}$.

Кроме того, имеем

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right\} = -\delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}$$

и

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} = \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}.$$

Второе слагаемое в правых частях этих равенств положительно и, следовательно,

$$\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right\}\right| < \left|\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}\right|.$$

Отсюда следует

$$|f'(x)| > |\omega'(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

ЛЕММА 4. *Если функции $f(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и при некотором вещественном числе α функция*

$$\varphi(z) = f(z) - e^{i\alpha}\omega(z)$$

с точностью до постоянного множителя вещественна, то

$$e^{i\gamma}f(x) = \operatorname{Re}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\} + ic\operatorname{Im}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\}, \tag{3.40}$$

где γ и c — вещественные числа, причем $|c| \leqslant 1$ и $\gamma_1 = \gamma + a$.

Доказательство. Выберем вещественное число γ так, что $\operatorname{Re} e^{i\gamma}\varphi(x) = 0$. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}f(x)\} = \operatorname{Re}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\}. \tag{3.41}$$

Пусть

$$e^{i\gamma}f(x) = P(x) + iQ(x) \text{ и } e^{i\gamma_1}\omega(x) = P(x) + iS(x).$$

Из неравенства

$$|P(x) + iQ(x)| \leqslant |P(x) + iS(x)|$$

следует, что

$$|Q(x)| \leqslant |S(x)|. \tag{3.42}$$

Функция $\psi(z) = \frac{Q(z)}{S(z)}$ — целая функция конечной степени, причем

$$|\psi(x)| \leqslant 1. \tag{3.43}$$

По лемме 2, имеем

$$h_Q(\theta) = h_S(\theta) + h_\psi(\theta) \quad (h_\psi(\theta) = |k\sin\theta|).$$

При $k \neq 0$ отсюда следует, что степень функции $Q(z)$ ($\sigma_Q = \max h_Q(\theta)$) больше степени функции $S(z)$ (точнее $\sigma_Q \geqslant \sqrt{\sigma_S^2 + k^2}$), а значит, и степени функции $P(z)$, так как индикаторные диаграммы $P(z)$ и $S(z)$ совпадают [см. условие B) теоремы 1]. Степень функции $f(z)$, очевидно, должна совпадать в этом случае со степенью $Q(z)$ (должны совпадать даже индикаторные диаграммы), а степень функции $\omega(z)$ не превышает степени $P(z)$. Но это невозможно, ибо $\tau > \sigma$ противоречит предположению. Таким образом, $k = 0$. Отсюда и из второй части леммы 2 следует, что $|\psi(z)| \leqslant 1$ во всей комплексной плоскости, а следовательно, $\psi(z) \equiv c$ ($|c| \leqslant 1$) и $Q(z) \equiv cS(z)$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функции* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4 *и* $\mathfrak{B}[f(x)] = f'(x)$. *Тогда для того чтобы в* (3.21) *хотя бы в одной точке имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *имела вид* (3.40).

В самом деле, если $|f'(x_0)| = |\omega'(x_0)|$, то при некотором вещественном α производная от функции

$$\varphi(z) = f(z) - e^{i\alpha}\omega(z)$$

обращается в нуль в точке x_0. Согласно замечанию 2 к теореме 5, $\varphi(z)$ — вещественная функция с точностью до постоянного множителя и, по лемме 4, функция $f(x)$ может быть представлена в форме (3.40).

Перейдем к построению других $\mathfrak{B}$-операторов.

ЛЕММА 5. *Если* $\omega(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + \cdots$ *есть функция класса* P, *то полиномы*

$$P_n^{\omega}(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a_k z^k \tag{3.50}$$

не имеют корней в нижней полуплоскости.

Доказательство. Согласно следствию 6 § 1, существует последовательность полиномов

$$Q_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} z^k, \tag{3.51}$$

не имеющих корней в нижней полуплоскости (класса P), которая равномерно сходится к $\omega(z)$ в любой ограниченной области. При этом, конечно, $a_{k,m} \to a_k$ при $m \to \infty$.

Заметим, что если $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$, то оператор

$$(D - \bar{\alpha}I)f(z) = f'(z) - \bar{\alpha}f(z)$$

есть $\mathfrak{B}$-оператор. Это легко следует из равенства

$$(D - \bar{\alpha}I)f(z) = e^{\bar{\alpha}z}D\left[e^{-\bar{\alpha}z}f(z)\right] \tag{3.52}$$

и замечания 1 к теореме 5. Разложив полином $Q_m(z)$ на множители и использовав сделанное замечание, мы убеждаемся в том, что оператор

$$\bar{Q}_m(D) = \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{k,m} D^k$$

есть $\mathfrak{B}$-оператор. Применяя этот оператор к функции z^n, мы получаем полином $Q_{n,m}(z) = Q_m(D)z^n$, не имеющий корней в верхней полуплоскости. Полином

$$z^n Q_{n,m}\left(\frac{1}{z}\right) = a_{0,m} + a_{1,m}z + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)a_{k,m}z^k + \\ + \cdots + n!a_{n,m}z^n, \tag{3.53}$$

очевидно, не имеет корней в нижней полуплоскости.

Подставляя в (3.53) вместо z $\frac{z}{n}$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся в том, что полином $P_n^{\omega}(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости.

Замечание 1. Если $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — целая функция и

$$P_n^F(z)=c_0+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k z^k, \quad (3.54)$$

то при $n\to\infty$ $P_n^F(z)\to F(z)$ равномерно в любой ограниченной области.

В самом деле, из неравенств Коши

$$|c_k|\leqslant\frac{M(\rho)}{\rho^k} \quad \left(M(\rho)=\max_{|z|=\rho}|\varphi(z)|\right)$$

следует при $|z|\leqslant r$ и $\rho=2r$

$$\left|\sum_{k=p+1}^{\infty} c_k z^k\right|\leqslant M(\rho)\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$$

и

$$\left|\sum_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)c_k z^k\right|<M(\rho)\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}.$$

Отсюда выводим, что

$$|F(z)-P_n^F(z)|<\left|\sum_{k=2}^{p}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]c_k z^k\right|+$$
$$+M(\rho)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}.$$

Выбрав достаточно большим p, а затем n, мы получим

$$|F(z)-P_n^F(z)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |z|\leqslant r.$$

Замечание 2. Если $F(z)$ — вещественная функция и имеет лишь вещественные корни, то и $P_n^F(z)$ имеет лишь вещественные корни.

Это — теорема Иенсена; она следует непосредственно из леммы 5.

По лемме 5, оператор перехода от функции $f(z)$ к полиному есть $\mathfrak{B}$-оператор. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 8. *Если функции $f(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, то*

$$|P_n^f(x)|\leqslant|P_n^\omega(x)| \quad (-\infty<x<\infty). \quad (3.55)$$

ЛЕММА 6. *Если $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — целая функция, то оператор $F(D)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ преобразует все функции конечной степени в функции конечной степени, не увеличивает степень и ряд*

$$F(D)f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(z) \quad (3.56)$$

сходится равномерно в любой ограниченной области.

Доказательство. По известной оценке Коши для коэффициентов ряда Тейлора, имеем

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant k! \frac{M(\rho + |z|)}{\rho^k},$$

где $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. При некоторых $\varepsilon > 0$ и $L_\varepsilon > 0$ имеем

$$M(r) < L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)r},$$

где τ — степень функции $f(z)$.

