А. Ю. Зайцев, Д. В. Трещев, Потеря устойчивости периодических траекторий в гамильтоновых системах, зависящих от параметра, при столкновении мультипликаторов в точке -1,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 69–74

https://www.mathnet.ru/vmumm1995

при числах Рейнольдса $\geqslant 500$ решения, полученные с помощью всех моделей, близки между собой;

при числах Рейнольдса ~ 100 степень близости решений уравнений НС и ПУНС зависит от числа Маха, причем при уменьшении числа Маха отличий становится меньше. Решения уравнений ПВУС при малых числах Re дают существенно отличные от решений уравнений НС и ПУНС результаты;

при всех рассмотренных числах Рейнольдса и Маха значения теплового потока и напряжения трения на сфере слабо зависят от принятой модели уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазков Ю. В., Тирский Г. А., Щербак В. Г. Метод решения параболизованных уравнений Навье—Стокса с использованием итераций по градиенту давления. Препринт Ин-та механики МГУ. № 3913. М., 1990.
2. Pratap V. S., Spalding D. B. Fluid flow and heat transfer in three-dimensional duct flows//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1976. **19**, N 11. 1183—1188.
3. Barnett M., Davis R. T. Calculation of supersonic flows with strong viscous-inviscid interaction//AIAA J. 1986. **24**, N 12. 1949—1955.
4. Davis R. T., Barnett M., Rakich J. V. The calculation of supersonic viscous flows using the parabolized Navier—Stokes equations//Comput. and Fluids. 1986. **14**, N 3. 197—224.
5. Krawczyk W. J., Harris T. B. Parabolized Navier—Stokes analysis of two-dimensional scramjet inlet flow fields//AIAA Paper. 1987. N 1899.
6. Васильевский С. А., Тирский Г. А., Утюжников С. В. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя//Докл. АН СССР. 1986. **290**, № 5. 1058—1061.
7. Kao H. C. Hypersonic viscous flow near the stagnation streamline of a blunt body//AIAA J. 1964. **2**, N 11. 1896—1906.
8. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое//Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., 1964. 304—325.
9. Чудов Л. А. Разностный метод для расчетов в пограничном слое, обладающий свойством сильной стабилизации высокочастотных возмущений//Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 1. М., 1971. 196—210.
10. Иванов М. Я., Крупа В. Г., Нигматуллин Р. З. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье—Стокса// //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. **29**, № 6. 888—901.
11. Полянский В. А., Сахаров В. И., Панкратьева И. Л. Расчет вязких течений сжимаемого газа на основе монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Препринт Ин-та механики МГУ. № 4189. М., 1992.

Поступила в редакцию
06.04.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 531.01

А. Ю. Зайцев, Д. В. Трещев

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ТОЧКЕ −1

Теория потери устойчивости стационарных и периодических режимов в динамических системах, зависящих от параметров, берет начало в работах Пуанкаре [1]. Андронов [2] уточнил и развил теорию Пуанкаре, а также ввел понятия мягкой и жесткой потери устойчивости. Оказалось, что в гамильтоновых системах могут происходить аналогичные явления: Маркеев, Сокольский, Брюно выписали нормальные формы в окрестности положения равновесия и периодической траектории (полный список этих нормальных форм приведен, например, в [3], там же имеются необходимые ссылки). Потеря устойчивости положений равновесия и периодических решений в гамильтоновых системах, зависящих от параметров, при переходе через резонанс 1 : 1 подробно исследовалась в [4]. В настоящей статье исследуются сценарии потери устойчивости периодических траекторий в гамильтоновых системах при столкновении мультипликаторов в т. —1. Показано, что в этой ситуации потеря устойчивости может быть мягкой или жесткой, найдена асимптотика размера зоны неустойчивости при мягкой потере устойчивости, дано приложение к задаче об устойчивости двухзвенных траекторий симметричного бильярда.

