

Общероссийский математический портал

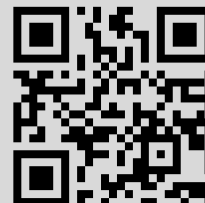
П. П. Аристов, Е. В. Чижонков, О некоторых конечно-разностных аппроксимациях задачи Стокса, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 573–580

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

21 марта 2025 г., 20:59:15



О некоторых конечно-разностных аппроксимациях задачи Стокса*

П. П. АРИСТОВ, Е. В. ЧИЖОНКОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 519.635.8

Ключевые слова: метод конечных разностей, задача Стокса, константа в LBB-условии, численные эксперименты.

Аннотация

Для прямоугольных областей рассматривается несколько конечно-разностных схем на сдвинутых сетках для задачи Стокса (MAC-схем), удовлетворяющих условию Ладыженской–Бабушки–Бреши. Целью исследования является реальная зависимость константы в указанном условии от геометрических и сеточных параметров для фиксированной схемы и сравнительный анализ схем по полученным данным. Дискретные задачи на собственные значения решались с высокой степенью точности. Приведены результаты некоторых трехмерных расчетов.

Abstract

P. P. Aristov, E. V. Chizhonkov, On some finite-difference approximations of Stokes problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika 1(1995), 573–580.

Several finite-difference schemes for the Stokes problem satisfying the Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi condition are considered. These schemes use staggered meshes (MAC-schemes) in rectangular domains. The aim of investigations is to obtain a dependence of a constant in the LBB-condition on geometric and grid parameters for a scheme and a comparative analysis of schemes with respect to the data obtained. Discrete eigenvalue problems were solved with high precision. Results of some three-dimensional calculations are presented.

Полученные в последнее время теоретические результаты по методам решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление и необходимость исследования трехмерных гидродинамических проблем по существу показали неконкурентоспособность алгоритмов, использующих переменные вихрь–функция тока. В частности, для задач, имеющих семейство регулярных (\mathbf{u}, p) -решений [1], построены итерационные методы, асимптотически оптимальные по параметру дискретизации области [2, 3]. Это стало возможным в результате использования неравенства

$$\sqrt{m} \|p\| \leq \| \text{grad } p \|_{-1} \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-01729.

как в дифференциальном, так и в конечномерном случаях. Отметим его важность для обоснования не только корректности задачи, но и самого факта сходимости методов. Более того, известно [4, 5], что в линейном случае формулы для показателей эффективности рассматриваемых алгоритмов содержат единственный аргумент — постоянную m из (1). Все это говорит о необходимости дальнейшего, более глубокого анализа указанного неравенства.

В настоящей работе для традиционной модельной области — прямоугольника со сторонами 1 и L — рассматривается несколько конечно-разностных схем для задачи Стокса (МАС-схем в зарубежной терминологии). Их выбор обусловлен рядом факторов: во-первых, простота и эффективность реализации, связанная со структурой сеточного оператора Лапласа; во-вторых, оптимальный в данных условиях и одинаковый (первый в непрерывной норме [6]) порядок сходимости решения конечномерной задачи к дифференциальному. Кроме этого, рассматриваемые схемы используются длительное время [7, 8] и хорошо зарекомендовали себя при решении сложных с вычислительной точки зрения задач [9, 10]. Цель исследования — изучение зависимости величины m в неравенстве (1) от геометрических и сеточных параметров для фиксированной схемы и сравнительный анализ схем по полученным данным.

Перейдем непосредственно к содержанию работы. Рассмотрим в прямоугольной области

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

первую краевую задачу Стокса

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \text{grad } p = -\mathbf{f} \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, (p, 1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

и приведем для нее описания схем. При этом будем использовать обозначения h_i ($i = 1, 2$) для шагов равномерной по каждому направлению сетки, так что $h_1 N_1 = L$, $h_2 N_2 = 1$.

Схема 1. Определим следующие сеточные области:

$$\bar{\Omega}_1 = \{x_{ij} = ((i - 1/2)h_1, jh_2): i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\},$$

$$\bar{\Omega}_2 = \{x_{ij} = (ih_1, (j - 1/2)h_2): i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\},$$

$$\Omega_3 = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2): i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1, i^2 + j^2 \neq 0\}.$$

Пусть \mathbf{U}^h — линейное пространство вектор-функций, определенных на $\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2$ и обращающихся в нуль на соответствующих сеточных границах, а P^h — пространство функций, определенных на Ω_3 и ортогональных