Воспользовавшись этим неравенством и подставив в (3.56) $\rho = \frac{k}{\tau+\varepsilon}$, мы получим

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|} \cdot \frac{e^k k!}{k^k} (\tau+\varepsilon)^k,$$

или, оценивая $\frac{e^k k!}{k^k}$ по известной формуле Стирлинга, будем иметь

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant 4\pi L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|} (\tau+\varepsilon)^k k \quad (k \geqslant 1). \tag{3.57}$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда (3.56) и оценка

$$|F(D) f(z)| < 4\pi L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k| (\tau+\varepsilon)^k + |c_0| \right). \tag{3.58}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 9. *Если* $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — *целая функция, представимая в форме* (1.73), *то оператор* $\overline{F}(D)$ *есть* $\mathfrak{B}$-*оператор.*

Доказательство. Из того, что полином $P_n^F(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, легко следует (см. доказательство леммы 5), что $\overline{P}_n^F(D)$ есть $\mathfrak{B}$-оператор.

Из неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора функции $F(z)$ и из оценки (3.57), написанной для функции $\omega(z)$, легко получить (см. замечание 1 к лемме 5), что последовательность $\overline{P}_n^F(D)\omega(z)$ сходится равномерно в любой ограниченной области к функции $\overline{F}(D)\omega(z)$. Но в таком случае (следствие 4) $\overline{F}(D)\omega(z)$ есть функция класса P. Теорема доказана.

Замечание. Обозначим класс функций вида

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} \Phi(z) \quad (\gamma \geqslant 0),$$

где $\Phi(z)$ первого рода и класса HB, т. е. вида (1.73), через P^*. Так как

$$e^{-\gamma z^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\gamma z^2}{n}\right)^n,$$

то, как легко видеть, всякая функция $F(z)$ класса P^* порождает $\mathfrak{B}$-оператор $\overline{F}(D)$. *

* Можно показать, что функция, являющаяся пределом полиномов без корней в верхней полуплоскости, принадлежит классу P^*. Более того, для того чтобы

ТЕОРЕМА 10. *Пусть функции* $\omega(z)$ *и* $f(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4, $\omega(z)$ *не имеет вещественных корней, а* $F(D)$ — *оператор, определенный в теореме* 9. *Пусть, кроме того, не имеет места ни одно из тождеств*

$$F(D) \equiv e^{kD}, \ * \qquad \omega(z) \equiv e^{pz} P(z) \quad \text{или} \quad f(z) \equiv e^{i\gamma} \omega(z),$$

где k, p, γ — *вещественные числа, а* $P(z)$ — *полином.*

Для того чтобы в (3.21) *в некоторой точке имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы функции* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ *были связаны соотношением* (3.40), *а функция* $F(z)$ *была вещественной с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство достаточности. В соотношении (3.40) мы можем, не нарушая общности, считать, что $\gamma = \gamma_1 = 0$ и, положив

$$\omega(z) = r(z) + is(z), \tag{3.60}$$

будем иметь

$$f(z) - \omega(z) = ic_1 s(z), \tag{3.61}$$

где c_1 — вещественная константа. По лемме 3, из (3.61) следует, что $S(z)$ принадлежит классу P, а так как можно, не нарушая общности, считать, что $F(z)$ — вещественная функция, то и $S_0(z) = F(D)S(z)$ — также вещественная функция класса P. Покажем, что эта функция имеет вещественный корень. В самом деле, в противном случае мы имели бы

$$F(D)S(z) = ce^{pz} \tag{3.62}$$

при некоторых вещественных c и p. Представив функцию $F(z)$ в форме

$$F(z) = P_n(z) F_n(z),$$

где

$$P_n(z) = cz^m e^{az} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}} \quad \text{и} \quad F_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{3.63}$$

и, интегрируя уравнение $P_n(D)y = e^{pz}$, мы получим

$$S_n(z) = F_n(D)S(z) = e^{pz} Q_n(z) + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{z}{\alpha_k}} Q_{k,n}(z), \tag{3.64}$$

где $Q_n(z)$ и $Q_{k,n}(z)$ — полиномы, причем степень полинома $Q_n(z)$ нулевая, если p не является корнем функции $F(z)$ и не превышает крат-

---

функция $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ принадлежала классу P^*, необходимо и достаточно, чтобы полиномы

$$P_n^F(z) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k z^k$$

не имели корней в нижней полуплоскости.

* При $F(D) = e^{kD}$ оператор $F(D)$ является оператором сдвига, т. е. $e^{kD}\psi(z) = \psi(z+k)$,

ности этого корня в противном случае. Полиномы $P_{k,n}(z)$ должны быть тождественно равными нулю. В самом деле, индикаторная диаграмма обобщенного полинома вида (3.64) представляет собой наименьший многоугольник, содержащий все точки, сопряженные показателям $\left(\overline{p}, \frac{1}{\overline{\alpha}_k}\right)$. Известно, что внутри всякого угла, содержащего внутри себя луч, перпендикулярный к какой-нибудь из сторон этого многоугольника, находится бесконечное множество корней обобщенного полинома (3.64) *. Отсюда следует, что если индикаторная диаграмма обобщенного полинома не сводится к точке или отрезку, параллельному мнимой оси, то обобщенный полином имеет корни как в верхней, так и в нижней полуплоскости. В нашем случае все показатели $\left(p \text{ и } \frac{1}{\alpha_k}\right)$ вещественны, а $S_n(z)$ принадлежит классу P и, следовательно, индикаторная диаграмма обобщенного полинома (3.64) должна сводиться к точке, а это означает, что $P_{k,n}(z) \equiv 0$. Итак,

$$S_n(z) = F_n(D)\,S(z) = e^{pz}Q_n(z). \tag{3.65}$$

Из неравенства (3.58) легко следует, что если $\psi(z)$ — некоторая функция конечной степени, то последовательность $\psi_n(z) = F_n(D)\,\psi(z)$ сходится к $\psi(z)$ равномерно в любой ограниченной области. Переходя в (3.65) к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$S(z) = e^{pz}Q(z),$$

где $Q(z)$ — полином. По теореме 1 [см. А) и В)], функция $r(z)$ должна иметь конечное число корней и ту же индикаторную диаграмму (точку p), что и функция $s(z)$. Отсюда следует, что

$$\omega(z) = e^{pz}P(z),$$

где $P(z)$ — полином, а это противоречит условию теоремы. Итак, функция $F(D)\,S(z)$ должна иметь вещественный корень x_0 и, следовательно

$$F(D)\,f(x_0) = F(D)\,\omega(x_0).$$

Достаточность доказана.

Доказательство необходимости. Докажем сначала, что при $\psi(z) = f(z) - e^{i\beta}\omega(z)$ тождество

$$\overline{F}(D)\,\psi(z) \equiv 0 \tag{3.66}$$

невозможно, каково бы ни было вещественное число β.