§ 1. Мягкая и жесткая потери устойчивости

Пусть имеется гамильтонова система с полутора степенями свободы, 2π-периодически зависящая от времени t. Предположим, что гамильтониан H системы зависит от параметра b. Пусть $\gamma(b)$ — семейство периодических траекторий. Устойчивость траектории в линейном приближении определяется свойствами ее мультипликаторов, которые, как и γ, зависят от b. Напомним, что произведение мультипликаторов равно единице, поэтому устойчивости соответствует положение мультипликаторов на единичной окружности в комплексной плоскости, а неустойчивости — их положение на вещественной оси. Пусть при возрастании b мультипликаторы, двигаясь по единичной окружности, сталкиваются в т. —1 и затем расходятся вдоль действительной оси. Пусть b_0 — значение параметра b, при котором происходит потеря устойчивости. Рассмотрим семейство окрестностей $U_r(b)$, $r>0$, в фазовом пространстве M, заданных следующим образом:

$$U_r(b) = \{x \in M : \operatorname{dist}(x, \gamma(b)) < r\},$$

где расстояние dist берется в какой-нибудь римановой метрике на M.

Назовем потерю устойчивости мягкой, если для малых неотрицательных r и $b-b_0$ любая траектория с начальными условиями в $U_r(b)$ не выходит за пределы окрестности $U_R(b)$, причем $\lim\limits_{r\to 0,\ b\to b_0} R(r, b) = 0$.

Потерю устойчивости назовем жесткой, если для любых малых положительных r и $b-b_0$ найдется траектория с начальными условиями в $U_r(b)$, выходящая за пределы окрестности $U_\rho(b)$, где величину $\rho>0$ можно выбрать не зависящей от r и $b-b_0$.

В результате 4π-периодической замены фазовых переменных, параметра $\delta=\delta(b)$ и при необходимости обращения времени $t\to -t$ гамильтониан H приводится к виду

$$H(p, q, t, \delta) = \delta q^2 + p^2/2 + D(\delta) q^4 + o(p^2, q^4, pq^2). \tag{1.1}$$

Первые три слагаемых в правой части этого равенства являются нормальной формой семейства гальмитонианов H. Прохождению мультипликаторов через —1 соответствует переход δ через нуль: $\delta(b_0)=0$, $d\delta/db \leqslant 0$ при $b=b_0$.

Перестройки фазового портрета нормальной формы при переходе δ через нуль показаны на рис. 1: в случае $D>0$ потеря устойчивости мягкая, а при $D<0$ жесткая.