единице. Запишем это в индексных обозначениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^h &= U^h \times V^h, \quad \text{где} \\ U^h &= \{u_{ij} = u(x_{ij}): x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, u_{0,j} = u_{N_1,j} = u_{i,0} = u_{i,N_2} = 0\}, \\ V^h &= \{v_{ij} = v(x_{ij}): x_{ij} \in \bar{\Omega}_2, v_{0,j} = v_{N_1,j} = v_{i,0} = v_{i,N_2} = 0\}, \\ P^h &= \{p_{ij} = p(x_{ij}): x_{ij} \in \Omega_3, \sum_{ij} h_1 h_2 p_{ij} = 0\}. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие (2) следующую разностную задачу: найти функции u, v, p , принадлежащие соответственно пространствам U^h, V^h, P^h и удовлетворяющие сеточным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{p_{ij} - p_{i-1,j}}{h_1} &= -f_{ij}^1, \\ \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{p_{ij} - p_{i,j-1}}{h_2} &= -f_{ij}^2, \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1} + \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{h_2} &= 0. \end{aligned}$$

В этой системе первое, второе и третье уравнения заданы на множествах Ω_1, Ω_2 и Ω_3 соответственно (здесь и далее $\Omega_i = \bar{\Omega}_i \setminus \partial\bar{\Omega}_i$).

Отметим, что в индексной форме записи приведенная разностная схема (пример 1.1 из [2]) совпадает с известной схемой первого порядка [11], построенной без использования смещенных сеток.

Для описания остальных схем будем использовать ту же последовательность структур (области, пространства, уравнения), опуская, где это возможно без ущерба для изложения, повторяющиеся моменты.

Схема 2. В данном случае сеточные области имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = (ih_1, (j-1/2)h_2): i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2 + 1\}, \\ \bar{\Omega}_2 &= \{x_{ij} = ((i-1/2)h_1, jh_2): i = 0, \dots, N_1 + 1, j = 0, \dots, N_2\}, \\ \Omega_3 &= \{x_{ij} = ((i+1/2)h_1, (j+1/2)h_2): i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Определим пространства

$$\begin{aligned} U^h &= \{u_{ij} = u(x_{ij}): x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, u_{0,j} = u_{N_1,j} = 0, u_{i,0} = -u_{i,1}, u_{i,N_2+1} = -u_{i,N_2}\}, \\ V^h &= \{v_{ij} = v(x_{ij}): x_{ij} \in \bar{\Omega}_2, v_{0,j} = -v_{1,j}, v_{N_1+1,j} = -v_{N_1,j}, v_{i,0} = v_{i,N_2} = 0\}, \\ P^h &= \{p_{ij} = p(x_{ij}): x_{ij} \in \Omega_3, \sum_{ij} h_1 h_2 p_{ij} = 0\} \end{aligned}$$

и запишем уравнения для (2)

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{h_1} = -f_{ij}^1,$$

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{h_2} = -f_{ij}^2,$$

$$\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h_1} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{h_2} = 0.$$

Здесь также первое, второе и третье уравнения заданы на множествах Ω_1 , Ω_1 и Ω_3 соответственно.

Приведенная разностная схема (пример 1.2 из [2]) имеет более симметричный вид по сравнению с предыдущей, но у нее своя особенность. Дело в том, что для использования быстрых алгоритмов решения уравнения Пуассона в прямоугольной области часто необходимо, чтобы количество узлов сетки вдоль хотя бы одной границы равнялось $2^k + 1$ (например, для методов быстрого дискретного преобразования Фурье либо полной редукции). В данном же случае легко заметить, что выполнение этого условия для одной стороны необходимо влечет за собой аналогичное требование и для другой. Однако использование многосеточных алгоритмов снимает это ограничение.

Схема 3. Опишем сеточные области

$$\bar{\Omega}_1 = \{x_{ij} = ((i + 1/2)h_1, jh_2): i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2\},$$

$$\bar{\Omega}_2 = \{x_{ij} = (ih_1, (j + 1/2)h_2): i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2 - 1\},$$

$$\Omega_3 = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2): i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1\},$$

соответствующие пространства

$$U^h = \{u_{ij} = u(x_{ij}): x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, u_{0,j} = u_{N_1-1,j} = u_{i,0} = u_{i,N_2} = 0\},$$

$$V^h = \{v_{ij} = v(x_{ij}): x_{ij} \in \bar{\Omega}_2, v_{0,j} = v_{N_1,j} = v_{i,0} = v_{i,N_2-1} = 0\},$$

$$P^h = \{p_{ij} = p(x_{ij}): x_{ij} \in \Omega_3, \sum_{ij} h_1 h_2 p_{ij} = 0\}$$

и сеточные уравнения:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{h_1} = -f_{ij}^1,$$

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_2} = -f_{ij}^2,$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h_1} + \frac{v_{ij} - v_{i,j-1}}{h_2} = 0.$$

Здесь также первое, второе и третье уравнения заданы на множествах Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 соответственно.