Действительно, допустим, что тождество (3.66) имеет место. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\beta = 0$. Полагая

$$\psi_n(z) = \overline{F}_n(D)\cdot\psi(z),$$

мы, как и раньше, получим, что $\psi_n(z) \rightrightarrows \psi(z)$ в любой ограниченной области и, следовательно, существует такое натуральное число n, что $\psi_n(z) \equiv 0$ и $\psi_{n+1}(z) \not\equiv 0$. Но тогда из соотношения

* Более того, плотность корней обобщенного полинома внутри такого достаточно малого угла равна длине соответствующей стороны многоугольника, деленной на 2π. Доказательство см., например, в ([1]).

$$(D-\bar{\alpha}_n)\psi_{n+1}(z)=\bar{\alpha}_n\psi_n\left(z-\frac{1}{\bar{\alpha}_n}\right)=0$$

непосредственно следует

$$\psi_{n+1}(z)=ce^{\bar{\alpha}_n z}\quad (c\text{ — постоянная}),\tag{3.67}$$

и так как $\psi_{n+1}(z)$ принадлежит классу P, то $\operatorname{Im}\bar{\alpha}_n\geqslant 0$. С другой стороны, по определению функции $F(z)$, $\operatorname{Im}\alpha_n\geqslant 0$. Итак, $\psi_{n+1}(z)$ — с точностью до постоянного множителя—вещественная функция. Воспользовавшись леммой 4, получаем

$$e^{i\gamma}\psi_{n+1}(x)=ic_1\operatorname{Im}\{e^{i\gamma}\omega_{n+1}(x)\}\quad\left(\omega_{n+1}(x)=\bar{F}_{n+1}(D)\,\omega(x)\right),\tag{3.68}$$

где c_1 — вещественная постоянная. Сопоставляя (3.67) и (3.68), получаем, что

$$\operatorname{Im}\{e^{i\gamma}\omega_{n+1}(x)\}=c_2e^{\alpha_n z}\quad (c_2\text{ — вещественная постоянная}).$$

Из теоремы 1 заключаем, что функция $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\omega_{n+1}(z)\}$ имеет не более одного корня и что ее индикаторная диаграмма есть точка α_n. Отсюда непосредственно следует, что

$$\omega_{n+1}(z)=e^{\alpha_n z}(d_1z+d_2)\quad (d_1\text{ и }d_2\text{ — постоянные}).\tag{3.69}$$

Если кратность корня α_n равна p, то, интегрируя, получим

$$\omega_{n+p}(z)=e^{\alpha_n z}P_{n+p}(z),\tag{3.70}$$

где $P_{n+1}(z)$ — полином степени не выше p.

Покажем, что вообще при $m\geqslant n+p$ функция $\omega(z)$ имеет вид (3.70). В самом деле, пусть при $m=q-1$ функция имеет вид (3.70). Тогда при $m=q$

$$\omega_q(z)=e^{\alpha_n z}P(z)+ce^{\bar{\alpha}_q z}\quad (c\text{ — постоянная}).$$

Если $c\neq 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_q\neq 0$, то индикаторная диаграмма функции $\omega_q(z)$ есть отрезок, соединяющий точки α_n и α_q, и дефект функции $\omega_q(z)$ отрицателен. Если же $c\neq 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_q=0$, то функция $\omega_q(z)$ имеет бесконечное множество корней в обеих полуплоскостях. Итак, $c=0$, т. е. $\omega_q(z)$ имеет вид (3.70).

Переходя к пределу при $q\to\infty$, мы получим, что функция $\omega(z)$ также имеет вид (3.70), что противоречит условию теоремы.

Так как, по условию, в (3.21) в некоторой точке x_0 имеет место знак равенства, то не равная тождественно нулю функция

$$\psi_0(z)=\bar{F}(D)\psi(y)\quad (\psi(z)=f(z)-e^{i\beta}\omega(z))$$

обращается в нуль в точке x_0. Но

$$-\frac{1}{\bar{\alpha}_1}\psi_0(z-a)=e^{\bar{\alpha}_1 z}D\left[e^{-\bar{\alpha}_1 z}\psi_1(z)\right]\tag{3.71}$$

и, в силу замечания 2 к теореме 5, функция $\psi_0(z)$ может иметь вещественный корень, лишь если $\operatorname{Im}\alpha_1=0$ и $\operatorname{Im}a=0$ (так как в (1.73) $\operatorname{Im}a\geqslant 0$ и $\psi_0(z)$ функция класса P). Из того же замечания к теореме 5 и из (3.71) следует, что если $\psi_0(z)$, а значит, и $\psi_0(z-a)$, имеет вещественный корень, то $\psi_1(z)$ — вещественная функция с точностью до постоянного множителя. Функция $\psi_1(z)$ должна иметь вещественные

корни (иначе их не было бы у функции $\psi_0(z)$ и, повторяя рассуждения, мы получим, что $\psi_2(z)$ — вещественная и $\operatorname{Im}\alpha_2 = 0$ и т. д. Переходя к пределу при $n \to \infty$ $(\psi_n(z) \to \psi(z))$, получим, что $\psi(z)$ — вещественна с точностью до постоянного множителя. Остается сослаться на лемму 4. Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $F(z)$ представляется в форме (1.73) при $\operatorname{Im}\alpha_k \geqslant -q\,(q>0)$ и $\nu = \operatorname{Im} a \geqslant 0$, $f(z)$ — функция конечной степени $\tau \geqslant 0$, а $\omega(z) \in P_\sigma\,(\sigma \geqslant 2q+\tau)$ и $d_\omega \geqslant q$, то из неравенства

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.72}$$

следует

$$|\overline{F}(D) f(x)| \leqslant |\overline{F}(D)\,\omega(x)|\,. \tag{3.73}$$

Для доказательства заметим, что, по лемме 3, функция

$$\varphi(z) = [f(z) - u\omega(z)]\, e^{-iqz} \in P \quad \text{при} \quad |u| \geqslant 1.$$

По теореме 9, оператор $\overline{F}(D+iq)$ есть $\mathfrak{B}$-оператор и, следовательно, функция

$$e^{iqz}\overline{F}(D+iq)\,[\varphi(z)] = \overline{F}(D)\,[e^{iqz}\varphi(z)] = \overline{F}(D) f(x) - u\overline{F}(D)\,\omega(x)]$$

принадлежит классу P и из леммы 3 следует (3.73).

Из теоремы 10 следует, что если не имеет места тождество

$$\omega(z) = e^{(k+iq)z} P(z),$$

где k вещественно и $P(z)$ — полином, то знак равенства в (3.73) будет тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\alpha_k = q$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и

$$f(z) \equiv \overline{\omega}(z)\, e^{2iqz}. \tag{3.74}$$

Последнее равенство следует из того, что, согласно теореме 10, функция $f(z)\,e^{-iqz}$ и $\omega(z)\,e^{-iqz}$ связаны соотношением (3.40). При $c \neq -1$ легко видеть, что степень функции

$$e^{iqx}\left[\operatorname{Re}\{e^{i(\gamma_1 - qx)}\,\omega(x)\} + ic \operatorname{Im}\{e^{i(\gamma_1 - qx)}\omega(x)\}\right]$$

равна $\sigma \geqslant 2q + \tau$.

Заметим, что если $|f(x)| \leqslant M$, то из (3.73) следует что

$$|\overline{F}(D) f(x)| \leqslant M\,|\overline{F}[i(\tau + 2g)]|\,.$$

Для получения этого неравенства достаточно положить

$$\omega(z) = M e^{i(\tau+2q)z}.$$

Замечание 2. Если $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, $\omega_n(z)$ и $y(z)$ — функции конечной степени, не имеющие корней в нижней полуплоскости, и

$$-q = \max_p \sum_{k=p}^{n} d_{\omega_k} \geqslant -d_y, \tag{3.75}$$

то функция

$$L(y) = \frac{d}{dz}\left\{\omega_1(z)\frac{d}{dz}\left[\omega_2(z)\cdots\frac{d}{dz}\,\omega_n(z)\,y\right]\right\} \tag{3.76}$$

есть функция класса P.

