A. G. Aleksandrov, Milnor numbers of nonisolated saito singularities, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 1, 1–10

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 1—10

УДК 515.17

ЧИСЛА МИЛНОРА НЕИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ САИТО

А. Г. Александров

В 1975 г. К. Саито, вычисляя связность Гаусса—Манина для версальной деформации простой особенности A_3, ввел понятие дифференциальной формы на гладком комплексном многообразии с логарифмическим полюсом вдоль приведенной гиперповерхности — дискриминанта деформации (см. [13]). Оказалось, что именно через такие формы выражаются коэффициенты связности. Там же было замечено, что формы с логарифмическим полюсом вдоль дискриминанта (равно как и векторные поля, касающиеся дискриминанта) порождают локально свободный модуль. Гиперповерхности, удовлетворяющие этому условию, мы, следуя П. Картье [5], называем дивизорами Саито, или свободными дивизорами.

Отметим, что во всех известных работах, в которых вычисляются числа Милнора для разных типов неизолированных особенностей (см., например, [10; 2; 12, п. 9; 16]), по существу оперируют с явным видом уравнения этой особенности. Однако для особенностей Саито, например дискриминантов, соответствующие уравнения записать (или даже вообразить) не так просто: дискриминанты версальных деформаций особенностей A_3, A_4 и A_5 задаются уравнениями из 6, 19 и 76 мономов соответственно. В этой работе мы покажем, что для вычисления чисел Милнора особенностей Саито вместо явного уравнения удобнее использовать некоторый специальный — нильпотентный — базис модуля логарифмических векторных полей $\mathrm{Der}_M(\log D)$ — см. § 1.

В § 2 мы доказываем лемму де Рама для E-однородных особенностей Саито: если h — голоморфная функция, задающая такую особенность, и ω — регулярная q-форма такая, что $dh \wedge \omega = 0$, то $h\omega = dh \wedge \eta$, где η — некоторая регулярная $(q-1)$-форма.

В § 3 приводится определение чисел Милнора неизолированной особенности гиперповерхности, а в § 4 с помощью леммы де Рама мы сводим вычисление чисел Милнора квазиоднородной особенности Саито к задаче линейной алгебры — вычислению гомологий некоторого комплекса М. Так, например, старшее число Милнора равно рангу свободного $\mathcal{O}_S$-модуля $\left(\mathcal{O}_A/\left\{\sum_{i=1}^{n}\delta^i(g)+\varphi_i g,\ g\in\mathcal{O}_A\right)\right\}/\mathrm{Torsion}$, где δ^i — элементы нильпотентного базиса модуля логарифмических векторных полей, а функции φ_i определяются из условия $L_{\delta^i}(dz)=\varphi_i dz$ (для дискриминанта миниверсальной деформации простой особенности A_k имеем $\varphi_i=(-1)^{i-i}\sum_{j=1}^{k-1} c_j^{ij}$, где c_s^{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{N}\subset\mathrm{Der}_M(\log D)$ и $\deg\delta^i=i$, $i=1,\ldots,k-1$).

Автор благодарит А. Б. Гивенталя, А. Н. Кузнецова, В. П. Паламодова и А. Н. Варченко за полезные обсуждения и советы.

§ 1. *E*-однородные особенности Саито

Пусть M — гладкое $(n+1)$-мерное комплексное многообразие, $D\subset M$ — дивизор, все неприводимые компоненты которого имеют кратность единица, т. е. приведены. С таким дивизором можно связать когерентные аналитические пучки $\Omega_M^q(\log D)$, $q \geqslant 0$, и $\mathrm{Der}_M(\log D)$ следующим образом (см. [14]). Пусть $z=(z_0, \ldots, z_n)$ — локальные координаты точки $x \in M$, $h=h(z)=0$ — локальное уравнение дивизора D в точке x. Тогда росток $\Omega_{M,x}^q(\log D)$ пучка $\Omega_M^q(\log D)$ в точке x состоит из ростков мероморфных q-форм на M таких, что $h\omega$ и $hd\omega$ (или $dh \wedge \omega$) голоморфны в точке x, а $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$ состоит из ростков голоморфных векторных полей δ на M таких, что $\delta(h) \subseteq h\mathcal{O}_{M,x}$ (в частности, такое поле δ касается дивизора D в его неособой точке). Внутреннее умножение полей и форм индуцирует спаривание $\mathcal{O}_M$-модулей

$$\mathrm{Der}_M(\log D) \times \Omega_M^q(\log D) \to \Omega_M^{q-1}(\log D),$$

так что пучки $\mathrm{Der}_M(\log D)$ и $\Omega_M^1(\log D)$ $\mathcal{O}_M$-двойственны.