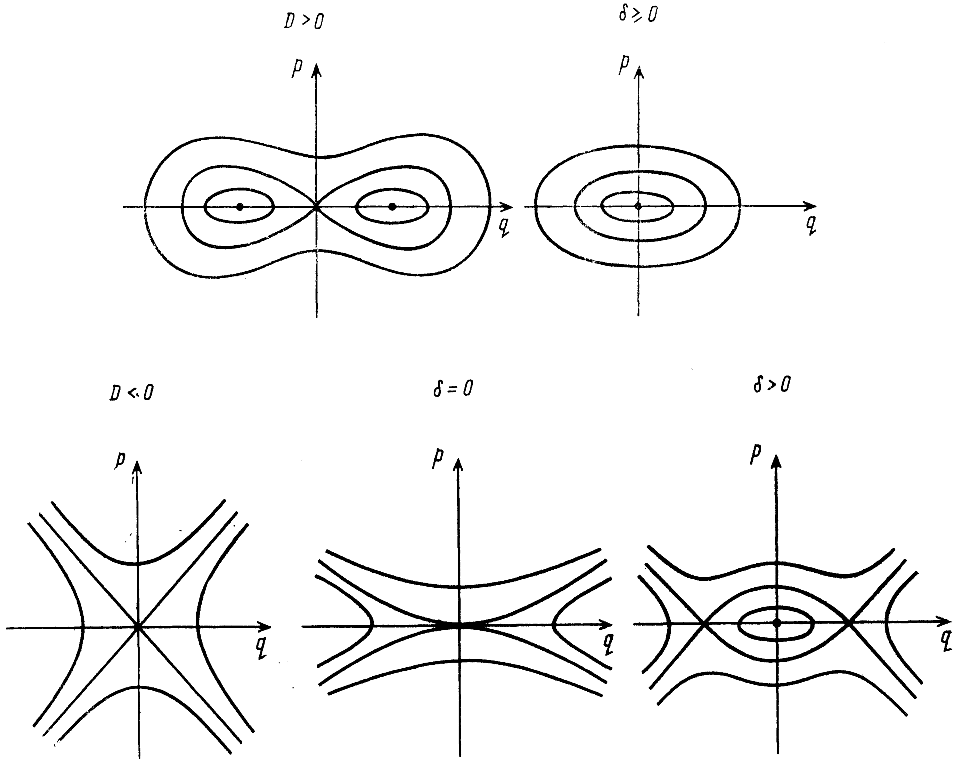

Рис. 1

Теорема 1. *Пусть $D(0)>0$ и $d\delta/db\neq 0$ при $b=b_0$. Тогда при переходе параметра b через b_0 происходит мягкая потеря устойчивости. Более того, существует постоянная $C>0$, такая, что для малых неотрицательных r, $b-b_0$ решения с начальными условиями в $U_r(b)$ не выходят за пределы окрестности $U_{C\sqrt{b-b_0+r}}$.*

2. *Пусть $D(0)<0$. Тогда траектория $\gamma(b_0)$ неустойчива и при переходе b через b_0 происходит жесткая потеря устойчивости.*

Замечания. 1. Из утверждения 1 теоремы следует, что при $D>0$ и $d\delta/db(b_0)\neq 0$ траектория $\gamma(b_0)$ устойчива. Это, очевидно, верно и без последнего предположения.

2. Теорема допускает очевидное многомерное обобщение, если предположить наличие дополнительных переменных, которым соответствуют мультипликаторы, не сходящие при $b=b_0$ с единичной окружности. При этом приведение к нормальной форме возможно лишь при отсутствии резонансов низких порядков. Кроме того, термин «устойчивость» следует заменить на «устойчивость для большинства начальных условий» из-за возможной диффузии Арнольда.

Доказательство теоремы. 1. Так как утверждение 1 теоремы не зависит от метрики фазового пространства (от метрики зависит лишь величина постоянной C), то в дальнейшем будем использовать евклидову метрику в координатах p, q, t: $ds^2=dp^2+dq^2+dt^2$. Траектории $\gamma(b)$ в выбранных координатах имеют вид $\{p=q=0\}$. Сначала оценим, насколько далеко уходят от нуля траектории нормальной формы, начинающиеся в круге радиуса r. Из рис. 1 видно, что почти все такие траектории периодические, причем их ближайшая к нулю точка имеет нулевую координату q, а самая дальняя от нуля точка — нулевую координату p. Таким образом, нам нужно оценить $q_{\max}$, где

$$\begin{cases} \delta \cdot 0^2+p^2/2+D \cdot 0^4=\delta \cdot q^2_{\max}+0^2/2+Dq^4_{\max}, \\ 0^2+p^2=r^2. \end{cases}$$

Имеем

$$q_{\max}=\sqrt{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2+8Dr^2}}{2D}}\leqslant C_1\sqrt{r-\delta}. \qquad (1.2)$$

Траектории точной системы близки к траекториям ее нормальной формы. Действительно, произведем при малых отрицательных δ замену переменных $q=\sqrt{-\delta}\,x$, $p=-\delta y$. В новых переменных система останется гамильтоновой с гамильтонианом

$$H\cdot(-\delta)^{-3/2}=\sqrt{-\delta}\,(-x^2+y^2/2+D(0)\,x^4)+O(\delta). \qquad (1.3)$$

К системам такого вида применима теория КАМ (см., например, [3]). В силу малости возмущения и невырожденности невозмущенной системы (системы с гамильтонианом $\sqrt{-\delta}(-x^2+1/2\,y^2+D(0)\,x^4)$, $\delta<0$) большинство инвариантных торов невозмущенной системы сохранится (испытав деформацию порядка $\sqrt{-\delta}$ в переменных x, y) в точной системе. Более того, для любой положительной постоянной C_0 мера точек области $\{(x, y, t) : x^2+y^2<C_0{}^2\}$, не лежащих на инвариантных торах системы с гамильтонианом (1.3), имеет порядок, не превосходящий $e^{-\mathrm{const}/\sqrt{-\delta}}$ (см. [3]), т. е. экспоненциально мала по δ.