В самом деле из (3.75) имеем $\omega_n(z)\,y(z) \in P$, так как при перемножении дефекты складываются. При дифференцировании получаем функцию класса P, причем дефект ее не меньше, чем $d_y - d_{\omega_n}$. Дальше видим, что

$$\omega_{1-n}(z)\,\frac{d}{dz}\,[\omega_n(z)\,y(z)] \in P$$

и т. д. Отсюда получается при $q \geqslant 0$:

Если $f(z)$ — функция конечной степени τ, а $\omega(z)$ — функция класса P_σ, $\sigma \geqslant \tau + 2q$ $(q \geqslant 0)$, причем $d_\omega \geqslant q$ и

$$|\,f(x)\,| \leqslant |\,\omega(x)\,| \quad (-\infty < x < \infty),$$

то

$$|\,L[f(x)]\,| \leqslant |\,L[\omega(x)]\,|\,.$$

Другой класс $\mathfrak{B}$-операторов мы построим с помощью последовательностей, введенных в рассмотрение Полиа и Шуром ([17]) и названных ими последовательностью множителей (Faktorenfolge) первого рода. По определению Полиа и Шура, последовательность $\Gamma = \{\gamma_k\}_{-\infty}^{\infty}$ называется *последовательностью множителей первого рода*, если каков бы ни был полином

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

все корни которого вещественны, полином

$$\Gamma[P(z)] = a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 z + \cdots + a_n\gamma_n z^n$$

также имеет лишь вещественные корни.

Примеры таких последовательностей встречаются еще у Лаггера. В частности, последовательностями множителей первого рода являются последовательности

$$\left\{\frac{1}{\omega(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+k)}\right\}$$

и

$$\{q^{k^2}\} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Полиа и Шур доказали следующую общую теорему: для того чтобы последовательность Γ была последовательностью множителей первого рода, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!}\, z^k \tag{3.80}$$

сходился во всей плоскости и функция $\varphi(z)$ допускала представление

$$\varphi(z) = ce^{\delta z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_n z), \tag{3.81}$$

где δ и μ_n все вещественны и одного знака. Отсюда следует, что либо с точностью до множителя, не зависящего от индекса k, $\gamma_k > 0$, либо последовательность γ_k — знакопеременная.

Из теоремы Эрмита — Билера легко следует, что если $\Gamma = \{\gamma_k\}_0^\infty$ есть последовательность множителей первого рода, $\gamma_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и полином

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{3.82}$$

не имеет корней в нижней полуплоскости, то полином

$$\Gamma[P(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k \tag{3.83}$$

также не имеет корней в нижней полуплоскости. В самом деле, для того чтобы полином

$$P(z) = R(z) + iS(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + i \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,$$

где $R(z)$ и $S(z)$ — вещественные полиномы, не имел корней в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы полиномы $S(z)$ и $R(z)$ образовывали вещественную пару (см. определение на стр. 58) и чтобы выполнялось неравенство $b_0c_1 - c_0b_1 > 0$.

Из определения последовательности множителей первого рода следует, что если полиномы $R(z)$ и $S(z)$ образуют вещественную пару, то и полиномы

$$\Gamma[R(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k b_k z^k \quad \text{и} \quad \Gamma[S(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k c_k z^k$$

также образуют вещественную пару.

Кроме того, при $b_0c_1 - c_0b_1 > 0$ имеем $\gamma_0\gamma_1(b_0c_1 - c_0b_1) > 0$.

Из этих соображений между прочим следует, что корни полинома $\Gamma[P(z)]$ лежат в наименьшем выпуклом многоугольнике, содержащем все корни полинома $P(z)$. Частным случаем этого положения является известная теорема Гаусса о корнях производной от полинома.

ТЕОРЕМА 11. *Если* $\Gamma = \{\gamma_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *есть последовательность множителей первого рода и* $\gamma_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *то оператор*

$$\Gamma[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k z^k \tag{3.84}$$

над функцией

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

есть $\mathfrak{B}$*-оператор.*

Доказательство. Из оценки для коэффициентов ряда Тейлора функции конечной степени $\tau - \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = e\tau$ и представления (3.81) убеждаемся в том, что функция $\Gamma[f(z)]$ есть функция конечной степени $\tau + \delta$. Кроме того, если f — функция класса P, то полиномы

$$P_n^f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k z^k,$$

а следовательно, и полиномы

$$Q_n(z) = \Gamma[P_n^f(z)] = a_0\gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \gamma_k a_k z^k$$

не имеют корней в нижней полуплоскости.

Функция $\Gamma[f(z)]$ является пределом последовательности полиномов $Q_n(z)$, равномерно сходящейся в любой ограниченной области и, следовательно, также не имеет корней в нижней полуплоскости. Наконец, из очевидного неравенства

$$\left|\frac{Q_n(z)}{\overline{Q_n(z)}}\right| < 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

следует

$$\left|\frac{\Gamma[f(z)]}{\overline{\Gamma[f(z)]}}\right| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

и, следовательно, $\Gamma[f(z)]$ принадлежит классу P. Теорема доказана.

§ 4. Комбинируя теорему 1 и лемму 3, мы получим некоторые новые неравенства, обобщающие неравенство С. Н. Бернштейна в другом направлении.

Пусть $\omega(z) \in P_\sigma$ и не имеет вещественных корней. Положим

$$\frac{\omega(x)}{|\omega(x)|} = e^{i\theta}.$$

Если $\omega(x)$ не равно $e^{\sigma x}$, где σ — степень $\omega(z)$, то $\theta = \theta(x)$ — монотонная функция от x $(-\infty < x < \infty)$. Мы будем считать в дальнейшем, что это условие выполнено. Функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{|\omega(x)|}, \tag{4.01}$$

где $f(x)$ — вещественная целая функция степени $\tau \leqslant \sigma$, мы будем рассматривать как функцию от θ и обозначать

$$\varphi(x) = \psi(\theta) \quad (\alpha < \theta < \beta), \tag{4.02}$$

где $\alpha = \theta(-\infty) \geqslant -\infty$ и $\beta = \theta(+\infty) \leqslant \infty$ и $\beta - \alpha \geqslant \pi$.

ЛЕММА 7. *Пусть у функции*

$$S(\theta) = M \sin(\theta + \gamma)$$

положительное число M и вещественное γ подобраны так, что удовлетворяются равенства $S(\theta_1) = \psi(\theta_1)$ и $S(\theta_2) = \psi(\theta_2)$, где θ_1 и θ_2 — заданные числа $0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant \pi$, а функция

$$S_1(\theta) = M \cos(\theta + \gamma)$$

не обращается в нуль на интервале (θ_1, θ_2). Тогда либо

$$\sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)| \geqslant M, \tag{4.03}$$

либо

$$\psi(\theta) \equiv M \sin(\theta + \gamma). \tag{4.04}$$

Доказательство. Если $|\psi(\theta)| \leqslant M$, то по лемме 3, функция

$$\chi(z) = f(z) + iMe^{i\gamma}\omega(z) \tag{4.05}$$

принадлежит классу P и, следовательно, либо корни вещественной и мнимой частей функции $\chi(x)$ перемежаются, либо вещественная часть $\chi(x)$ тождественно равна нулю.

В силу условия, наложенного на функцию $S_1(\theta)$, первый случай невозможен, и, следовательно, $\psi(\theta) \equiv M \sin(\theta + \gamma)$.