Предлагаемая схема — очевидная симметризация схемы 1. Более того, соответствующие разностные задачи при фиксированных шагах сетки являются равносильными. Это следует из рассмотрения дискретного аналога уравнения неразрывности в схеме 1. Действительно, учет нулевых краевых условий

для обеих компонент скорости вдоль левой и нижней границ прямоугольника позволяет сократить количество сеточных уравнений и соответственно степеней свободы для разностного аналога давления. Другими словами, реализация схем 1 и 3 порождает одно и то же разностное решение для (2), но сеточные операторы обладают при этом различными свойствами.

Нижняя граница спектра оператора \mathbf{R}^h . Приведенные конструкции областей, пространств и уравнений позволяют записать схемы 1–3 в единой форме

$$\begin{cases} \Delta^h \mathbf{u} - \text{grad}^h p = -\mathbf{f}^h \\ \text{div}^h \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} \in \mathbf{U}^h, p \in P^h \end{cases}$$

и определить здесь формально оператор окаймления

$$\mathbf{R}^h = \text{div}^h (\Delta^h)^{-1} \text{grad}^h, \quad \mathbf{R}^h: P^h \rightarrow P^h.$$

Хорошо известно (см., например, [2]), что он симметричен и положительно определен, его спектр принадлежит отрезку $[m, 1]$, где m — константа в (1), зависящая от геометрии области и от сеточных параметров h_i ($i = 1, 2$).

В настоящее время главным требованием, предъявляемым к дискретным аналогам задачи Стокса, является наличие положительного ограничения снизу для m , равномерного по параметрам дискретизации области (условие Ладыженской–Бабушки–Бреци). Для схем проекционно-разностного типа такое ограничение, как правило [1, 3], есть само дифференциальное значение этой постоянной. В конечно-разностном же случае ситуация носит менее очевидный характер, поэтому и представляет больший интерес. Кроме того, положение осложняется тем, что даже дифференциальные значения m для популярных в гидродинамических расчетах областей прямоугольной формы не отражены в доступной литературе. С другой же стороны, от значения этой константы при конкретных параметрах сетки сильно зависит реальная эффективность многих асимптотически оптимальных алгоритмов (чем оно больше, тем лучше [4, 5]). Например, асимптотическая скорость сходимости алгоритма Удзавы [14]

$$p^{k+1} = p^k - \tau_k (R^h p^k - \text{div}^h (\Delta^h)^{-1} \mathbf{f})$$

с чебышевским набором параметров τ_k равна

$$q(m) = (1 - \sqrt{m}) / (1 + \sqrt{m}).$$

Поэтому, видимо, единственный способ сравнения формально равноценных (с точки зрения скорости сходимости [6]) схем — аккуратно вычислить нижнюю границу спектра оператора \mathbf{R}^h при различных h_i .

При расчетах использовался метод итерирования подпространства [12], поскольку большая размерность задачи ограничивает применение алгоритма

Ланцоша (в оперативную память помещалось одновременно обычно не более 10 итерируемых векторов), а методы степенного типа не принимались во внимание из-за неизвестной кратности искомого собственного значения и неизвестной симметрии соответствующего собственного вектора. Конкретно же применялась программа EA12 из библиотеки численного анализа HARWELL [13].

Критерием окончания итерационного процесса являлась малость невязки для единичного собственного вектора (все нормировалось в сеточном аналоге пространства L_2). Характерным значением при этом было 10^{-10} . Исключения составляют лишь результаты, полученные для больших размерностей ($N_1 N_2 \geq 64^2$) при расчетах по схеме 1, для которых аналогичная невязка менее 10^{-7} . Используемый подход, согласно теореме 3.2 из [12], позволяет не разделять понятия невязки и ошибки, т. е. свидетельствует в пользу высокой достоверности полученных результатов.

Результаты расчетов. Для наглядности все найденные приближенные значения m расположены в виде таблиц. При этом авторы полагают (см. выше), что в приведенных числах имеется, по крайней мере, пять верных знаков после десятичной точки.

В таблице 1 приведена зависимость $m = m(h)$ для всех схем при $h_1 = h_2 = h$ в квадратной области. Монотонное возрастание значений при любом фиксированном h (т. е. вдоль строки) говорит о преимуществе схемы 3 по сравнению с остальными. Оно заключается в том, что при ее реализации с заданной точностью любым методом типа Удзавы, Эрроу–Гурвица и т. п. ([2, 3, 14]) требуется минимальное количество итераций.

h	Схема 1	Схема 2	Схема 3
1/8	0,147705	0,309757	0,450976
1/16	0,146022	0,265425	0,354999
1/32	0,145191	0,241608	0,300254
1/64	0,144650	0,226888	0,267454
1/128	0,144346	0,217067	0,246236
1/256	0,144187	0,210158	0,231768

Таблица 1.