К. Саито называет $\mathcal{O}_M$-модуль $\Omega_M^q(\log D)$ пучком логарифмических q-форм, или пучком мероморфных q-форм, логарифмичных вдоль дивизора D, т. е. имеющих логарифмический полюс на D, а $\mathrm{Der}_M(\log D)$ — пучком логарифмических векторных полей.

Определения. Гиперповерхность $D \subset M$ называется *дивизором Саито* (или *свободным дивизором*), если $\Omega_M^1(\log D)$ (или двойственный модуль $\mathrm{Der}_M(\log D)$ — локально свободный $\mathcal{O}_M$-модуль. По аналогии, росток (D, x) гиперповерхности D в точке $x \in M$ (или дуальную аналитическую алгебру $\mathcal{O}_{D,x}$) будем называть *особенностью Саито*, если $\Omega_{M,x}^1(\log D)$ — свободный $\mathcal{O}_{M,x}$-модуль. Особенность (D, x) называется *E-однородной*, если существует векторное поле $E \in \mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$ такое, что $Eh=ah$, $a \in \mathcal{O}_{M,x}^*$ — обратимый элемент. Соответственно, дивизор $D \subset M$ называется E-однородным, если в любой точке $x \in D$ особенность (D, x) E-однородна.

Таким образом, *квазиоднородная* особенность является E-однородной, и в этом случае $E=\sum w_i z_i \partial/\partial z_i$ — обычное поле Эйлера, $w_0, \ldots, w_n \in \mathbf{Q}$ — веса переменных $z_0, \ldots, z_n$. Напомним, что согласно известному результату К. Саито для изолированной особенности гиперповерхности условие квазиоднородности эквивалентно существованию поля Эйлера в подходящей системе локальных координат. Более сложный пример — дискриминант версальной деформации функции с изолированной критической точкой является E-однородной (но не обязательно квазиоднородной) особенностью — см [15, (1.6)]. По аналогии с квазиоднородным случаем, поле E из определения называется векторным полем Эйлера.

Пусть теперь $\mathfrak{R}=\{\delta \in \mathrm{Der}_{M,x}(\log D)\colon \delta h=0\}$ — $\mathcal{O}_{M,x}$-подмодуль $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$. Тогда набор коэффициентов некоторого поля $\delta \in \mathfrak{R}$ определяет соотношение (или сизигию первого порядка) на частные производные функции $h \in \mathcal{O}_{M,x}$. Все такие соотношения порождают $\mathcal{O}_{M,x}$-модуль $Z_1(dh)$, естественно изоморфный модулю 1-циклов обычного комплекса Кошуля $K_\bullet(dh)$, построенного по элементам $h_0', \ldots, h_n' \in \mathcal{O}_{M,x}$, $h_i'=\partial h/\partial z_i$. В свою очередь, образующие $\mathcal{O}_{M,x}$-модуля $Z_1(dh)$ могут быть связаны нетривиальными соотношениями — сизигиями второго порядка, порождающими $Z_2(dh)$ и т. д.

Предложение. *Пусть (D, x) — n-мерная E-однородная особенность Саито. Тогда модуль логарифмических векторных полей можно представить в виде прямой суммы свободных $\mathcal{O}_{M,x}$-модулей* $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D) \simeq \mathcal{O}_{M,x}E \oplus \mathfrak{R}$, *причем* $\mathrm{rang}\, \mathcal{O}_{M,x}\mathfrak{R}=n$. *В частности, все модули сизигий высших порядков тривиальны.*

Доказательство. По условию, $Eh=ah$, $a \in \mathcal{O}_{M,x}^*$. Если $E \in \mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$ *и* $E'h=gh$, $g \in \mathcal{O}_{M,x}$, то $(E'-ga^{-1}E)(h)=0$, т. е. $E'-ga^{-1}E \in \mathfrak{R}$ — это и дает требуемое разложение. Тот факт, что $Z_1(dh)=\mathfrak{R}$ свободен, следует из определения особенности Саито, поскольку проективный модуль над локальным кольцом свободен.