ТЕОРЕМА 12. *Если функция* $\psi(\theta)$ *определена равенствами* (4.01), (4.02) *и* $0 < h \leqslant \pi$, *то*

$$\left|\psi\left(\theta + \frac{h}{2}\right) - \psi\left(\theta - \frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2 \sin\frac{h}{2} \cdot \sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)|, \tag{4.06}$$

причем равенство в некоторой точке возможно лишь для функции

$$\psi(\theta) = M \sin(\theta + \gamma).$$

Доказательство. Если для точек $\theta_1 = \theta - \frac{h}{2}$ и $\theta_2 = \theta + \frac{h}{2}$ выполнено условие леммы 7, то непосредственно из этой леммы получаем

$$|\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1)| = 2M \sin\frac{h}{2} |\cos(\gamma + \theta)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sin\frac{h}{2} \cdot \sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)|. \tag{4.07}$$

Если же условие леммы не выполнено, то величины

$$\begin{aligned} &\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1) + \psi(\theta_1)(1 - \cos h) = M \cos(\theta_1 + \gamma) \sin h \\ \text{и} \quad &\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)(1 - \cos h) = M \cos(\theta_2 + \gamma) \sin h \end{aligned} \tag{4.08}$$

разных знаков, откуда и вытекает, что

$$|\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1)| \leqslant 2 \max(|\psi(\theta_1)|, |\psi(\theta_2)|) \cdot \sin^2\frac{h}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sin\frac{h}{2} \cdot \sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)|. \tag{4.09}$$

Неравенство (4.06) является обобщением одного неравенства, доказанного недавно С. Н. Бернштейном ([13]), которое можно получить из (4.06), полагая $\omega(x) = e^{i\sigma x}$. Метод, который мы применили для доказательства теоремы 12, весьма близок к методу С. Н. Бернштейна.

ЛЕММА 8. *Если* $\sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)| = M$ *и* $\varepsilon = \arccos\left(\frac{\psi(\theta_0)}{M}\right)$, *то на полусегменте* $(\theta_0, \theta_0 + \pi - \varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\psi(\theta) \geqslant M \cos(\theta - \theta_0 + \varepsilon) \tag{4.10}$$

и на полусегменте $(\theta_0, \theta_0+\varepsilon)$ — *неравенство*

$$\psi(\theta) \leqslant M\cos(\theta-\theta_0-\varepsilon), \tag{4.11}$$

причем если в (4.10) *или в* (4.11) *хотя бы в одной точке имеет место знак равенства, то*

$$\psi(\theta) \equiv M\cos(\theta-\theta_0\pm\varepsilon).\ * \tag{4.12}$$

Мы ограничимся доказательством неравенства (4.10). По лемме 3, функция

$$\chi(z) = f(z) - Me^{i(\varepsilon-\theta_0)}\omega(z)$$

принадлежит классу P и, по теореме 1, корни функций

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\chi(x)}{|\omega(x)|}\right\} = \psi(\theta) - M\cos(\theta-\theta_0+\varepsilon)$$

и

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\chi(x)}{|\omega(x)|}\right\} = M\sin(\theta-\theta_0+\varepsilon)$$

должны перемежаться, если только $\operatorname{Re}\{\chi(\theta)\}$ не есть тождественный нуль. Точка θ_0 есть корень функции $\operatorname{Re}\{\chi(\theta)\}$. Следующий ее корень должен лежать правее точки $\theta_0+\pi-\varepsilon$, так как $\sin(\theta-\theta_0+\varepsilon)$ не обращается в нуль на интервале $(\theta_0, \theta_0+\pi-\varepsilon)$. Так как неравенство

$$\psi(\theta) < M\cos(\theta-\theta_0+\varepsilon)$$

при $\theta=\theta_0+\pi-\varepsilon$ приводит нас к противоречию с условием леммы, то остается принять (4.10).

ТЕОРЕМА 13. *Пусть* $f(z)$ — *вещественная целая функция степени* $\tau \leqslant \sigma$, *а функция* $\omega(z) \in P_\sigma$, *причем* $\omega(x) \neq 0$ *при* $-\infty < x < \infty$ *и*

$$\sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)| = M < \infty,$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{f(x)}{|\omega(x)|} \quad \text{и} \quad \theta = \arg\omega(x).$$

Тогда при $0 < h \leqslant 2\pi$

$$\sup_{\alpha<\theta<\beta}\left|\frac{1}{h}\int_{\theta-\frac{h}{2}}^{\theta+\frac{h}{2}}\psi(\theta)\,d\theta\right| \geqslant \left(\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\right)\sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|.** \tag{4.13}$$

---

* Это неравенство было доказано С. Б. Стечкиным в 1948 г. в предположении, что $\psi(\theta)$ есть тригонометрический полином и $|\psi(\theta_0)| = M$. Заметим также, что неравенства (4.10) и (4.11) эквивалентны неравенству

$$|\psi'(\theta)| \leqslant M\sqrt{1-[\psi(\theta)]^2},$$

которое было доказано Н. И. Ахиезером в 1946 г. [см. ([5]), стр. 420, формула 13)]. Однако Н. И. Ахиезер накладывает некоторые лишние ограничения на функцию $\omega(x)$, от которых мы здесь освобождаемся.

** Интересно сопоставить это неравенство с очевидным неравенством

$$\sup\left|\frac{1}{h}\int_{\theta-\frac{h}{2}}^{\theta+\frac{h}{2}}\psi(\theta)\,d\theta\right| \leqslant \sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|.$$

Доказательство. При $h=2\pi$ неравенство очевидно. Пусть $h<2\pi$. Выберем число θ_0 так, чтобы число ε леммы 8 удовлетворяло одному из неравенств (4.10) или (4.11). Пусть, для определенности, выполнено (4.10). Проинтегрировав это неравенство в интервале $\left(\theta_0,\ \theta_0+\frac{h}{2}\right)$ и аналогичное неравенство — в интервале $\left(\theta_0-\frac{h}{2},\ \theta_0\right)$, мы получим

$$\left|\int\limits_{\theta_0-\frac{h}{2}}^{\theta_0+\frac{h}{2}}\psi(\theta)\,d\theta\right|>2M\left[\sin\left(\frac{h}{2}+\varepsilon\right)-\sin\varepsilon\right].$$

Выбрав θ_0 так, чтобы $\psi(\theta_0)$ было достаточно близко к M, мы можем сделать $\varepsilon>0$ сколь угодно малым. Отсюда следует (4.13).

Замечание 1. Если при некотором $\theta=\theta_0$ $|\psi(\theta_0)|=M$, то знак равенства в (4.13) возможен лишь при $\psi(\theta)\equiv\pm M\cos(\theta-\theta_0)$.

Замечание 2. Если $G(x)$ — целая функция конечной степени τ и $|G(x)|\leqslant M$, то, выбрав $f(x)=G'(x)$ и $\omega(x)=e^{i\tau x}$, будем иметь при $0<h<\frac{2\pi}{\tau}$:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|G\left(x+\frac{h}{2}\right)-G\left(x-\frac{h}{2}\right)\right|\geqslant\frac{2}{\tau}\sin\frac{h\tau}{2}\cdot\sup_{-\infty<x<\infty}|G'(x)|. \quad (4.14)$$

Это неравенство доказал С. Б. Стечкин ([11]) в предположении, что функция $G(x)$ есть тригонометрический полином.

С. Никольский ([12]) доказал его для произвольной целой функции конечной степени, но в предположении, что $0<h<\pi$.

В приведенной здесь общей форме неравенство (4.14) было доказано С. Н. Бернштейном ([13]).

С помощью множителя $e^{i\gamma}$ (γ — вещественное) мы можем пронормировать функцию $\omega(z)$ так, что $\theta(0)=0$. Таким образом, можно считать, что при $\omega(x)=s(x)+it(x)$ $t(0)=0$ и $s(0)\neq 0$.