Отсюда следует, что при малых δ траектории системы с гамильтонианом (1.1) расположены в узких щелях между инвариантными торами, которые в свою очередь близки к инвариантным торам нормальной формы. Используя оценку (1.2) и соотношение $\delta\sim\mathrm{const}\times\times(b-b_0)$ (в котором константа отлична от нуля в силу условий теоремы), получаем доказательство утверждения 1.

2. Для доказательства утверждения 2 рассмотрим функцию Четаева $V=pq$. Дифференцируя V в силу системы с гамильтонианом (1.1), получаем

$$dV/dt=(-2\delta q^2-4Dq^4+p^2)+o(p^2,\ q^4,\ pq^2).$$

При $D<0$, $\delta\leqslant0$ производная dV/dt положительна в области $U_R\cap\{V>0\}$ при некоторой (достаточно малой) постоянной $R>0$. Отсюда вытекают неустойчивость системы с гамильтонианом (1.1) при $\delta\leqslant0$ и утверждение 2.

§ 2. Потеря устойчивости двухзвенной траектории бильярда Биркгофа

Пусть материальная точка массы $m=1$ движется в плоской области, ограниченной кривыми $f_1(x)=1$ и $f_2(x)=d_2x^2+d_3x^3+d_4x^4+\ldots$. Удар точки о кривые предполагается абсолютно упругим.

Существует частное движение точки, когда она все время находится на оси y. При этом она попеременно соударяется с кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ (рис. 2). Траекторию такого движения называют двухзвенной траекторией. Она задается соотношениями $x=0$, $0\leqslant y\leqslant1$.

Задача об орбитальной устойчивости этой траектории рассматривалась в дипломной работе А. А. Маркеева. Было показано, что условие устойчивости в линейном приближении имеет вид $0 \leqslant d_2 \leqslant 1/2$. На-

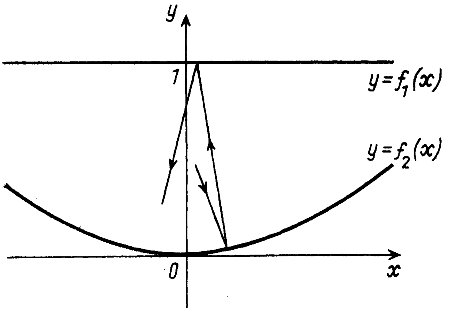

Рис. 2

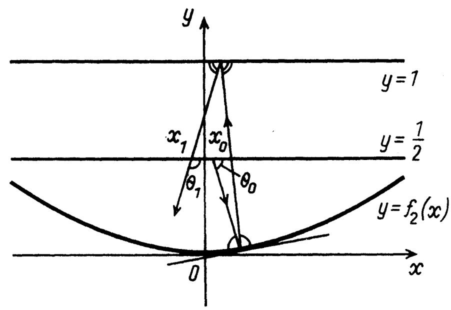

Рис. 3

шей целью является исследование характера потери устойчивости двухзвенной траектории при переходе коэффициента d_2 через т. 1/2. Мы будем рассматривать случай $d_3=0$.

Следует отметить, что поставленная задача эквивалентна задаче о движении материальной точки, заключенной между двумя кривыми, симметричными относительно прямой $y=1$. Исследуемая двухзвенная траектория в этом случае будет описываться соотношениями $x=0$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Утверждение. *При $d_4 < 1/8$ потеря устойчивости двухзвенной траектории при переходе d_2 через т. 1/2 мягкая, а при $d_4 > 1/8$ потеря устойчивости жесткая.*

Доказательство. О том, что в точке $d_4=1/8$ меняется характер потери устойчивости, можно догадаться из следующих простых соображений. Равенство $d_4=1/8$ выполняется, в частности, для окружности с центром в точке (0, 1). В этом случае существует бесконечное количество замкнутых четырехзвенных траекторий, проходящих через точку (0, 1). С другой стороны, из фазовых портретов, приведенных в § 1, видно, что ни в случае жесткой, ни в случае мягкой потери устойчивости такого быть не может.