С этой точки зрения схема 1 обладает наилучшими свойствами, зато для нее характерна слабая чувствительность m к изменению параметра h . Это дает возможность определить на грубой сетке значения оптимальных итерационных параметров для какого-либо метода (при больших h это не требует значительных вычислительных затрат), а затем использовать их для проведения более точных расчетов. Указанный прием часто используется при решении нелинейных задач [9, 10], и поэтому пренебрегать таким свойством схемы 1 не всегда оправданно.

Таблица 2 содержит значения m , полученные для прямоугольной области $L \times 1$ при $h_1 = h_2 = 1/64$, и иллюстрирует тот факт, что с ростом отношения сторон L результаты расчетов для различных схем приближаются друг к другу.

L	Схема 1	Схема 2	Схема 3
1	0,144650	0,226888	0,267454
2	0,142693	0,150836	0,157774
4	0,047705	0,047746	0,048908
8	0,012615	0,012623	0,012868

Таблица 2.

Таким образом, при использовании квадратной сетки для сильно вытянутых областей при сравнительном анализе на первый план должны выходить другие качества схем, не связанные с m , например, удобство реализации.

Таблица 3 содержит значения m также для прямоугольных областей $L \times 1$, но сетка при этом подобна самой области, т. е. $N_1 = N_2$ (для приведенных расчетов $h_2 = 1/256$).

L	Схема 1	Схема 2	Схема 3
2	0,052788	0,150305	0,153280
4	0,014929	0,047722	0,048299
8	0,003861	0,012618	0,012766

Таблица 3.

Полученные данные свидетельствуют о наличии сильной зависимости $m = m(h_1/h_2)$ для схемы 1, очевидно, не имеющей отношения к исходной дифференциальной задаче. Результаты же для оставшихся схем практически неотличимы от полученных для квадратной сетки.

Сформулируем окончательные выводы сравнительного анализа представленных схем. Наилучшей схемой, с точки зрения величины m , для любой прямоугольной области и любой прямоугольной сетки является схема 3, которую авторы и рекомендуют для прикладных вычислений. Следует обратить внимание на схему 1 для расчета нелинейных задач при использовании квадратных сеток в сильно вытянутых областях.

В заключение работы приведем результаты расчетов (таблица 4), выполненных для единичного куба с применением обобщения схемы 3 на случай трех пространственных переменных. Шаги сетки по всем направлениям брались одинаковыми и равными h .

h	1/8	1/16	1/32
m	0,30247	0,23008	0,19035

Таблица 4.

Литература

- [1] Gunzburger M. D. Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows. A Guide to Theory, Practice, and Algorithms. — Academic Press, Inc., 1989.
- [2] Кобельков Г. М. О численных методах решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление // Вычислительные процессы и системы, вып. 8. — М.: Наука, 1991. — С. 204–236.
- [3] Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. — М.: Наука, 1989.
- [4] Аристов П. П. Об ускорении сходимости одного итерационного метода решения задачи Стокса // Известия вузов. Математика. № 9 — 1994. — С. 3–10.
- [5] Чижонков Е. В. О сходимости одного алгоритма для решения задачи Стокса // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 15, вычисл. матем. и киберн. — 1995. — № 2. — С. 12–17.
- [6] Nicolaides R. A. Analysis and convergence of the MAC scheme. The linear problem // SIAM Journ. Numer. Anal. — 1992. — V. 29. — № 6. — P. 1579–1591.
- [7] Daly B. J., Harlow F. H., Shannon J. P., Welch J. E. The MAC Method. Technical Report LA-3425. — Los Alamos Scientific Lab., University of California, 1965.
- [8] Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, фундаментальных дифференциальных операторов и основных начально-краевых задач математической физики // ЖВМ и МФ. — 1964. — Т. 4. — № 6. — С. 449–465.
- [9] Бахвалов Н. С., Кобельков Г. М., Чижонков Е. В. Эффективные методы решения уравнений Навье–Стокса // Численное моделирование в аэрогидродинамике. — М.: Наука, 1986. — С. 37–45.
- [10] Исаков А. Б., Кобельков Г. М. К численному решению задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне. — М.: Препринт ОВМ АН СССР № 179, 1987.
- [11] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
- [12] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. — М.: Мир, 1983.
- [13] Зарубежные библиотеки и пакеты программ по вычислительной математике. Под. ред. У. Кауэлла. — М.: Наука, 1993.
- [14] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.

Статья поступила в редакцию в июне 1995 г.