ТЕОРЕМА 14. *Пусть $\omega(x)=s(x)+it(x)$ — функция класса P_σ $(\sigma\geqslant 0)$, не имеющая вещественных корней и отличная от полинома степени $\leqslant n$. Тогда из всех вещественных целых функций конечной степени $\tau\leqslant\sigma$ и вида*

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots\quad(n\geqslant 1) \quad (4.15)$$

единственной, дающей наименьшее отклонение на всей оси функции

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}, \quad (4.16)$$

является функция

$$f_0(x)=n!\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\}. \quad (4.17)$$

Доказательство. Очевидно отклонение от нуля функции $\frac{f_0(x)}{|\omega(x)|}$ равно $L_n=\frac{n!}{|\omega^{(n)}(0)|}$. Если некоторая функция $f(x)$ вида (4.15) удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leqslant \frac{n!}{|\omega^{(n)}(0)|} |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

то, по лемме 3, функция

$$\chi(z) = f(z) - \frac{n!}{\omega^{(n)}(0)} \omega(z)$$

принадлежит классу P и не имеет кратных вещественных корней. Последнее следует из того, что, в силу условия теоремы, $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\}$ не имеет кратных корней *. Кроме того, $\chi^{(n)}(0) = 0$. Так как $\omega(x)$ не есть полином степени $\leqslant n$, то $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega^{(n)}(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\} \not\equiv 0$ и, следовательно, невозможно тождество $\chi^{(n)}(z) \equiv 0$. Из леммы 4 мы без труда получим, что

$$f(x) = n! \operatorname{Re}\left\{e^{i\gamma} \frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\}$$

и, так как $f^{(n)}(0) = n!$, то $\gamma = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Если считать $n = 0$, т. е. зафиксировать свободный член в разложении

$$f(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots,$$

то, очевидно, функция

$$f_0(x) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\omega(x)}{\omega(0)}\right\}$$

будет давать наименьшее отклонение $L_0 = \frac{1}{|\omega(0)|}$.

Однако в этом случае нельзя утверждать единственности экстремальной функции **.

Заметим также, что к этому случаю можно свести случай

$$\omega(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + x^n.$$

Достаточно вместо полиномов $\omega(x)$ и $f(x)$ рассмотреть полиномы $x^n \omega\left(\frac{1}{x}\right)$ и $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть* $\omega(x) = s(x) + it(x)$ — *функция класса* P_σ $(\sigma \geqslant 0)$ *без вещественных корней, не равная функции* $ce^{\pm\sigma x}$ *и полиному* $P_{n+1}(x)$***.

---

* Если $\operatorname{Im} \frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)} \equiv 0$, то $\omega(x) = ce^{\pm\sigma x}$. В этом случае функция $e^{\pm\sigma x} f(x)$ — ограниченная, конечной степени $\Delta \geqslant 0$. Так как индикаторная диаграмма этой функции есть отрезок мнимой оси, то степень функции $f(x)$ $\tau = \sqrt{\Delta^2 + \sigma^2} \leqslant \sigma$ и, следовательно, $\Delta = 0$. Но ограниченная функция нулевой степени есть константа. Итак, в этом случае $f(x) = c_1 e^{\pm\sigma x}$ и решение дается формулой (4.17).

** Например, при $\omega(x) = e^{ix}$ все функции $f(x) = \cos \lambda x$ $(|\lambda| \leqslant 1)$ дают наименьшее отклонение, равное $f(0) = 1$, и разложение их начинается членами $f(x) = 1 + 0 \cdot x + \cdots$.

*** При $\omega(x) = P_{n-1}(x)$ отношение $\frac{f(x)}{\omega(x)}$, где $f(x)$ дается формулой (4.18), не может быть ограниченным.

Тогда из всех вещественных функций конечной степени $\tau \leqslant \sigma$ вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a x^n + b x^{n+1} + \\ + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots \quad (n \geqslant 1), \tag{4.18}$$

где a и b фиксированы, единственной, дающей наименьшее отклонение на всей оси функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}}, \tag{4.19}$$

является функция

$$f_1(x) = As(x) + Bt(x), \tag{4.20}$$

где A и B выбраны так, что $f_1(x)$ имеет вид (4.18).

Доказательство. Покажем прежде всего, что можно выбрать постоянные A и B так, чтобы $f(x)$ имела вид (4.18). Если $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega^{(n+1)}(0)}{\omega^{(n)}(0)}\right\} = 0$, то, по замечанию 2 к теореме 5, $\omega^{(n)}(x)$ — вещественная функция. Если она не имеет корней, то $\omega^{(n)}(x) = ce^{kx}$ (k — вещественное). Равенство $k = 0$ невозможно, ибо в этом случае $\omega(x) = P_n(x)$. При $k \neq 0$ имеем

$$\omega(x) = \frac{c}{k^n} e^{kx} + P_{n-1}(x)$$

и если $P_{n-1}(x) \not\equiv 0$, то $\omega(z)$ имеет корни в обеих полуплоскостях. Но равенство $\omega(x) = c_1 e^{kx}$ противоречит условию теоремы и, следовательно, $\omega^{(n)}(x)$ имеет вещественные корни. По замечанию 2 к теореме 5, это невозможно, если $\omega(x)$ не имеет вещественных корней. Итак, $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega^{(n+1)}(0)}{\omega^{(n)}(0)}\right\} \neq 0$ или

$$s^{(n+1)}(0)\ t^{(n)}(0) - t^{(n+1)}(0)\, s^n(0) \neq 0$$

и существует единственное решение системы

$$As^{(n)}(0) + Bt^{(n)}(0) = n!a, \quad As^{(n+1)}(0) + Bt^{(n+1)}(0) = (n+1)!\, b.$$

Пусть функция $f(x)$ вида (4.18) удовлетворяет на всей оси неравенству

$$|f(x)| \leqslant \sup_{-\infty < x < \infty} |f_1(x)|,$$

где $f_1(x)$ определено равенством (4.20). Тогда функция

$$\chi(x) = f(x) - (A - iB)\,\omega(x)$$

принадлежит классу P, причем

$$\vartheta(x) = \operatorname{Re}\{\chi(x)\} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n+2} x^{n+2} + \cdots. \tag{4.21}$$

По теореме 1, если $\vartheta(x) \not\equiv 0$, то все корни функции $\vartheta(x)$, а следовательно, и все корни полинома

$$P_m^{\vartheta}(x) = c_0 + c_1 x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) c_2 x^2 \cdots + + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) c_m x^m$$

вещественны (см. замечание 2 к лемме 5). С другой стороны, по теореме Лагерра, полином, у которого равны нулю два последовательных

коэффициента (кроме первых или последних двух) должен иметь невещественные корни* и, следовательно, либо $c_{n+q}=0\,(q=2,3,\ldots)$, либо $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$. Первый случай невозможен, ибо тогда

$$\operatorname{Im}\{(A-iB)\,\omega(x)\}=\operatorname{Im}\chi(x)=P_{n+1}(x)$$

и функция $\omega(x)$ — полином со степенью, не превосходящей $n+1$. Если же $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$, то функция $\vartheta(x)$ имеет в нуле корень не ниже третьей кратности, следовательно, $\operatorname{Im}\{(A-iB)\,\omega(x)\}$ имеет в нуле кратный корень, что невозможно, так как $\omega(x)$ не имеет вещественных корней. Итак,

$$f(x)=\operatorname{Re}\{(A-iB)\,\omega(x)\}.$$

Теорема доказана. Теоремы 14 и 15 являются обобщением теорем С. Н. Бернштейна [см. ([4]), гл. III, теоремы I и II § 1 и теоремы II и II bis § 9].