Теперь приведем строгое доказательство. Рассмотрим отображение, описывающее динамическое состояние точки в момент ее прохождения через прямую $y=1/2$. Это отображение построено А. А. Маркеевым. При $d_2=1/2$ и $d_3=0$ оно имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = -2z_0 + y_0 - 3d_4(z_0+y_0)^3 - z_0^3/2 + 7z_0^2y_0/4 + 2z_0y_0^2 + y_0^3/4 + \ldots, \\ y_1 = -z_0 - d_4(z_0+y_0)^3 + z_0^3/4 + z_0^2y_0/2 + 3z_0y_0^2/4 + \ldots, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $z=2x$, $y=\dot{x}=\cos\theta$; x — абсцисса точки в момент ее прохождения через прямую $y=1/2$, а θ — угол между направлением скорости точки и горизонталью (рис. 3). Многоточием в соотношениях (2.1) обозначаются члены порядка 4 и выше.

Далее можно было бы действовать следующим образом. Построить 4π-периодическую гамильтонову систему с полутора степенями свободы, для которой квадрат отображения (2.1) является отображением за период, а затем вычислить коэффициент D в ее нормальной форме. Однако указанная процедура довольно громоздкая, и мы будем действовать иначе.

По отображению (2.1) можно найти F — первый интеграл с точностью до членов порядка 5 в F. Отметим, что отображение (2.1) интегрируемым, как правило, не является и точного первого интеграла, следовательно, не существует. Фактически F является гамильтонианом, для которого отображение за время $t=2$ совпадает с квадратом (2.1) с точностью до несущественных слагаемых. Функция F имеет вид

$$F=(z-y)^2+(4d_4-3/2)z^2y^2+(-8d_4+2)zy^3.$$

Произведем следующую замену: $\tilde{z}=z-y$, $\tilde{y}=y$. Получим

$$\tilde{F}=\tilde{z}^2+(-8d_4+1)\tilde{y}^4+(4d_4-3/2)\tilde{z}^2\tilde{y}^2-\tilde{z}\tilde{y}^3.$$

Линии уровня «интеграла» изображены на рис. 4. Действительно, рас-

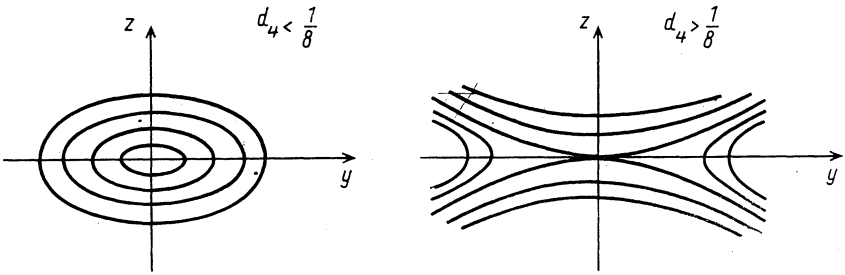

Рис. 4

смотрим кривые $\tilde{F}=\lambda^4$, где величина $\lambda>0$ мала. Произведя перенормировку $\tilde{z}=\lambda^2\hat{z}$, $\tilde{y}=\lambda\hat{y}$, получим уравнение

$$\hat{z}^2+(-8d_4+1)\hat{y}^4+O(\lambda)=1. \tag{2.2}$$

В силу малости λ кривые (2.2) близки к кривым $\hat{z}^2+(-8d_4+1)\hat{y}^4=1$. После обратной замены $\hat{y}, \hat{z} \to \tilde{y}, \tilde{z}$ получаем рис. 4.

Таким образом, на рис. 4 изображены фазовые портреты «невозмущенной системы» — гамильтоновой системы с гамильтонианом $\tilde{F}$. Нормальная форма точной системы имеет те же фазовые портреты, следовательно, значения $d_4<1/8$ соответствуют мягкой потере устойчивости, а $d_4>1/8$ — жесткой. Утверждение доказано.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 93-01-16244.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Paris, 1879; Oeuvres de Henry Poincaré, T. I. Paris, 1951. XLIX—CXXIX.
2. Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний//Собр. соч. М., 1956. 85—124.
3. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Т. 3. М., 1985.
4. Трещев Д. В. Потеря устойчивости в гамильтоновых системах, зависящих от параметров//Прикл. матем. и механ. 1992. **56**, вып. 4. 18—35.

Поступила в редакцию
15.04.94