

Ю. Д. БУРАГО, В. Г. МАЗЬЯ, В. Д. САПОЖНИКОВА

О ПОТЕНЦИАЛЕ ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 VI 1962)

Наиболее общие известные до сих пор классы областей, для которых развита теория потенциала, были определены в классических работах А. М. Ляпунова (см. (1)) и Т. Карлемана (2). Для плоского случая И. Радон (3) была построена теория потенциала для широкого класса областей, границами которых являются кривые с ограниченной вариацией поворота. Отметим, что существуют кривые Ляпунова, для которых вариация поворота не ограничена.

Ниже результаты Радона, относящиеся к потенциалу двойного слоя, распространяются на некоторый класс плоских и пространственных областей, который включает в себя поверхности Ляпунова и Карлемана, а в плоском случае — также и кривые Радона.

Рассмотрим трехмерный случай. Соответствующие рассуждения для плоских кривых лишь упрощаются.

Пусть $\Omega \subset E^3$ — открытая область, ограниченная замкнутой в E^3 поверхностью Γ . Спроектируем Γ из произвольной точки P на единичную сферу S_P с центром в P . Это проектирование определяет непрерывное отображение $\pi_P(\Gamma)$ поверхности $\Gamma \setminus P$ в S_P .

Потребуем, чтобы поверхность Γ удовлетворяла единственному условию: абсолютная вариация (4) v_P^0 отображения $\pi_P(\Gamma)$ равномерно ограничена для всех точек $P \in E^3$, т. е.

$$\sup_{\{F_i\}; P} \sum_i \mu(\pi_P(F_i)) \leq M = \text{const} < \infty, \quad (1)$$

где μ — площадь на S_P ; $\{F_i\}$ — конечный набор замкнутых непересекающихся подмножеств Γ .

Условие (1) выполняется для кривых Радона, поверхностей Ляпунова и Карлемана. Однако существуют гладкие поверхности, для которых неравенство (1) не выполняется. Из известной теоремы теории площади (5) легко следует, что поверхность Γ , удовлетворяющая условию (1), имеет конечную площадь по Лебегу. Конечность площади поверхности Γ существенно используется в доказательствах.

Для того чтобы перенести на нерегулярный случай понятие телесного угла $\omega(P, \mathcal{E})$, под которым борелевское множество $\mathcal{E} \subset \Gamma$ видно из точки P , используем применительно к $\pi_P(\Gamma)$ введенные А. В. Погореловым (4) следующие выражения для положительной, отрицательной и полной вариаций непрерывного отображения через функцию кратности:

$$v_P^+(\mathcal{E}) = \int_{S_P} n_{\mathcal{E}}^+(Y) dY, \quad v_P^-(\mathcal{E}) = \int_{S_P} n_{\mathcal{E}}^-(Y) dY, \quad v_P(\mathcal{E}) = v_P^+(\mathcal{E}) - v_P^-(\mathcal{E}),$$

где $n_{\mathcal{E}}^+(Y)$, $n_{\mathcal{E}}^-(Y)$ — число прообразов на \mathcal{E} точки $Y \in S_P$, топологический индекс (ind) которых относительно $\pi_P(\Gamma)$ равен ± 1 соответственно. (При этом мы считаем, что S_P и Γ ориентированы одинаковым образом.)

Пусть, по определению, $\omega(P, \mathcal{E}) = v_p(\mathcal{E})$ при $P \in \mathcal{E}$. Для $P \in \mathcal{E}$ положим $\omega(P, \mathcal{E}) = \omega(P, \mathcal{E} \setminus P) + \omega(P, P)$, где $\omega(P, P) = 2\pi - \omega(P, \Gamma \setminus P)$.

Отметим следующие свойства телесного угла $\omega(P, \mathcal{E})$.

1. *Функция $\omega(P, \mathcal{E})$ вполне аддитивна на кольце борелевских множеств.*

Это свойство непосредственно следует из доказанной А. В. Погореловым полной аддитивности $v_p(\mathcal{E})$ и определения $\omega(P, \mathcal{E})$.

2. *Справедливы равенства*

$$\omega(P, \Gamma) = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } P \in \Omega; \\ 2\pi, & \text{если } P \in \Gamma; \\ 0, & \text{если } P \in \overline{C\Omega}. \end{cases}$$

Точка $X \in \Gamma$ называется регулярной относительно $\pi_p(\Gamma)$, если существует такая окрестность $\mathcal{E} \subset \Gamma$ точки X , что луч PX не имеет общих точек с $\mathcal{E} \setminus X$. Регулярные точки $X \in \Gamma$ разделим на три класса Γ^+ , Γ^- , Γ^0 в зависимости от того, переходит ли луч PX в точке X из Ω в $\overline{C\Omega}$, из $\overline{C\Omega}$ в Ω или остается в Ω или $\overline{C\Omega}$.

Доказательство свойства 2 легко получить, используя результаты работы (4) и следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть X — регулярная точка. Если $X \in \Gamma^+$, то $\text{ind } X \geq 1$; если $X \in \Gamma^-$, то $\text{ind } X \leq -1$. Если $\text{ind } X = \pm 1$, то $X \in \Gamma^+$ или $X \in \Gamma^-$, соответственно. Равенство $\text{ind } X = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $X \in \Gamma^0$.*

3. *Установлена оценка*

$$|\omega(P_1, \mathcal{E}) - \omega(P_2, \mathcal{E})| \leq \frac{Ks(\mathcal{E})}{d^3} |P_1 P_2|, \quad (2)$$

где d — наименьшее из расстояний от P_1 и P_2 до \mathcal{E} , K — абсолютная постоянная, $s(\mathcal{E})$ — площадь множества \mathcal{E} .

4. *Имеет место неравенство*

$$\sup_{\substack{\cup \mathcal{E}_i = \Gamma \\ \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset}} \sum_i |\omega(P, \mathcal{E}_i)| \leq v_p^0 + 2\pi.$$

Потенциалом двойного слоя с непрерывной плотностью $f(X)$ назовем функцию

$$W(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(X) \omega(P, dX).$$

Можно показать, что потенциал $W(P)$ гармоничен при $P \in \Gamma$. В доказательстве используется тот факт, что для потенциала $W(P)$ справедлива теорема о среднем.

Предельные значения $W(P)$ при $P \rightarrow S$, $S \in \Gamma$, изнутри или извне существуют и равны, соответственно,

$$W^{(i)}(S) = f(S) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(X) \omega(S, dX),$$

$$W^{(e)}(S) = -f(S) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(X) \omega(S, dX).$$

Так же как в работе И. Радона (3), внешняя и внутренняя задачи Дирихле сводятся к функциональным уравнениям

$$W^{(i)} = f + Tf, \quad W^{(e)} = -f + Tf,$$

где оператор

$$(Tf)_S = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(X) \omega(S, dX)$$

действует в пространстве $C(\Gamma)$;

$$\|T\| = \frac{1}{2\pi} \sup_{S \in \Gamma} \int_{\Gamma} |\omega(S, dX)| \leq \frac{M}{2\pi} + 1.$$

Повторением рассуждений Радона для оператора T доказывается, что радиус Фредгольма оператора T равен

$$2\pi \inf_{S \in \Gamma} \frac{1}{|\omega(S, S)|}.$$

Поступило
31 V 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953. ² T. Carleman, Über Neumann-Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken, Uppsala, 1916. ³ И. Радон, УМН, 1, в. 3—4 (1946). ⁴ А. В. Погорелов, Поверхности ограниченной внешней кривизны, гл. I, Харьков, 1956. ⁵ L. Cesari, Surface Area, Princeton, 1956, p. 6.