Следствие. *Пусть* (D, x) — *E-однородная особенность Саито*, $\delta^1, \ldots, \delta^n$ — *базис подмодуля* $\mathfrak{N} \subset \mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$. *Тогда каждая частная производная* $h_0', \ldots, h_n'$ *функции* h *с точностью до обратимого элемента* $\mathcal{O}_{M,x}$ *задается одним из максимальных миноров* $n \times (n+1)$-*матрицы, образованной коэффициентами векторных полей* $\delta^1, \ldots, \delta^n$.

Доказательство. Набор векторных полей $E, \delta^1, \ldots, \delta^n$ является базисом $\mathcal{O}_{M,x}$-модуля $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$. Пусть Δ — матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$, составленная из строк — коэффициентов этих полей, причем первая строка соответствует полю Эйлера E. Тогда, по критерию К. Саито [14, (1.8)], $\det \Delta = ah$, $Eh = bh$, $a, b \in \mathcal{O}^*_{M,x}$, так что имеется тождество $\Delta \cdot (h_0', \ldots, h_n')^T = (bh, 0, \ldots, 0)^T$ (здесь символ T обозначает транспонирование). Это дает искомое представление для частных производных функции h.

Определение. Базис модуля $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$, состоящий из поля Эйлера E и n образующих $\delta^1, \ldots, \delta^n$ подмодуля $\mathfrak{N}$, назовем *нильпотентным*.

Если D — дискриминант версальной деформации функции с изолированной критической точкой, то этот базис отличается как от «симметрического», возникающего при вычислении сворачивания инвариантов конечных групп Коксетера (см. [1; 6; 18]), так и от плоского базиса (см. [15]) и от базиса Фиттинга (см. [19; 15]).

§ 2. Лемма де Рама

Пусть (D, x) — n-мерная E-однородная особенность Саито, $E = \delta^0$, $\delta^1, \ldots, \delta^n$ — нильпотентный базис модуля $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$, Δ — матрица, состоящая из $(n+1)$ строк — коэффициентов векторных полей $\delta^i = \sum_{j=0}^{n} \delta^{ij}(z)\, \partial/\partial z_j$, $i = 0, \ldots, n$, $\delta^{ij}(z) \in \mathcal{O}_{M,x}$. Тогда $\det \Delta = ah$, $a \in \mathcal{O}^*_{M,x}$, и h — локальное уравнение дивизора $D \subset M$ в точке x. Обозначим через Δ_{ij} алгебраическое дополнение элемента δ^{ij} матрицы Δ и рассмотрим 1-формы $\vartheta_i = \sum_{j=0}^{n} \Delta_{ij} dz_j$, $i = 0, \ldots, n$. Тогда $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i/\det \Delta$, $i = 0, \ldots, n$,— двойственный к $\delta^0, \ldots, \delta^n$ базис свободного $\mathcal{O}_{M,x}$-модуля логарифмических форм $\Omega^1_{M,x}(\log D)$ относительно спаривания полей и форм из § 1. Действительно, если обозначить через ι_δ внутреннее умножение (стягивание) на векторное поле $\delta \in \mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$, то $\iota_{\delta^i}(\tilde{\vartheta}_i) = 1$ и $\iota_{\delta^i}(\tilde{\vartheta}_j) = 0$, если $i \neq j$, для $i, j = 0, \ldots, n$.

Лемма. *Пусть* (D, x) — n-*мерная* E-*однородная особенность Саито, определенная голоморфной функцией* $h \in \mathcal{O}_{M,x}$. *Тогда для любой формы* $\omega \in \Omega^q_{M,x}$, $1 \leqslant q \leqslant n$, *удовлетворяющей условию* $dh \wedge \omega = 0$, *имеем* $h\omega \in dh \wedge \Omega^{q-1}_{M,x}$.

Более того, если $\delta^0, \delta^1, \ldots, \delta^n$ — *нильпотентный базис модуля* $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$, *то такую форму можно представить в виде*

$$\omega = \sum g_{i_1 \ldots i_{n-q+1}} \iota_{\delta^{i_1}} \cdots \iota_{\delta^{i_{n-q+1}}}(dz),$$

где суммирование производится по всем наборам $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n-q+1} \leqslant n$, *а* $g_{i_1 \ldots i_{n-q+1}} \in \mathcal{O}_{M,x}$.