Приведем еще пример на применение теоремы 1 и леммы 3.

Пусть $\omega(x)=s(x)+it(x)\in P_\sigma$ и $f(x)$ — целая функция конечной степени $\tau<\sigma$; тогда, если $f(x)\not\equiv 0$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{f(x)+Ms(x)}{\omega(x)}\right|>M. \tag{4.22}$$

В самом деле, в противном случае мы имели бы

$$f(x)-iMt(x)\in P$$

и, по условию B) теоремы 1, индикаторные диаграммы $f(z)$ и $t(z)$ должны совпадать; с другой стороны, по замечанию к теореме 1, степень функции $t(z)$ не меньше $\sigma>\tau$. Итак, должно выполняться (4.22).

Дополнение

Функцию $\omega(z)$ класса P_σ мы назовем *P-мажорантой* функции $f(z)$ конечной степени τ, если $\sigma\geqslant\tau$ и

$$|f(x)|\leqslant|\omega(x)|\quad(-\infty<x<\infty). \tag{5.00}$$

Найдем необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы она имела P-мажоранту.

Пусть $\omega(z)$ есть P-мажоранта функции $f(z)$. Применяя лемму 1 к функциям

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{\omega(z)}\ \text{и}\ \psi_1(z)=\frac{f(z)}{\overline{\omega}(z)},$$

в верхней и нижней полуплоскости получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right|<\infty, \tag{5.01}$$

где α_k — все корни функции $f(z)$.

---

* В самом деле, если у полинома $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}b_kx^k\ (b_n=b_{n+1}=\ldots=b_{n+q}=0)$ все корни вещественны, то полиномы $P^{(n-1)}(x)$ и $\left[x^{m-n+1}P^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(m-n-q)}$ должны, по теореме Ролля, иметь вещественные корни. Но это невозможно, так как последний полином двучленный и не ниже третьей степени.

Легко видеть, что условие (5.01) является также и достаточным для того, чтобы функция

$$f(z) = ce^{(a+ib)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}} \tag{5.02}$$

имела P-мажоранту. В самом деле, в этом случае за функцию $\omega(z)$ можно принять

$$\omega(z) = ce^{(a+ip)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) e^{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\beta_k}\right) z}, \tag{5.03}$$

где $\beta_k = \alpha_k$ при $\operatorname{Im}\alpha_k \geqslant 0$ и $\beta_k = \bar{\alpha}_k$ при $\operatorname{Im}\alpha_k < 0$, а $p > 0$ и настолько велико, что степень $\omega(z)$ больше или равна степени $f(z)$. Согласно следствию 5 § 1, дефект $d_\omega = p > 0$ и, следовательно, $\omega(z)$ есть функция класса P. Кроме того,

$$|f(x)| = |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Легко получить, используя лемму 2, что индикаторные диаграммы функций $f(z)$ и $\omega(z)$ — равные выпуклые множества, сдвинутые друг относительно друга в направлении мнимой оси. Выбором числа $p \geqslant 0$ можно добиться того, чтобы они совпали или получались друг из друга отражением в вещественной оси. Такую мажоранту $\omega(z)$ естественно назвать «наилучшей». Нетрудно показать, что наилучшая P-мажоранта данной функции $f(z)$ определяется с точностью до постоянного множителя $e^{i\gamma}$.

Установленный нами критерий (5.01) эквивалентен следующему:

ТЕОРЕМА 16. *Для того чтобы целая функция конечной степени $f(z)$ имела P-мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left| \int_0^r \ln|f(x)f(-x)| \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) dx \right| < M_f \quad (1 < r < \infty), \tag{5.10}$$

где M_f не зависит от r. *

Доказательство. Докажем сначала, что для всякой функции $f(z)$ конечной степени верно

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta = O(1). \tag{5.11}$$

Для этого представим функцию $f(z)$ в виде произведения

$$f(z) = \Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z) \cdot \Phi_3(z), \tag{5.12}$$

* Это условие можно заменить также следующим:

$$\left| \int_{-r}^{2} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2} \, dx \right| < N_f \quad (0 < r < \infty),$$

где N_f не зависит от r. Эквивалентность (5.01) и (5.10) была недавно доказана Н. И. Ахиезером ([18]) в связи с другим вопросом.

где

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(z) &= c\cdot\exp\Big(a+ib+\sum_{|\alpha_k|\leqslant r}\frac{1}{\alpha_k}\Big)z,\\ \Phi_2(z) &= \prod_{|\alpha_k|\leqslant r}\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big),\\ \Phi_3(z) &= \prod_{|\alpha_k|>r}\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{\frac{z}{\alpha_k}}.\end{aligned}\right\}\tag{5.13}$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi_1(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\Big|a+ib+\sum_{|\alpha_k|\leqslant r}\frac{1}{\alpha_k}\Big|\sin\theta_r,\tag{5.14}$$

причем величина, стоящая в правой части равенства, как легко видеть из теоремы Линделёфа, ограничена.

Далее,

$$\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi_2(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi r}\sum_{|\alpha_k|\leqslant r}\ln\frac{r}{|\alpha_k|}+\frac{O(1)}{r}\sum_{|\alpha_k|\leqslant r}\frac{|\alpha_k|}{r}\tag{5.15}$$

или

$$\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi_2(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi r}\int_0^r\frac{n(t)}{t}\,dt+\frac{O(1)}{r^2}\int_0^r t\,dn(t).\tag{5.16}$$

Из того, что $\frac{n(t)}{t}$ ограничено, легко следует ограниченность всей величины, стоящей в правой части равенства. Наконец,

$$\left|\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi_2(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi r}\sum_{|\alpha_k|>r}\sum_{p=2}^{\infty}\Big(-\frac{r^p}{p|\alpha_k|^p}\int_0^\pi\cos p(\theta-\theta_r)\sin\theta d\theta\Big)$$

или при некоторой независящей от r постоянной c

$$\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi_3(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta<c\sum_{|\alpha_k|>r}\frac{r}{|\alpha_k|^2}=cr\int_r^\infty\frac{dn(t)}{t^2}.\tag{5.17}$$

Интегрируя по частям, убеждаемся, что и эта величина ограничена. Итак, (5.11) верно.

На основании этого, мы из формулы Карлемана (1.11) получаем, что условия (5.10) и (5.01) эквивалентны. Теорема доказана.

Определение.* По С. Н. Бернштейну, функция $H(x)\geqslant 0$ $(-\infty<x<\infty)$ называется *майорантой квазиконечного роста* $\varphi(\tau)$, если существует такая последовательность функций $H_{k,\tau}(x)\geqslant 0$ $(-\infty<x<\infty, k=1,2,\ldots)$, удовлетворяющая условию

* Это определение дано С. Н. Бернштейном в ([20]). Определение майоранты конечного роста дано в ([19]).

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{H_{k,\tau}(x)} \leqslant \varphi(\tau), \tag{5.18}$$

что, как только функция $f(x)$ степени τ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leqslant H(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{5.19}$$

все ее производные $f^{(k)}(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant H_{k,\tau}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.20}$$

Если $\varphi(\tau) = \tau$, то майоранта $H(x)$ называется *майорантой конечного роста*. Функции, допускающие такие майоранты, называются, соответственно, функциями конечного или квазиконечного роста.

Из теорем 4 и 5, очевидно, следует, что функция, допускающая P-мажоранту, есть функция конечного роста. Однако можно утверждать больше, именно

ТЕОРЕМА 17. *Классы функций конечной степени конечного роста и квазиконечного роста совпадают между собою и совпадают с классом функций, имеющих P-мажоранту.*

Доказательство. Очевидно следует только доказать, что всякая функция квазиконечного роста имеет P-мажоранту

Заметим прежде всего, что если $H(x)$ есть майоранта квазиконечного роста, то из неравенства

$$|f(x)| \leqslant H(x),$$

где $f(z)$ — целая функция конечной степени τ, следует

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant H^*(r), \tag{5.21}$$

где

$$H^*(r) = \sum_{k=0}^{\infty} |H_{k,\tau}(0)| \frac{r^k}{k!}. \tag{5.22}$$

Заметим также, что из (5.18) следует

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln H(r)}{r} \leqslant \varphi(\tau) < \infty. \tag{5.23}$$

Пусть $f(z)$ — функция конечной степени τ,

$$f(z) = ce^{(a+ib)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{5.24}$$

не имеющая P-мажоранты и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\alpha_k} \right| = \infty. \tag{5.25}$$

Покажем, что она не имеет также никакой майоранты квазиконечного роста. Для этого достаточно показать, что какова бы ни была функция $H^*(r)$, удовлетворяющая условию (5.23), можно указать целую функцию $\Phi(z)$ степени τ, имеющую на вещественной оси тот же модуль, что и функция $f(x)$ и такую, что в некоторой точке z_0 комплексной плоскости

$$|\Phi(z_0)| > H^*(|z_9|).$$

Построим сначала функцию

$$F(z) = ce^{(a+ib)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) e^{\frac{z}{\beta_k}}, \tag{5.26}$$

где $\beta_k = \alpha_k$ при $\operatorname{Im}\alpha_k \geqslant 0$ и $\beta_k = \bar{\alpha}_k$ при $\operatorname{Im}\alpha_k < 0$. Из (5.25) следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\left|\sum_{|\beta_k|\leqslant r}\frac{1}{\beta_k}\right| = \infty. \tag{5.27}$$

Кроме того, так как $f(z)$ — функция конечной степени и $|\beta_k| = |\alpha_k|$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r)}{r} < \infty, \tag{5.28}$$

где $n(r)$ — число точек α_k, удовлетворяющих неравенству $|\alpha_k| < r$. По известной теореме Линделёфа, из (5.27) и (5.28) следует, что $F(z)$ — функция первого порядка и максимального типа. Таким образом,

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}}\,\frac{\ln|F(z)|}{|z|} = \infty, \tag{5.29}$$

и какова бы ни была функция $H^*(r)$, удовлетворяющая неравенству (5.23), найдется точка z_0, в которой

$$|F(z_0)| > 2H^*(|z_0|). \tag{5.30}$$

Легко получить, если использовать известную оценку для примарного множителя:

$$|\ln(1-u)+u| < c\,|u|^2 \qquad (c \text{ — постоянная}),$$

что при произвольном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом η_ε имеет место неравенство:

$$\left|\ln\left|\prod_{k=M_\varepsilon+1}^{\infty}\left(1-\frac{z_0}{\gamma_k}\right)e^{\frac{z_0}{\gamma_k}}\right|\right| < \varepsilon, \tag{5.31}$$

где $\gamma_k = \beta_k$ или $\bar{\beta}_k$. Выберем $\varepsilon < \frac{1}{2}\ln 2$ и число $\eta > 0$ настолько малым, что

$$|\eta z_0| < \varepsilon; \tag{5.32}$$

выберем γ_k так, чтобы

$$\left|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{M_\varepsilon}\operatorname{Im}\frac{1}{\beta_k} - \sum_{k=M_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon}\operatorname{Im}\frac{1}{\gamma_k}\right| < \eta. \tag{5.33}$$

Последний выбор возможен, в силу условий (5.25) и $\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\to 0$.

Построим функцию

$$\psi_\varepsilon(z) = ce^{(a+id)z}\prod_{k=1}^{M_\varepsilon}\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right)e^{\frac{z}{\beta_k}}\prod_{k=M_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon}\left(1-\frac{z}{\gamma_k}\right)e^{\frac{z}{\gamma_k}}\prod_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}},$$

где (5.34)

$$d = b + \sum_{k=1}^{M_\varepsilon}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right) + \sum_{k=M_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\gamma_k}\right).$$

Эта функция отличается от функции $f(z)$ лишь множителем, который является рациональной функцией и, следовательно, $\psi_\varepsilon(z)$ имеет тот же рост, что и $f(z)$. Очевидно также, что

$$|f(x)| = |\psi_\varepsilon(x)|.$$

Кроме того, как это видно из неравенств (5.30), (5.31), (5.32) и (5.33), в точке z_0

$$|\psi_\varepsilon(z_0)| > H^*(|z_0|).$$

Теорема доказана.

Поступило
9. III. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Polya G., Über Lücken und Singularitäten von Potentzreihen, Math. Zeitschr. 29 (1929), 549—640.

[2] Гельфонд А. О., Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка, Успехи мат. наук, вып. III (1937), 144—174.

[3] Бернштейн С. Н., Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.

[4] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Москва, 1937.

[5] Ахиезер Н. И., О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 411—428.

[6] Левин Б. Я., О критерии Эрмита для целых функций экспоненциального типа, Доклады Ак. Наук СССР, XLI, № 2 (1943), 50—54; Доклады Ак. Наук СССР, XLI, № 3 (1943), 103—104.

[7] Чеботарев Н. Г., К проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций, Доклады Ак. Наук СССР, XXXIII, № 9 (1941), 483—486; О целых функциях с вещественными перемежающимися корнями, Доклады Ак. Наук СССР XXXV, № 7 (1942), 219—222; Об одном видоизменении постановки задачи Гурвица, Доклады Ак. Наук СССР, XXXV, № 8 (1942), 251—254.

[8] Понтрягин Л. С., О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 6 (1942), 115—134.

[9] Мейман Н. Н., К проблеме Эрмита—Гурвица для целых трансцендентных функций, Доклады Ак. Наук СССР, XL, № 2 (1943), 55—58.

[10] Мейман Н. Н. К вопросу о распределении нулей целой функции, Доклады Ак. Наук. СССР, XL, № 5 (1943), 200—202; Оценка расстояния между соседними нулями для одного класса целых функций, Доклады Ак. Наук СССР, LIII, № 1 (1946), 11—14; Об одном классе целых функций, Доклады Ак. Наук СССР, LXII, № 3 (1948), 293—296.

[11] Стечкин С. Б., Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 9 (1948), 1511—1518.

[12] Никольский С., Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 9 (1948), 1607—1510.

[13] Бернштейн С. Н., Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 9 (1948), 1487—1490.

[14] Левин Б. Я., О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, LXV (1949), 605—608;

[15] Levinson N., Gap and density theorems, N. Y. City, Amer. Math. Soc., 1940.

[16] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, ГОНТИ УССР, 1938 г.

[17] Polya G. u. Schur J., Über zwei Arten von Faktorenfolgen, Journ. für die reine und angew. Math. 144 (1914), 89—113.

[18] Ахиезер Н. И., К теории целых функций конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР LXIII, № 5 (1948), 475—478.

[19] Бернштейн С. Н., О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 6 (1948), 949—952.

[20] Бернштейн С. Н., О майорантах конечного или квазиконечного роста. Доклады Ак. Наук СССР, LXV, № 2 (1949), 117—120.