Приведем несколько свойств логарифмических полей и форм, которые понадобятся при доказательстве:

1) $\delta^0, \delta^1, \ldots, \delta^n$ — инволютивная система векторных полей, т. е. $[\delta^i, \delta^j] = \sum_{k=0}^{n} c_k^{ij}(z)\, \delta^k$, функции $c_k^{ij} \in \mathcal{O}_{M,x}$ называются структурными «константами» алгебры Ли $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$ относительно базиса $\delta^0, \ldots, \delta^n$;

2) для $g \in \mathcal{O}_{M,x}$ имеем $dg = \sum_{i=0}^{n} (\delta^i g) \widetilde{\vartheta}_i$;

3) $\iota_{\delta^i}(\vartheta_i) = \det(\Delta) = ah$, $a \in \mathcal{O}^*_{M,x}$, $\iota_{\delta^i}(\vartheta_j) = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, в частности, $\widetilde{\vartheta}_0 = dh/ah$;

4) для нильпотентного базиса $c_k^{ij} = 0$ при $k = 0$, т. е. $\mathfrak{N}$ — подалгебра Ли $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$;

5) $(-1)^{i_1+\ldots+i_p}\vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\vartheta}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{\vartheta}_{i_p} \wedge \ldots \wedge \vartheta_n = (\det\Delta)^{n-p} \times \iota_{\delta^{i_1}} \ldots \iota_{\delta^{i_p}}(dz)$, где $0 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ — произвольный упорядоченный p-набор множества целых чисел $\{0, 1, \ldots, n\}$, а крышка над формой означает, как всегда, что эта форма не входит в произведение.

Первые два свойства доказаны в [14, (1.9) и (1.10)] — они справедливы, конечно, для любой системы дуальных базисов, третье и четвертое — очевидны. Для доказательства пятого свойства заметим, что если Δ' — взаимная матрица к Δ, то $\det\Delta' = (\det\Delta)^n$, поэтому $\vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n = (\det\Delta)^n (dz_0 \wedge \ldots \wedge dz_n)$. Остается последовательно применить к обеим частям этого тождества стягивания ι_{δ^i}.

Доказательство леммы. Рассмотрим мероморфную форму $\widetilde{\omega} = \omega/h$. Тогда $h\widetilde{\omega}$ и $dh \wedge \widetilde{\omega} = 0$ голоморфны по условию леммы, так что $\widetilde{\omega} \in \Omega^q_{M,x}(\log D)$ логарифмична. По определению особенности Саито, $\Omega^1_{M,x}(\log D)$ порождается как $\mathcal{O}_{M,x}$-модуль свободными образующими $\widetilde{\vartheta}_0, \ldots, \widetilde{\vartheta}_n$, так что (см. [14, (1.8)]) $\widetilde{\omega} = \sum_{0 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n} g_{j_1 \ldots j_q} \widetilde{\vartheta}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\vartheta}_{j_q}$. Предположим, что в это разложение входит с ненулевым коэффициентом хотя бы одно слагаемое, не делящееся на $\widetilde{\vartheta}_0 = dh/ah$, $a \in \mathcal{O}^*_{M,x}$. Тогда умножив последнее тождество на $\widetilde{\vartheta}_0$, получим *нетривиальное* соотношение на *свободные* образующие модуля $\Omega^{q+1}_{M,x}(\log D)$ — противоречие. Это означает, что $\widetilde{\omega}$ можно записать в виде $\widetilde{\omega} = \sum_{1 \leqslant j_2 < \ldots < j_q \leqslant n} g_{0 j_2 \ldots j_q} \widetilde{\vartheta}_0 \wedge \widetilde{\vartheta}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\vartheta}_{j_q}$.

По свойству 5), $\vartheta_0 \wedge \vartheta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{j_q} = (-1)^{i_1+\ldots+i_{n-q+1}} (\det\Delta)^q \iota_{\delta^{i_1}} \ldots \iota_{\delta^{i_{n-q+1}}}(dz)$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n-q+1} \leqslant n$ — дополнительный к множеству $\{0, j_2, \ldots, j_q\} \subset [0, n]$ набор целых чисел. Это и дает разложение, указанное в лемме, поскольку $\widetilde{\vartheta}_i = \vartheta_i/\det\Delta$, $i = 0, \ldots, n$. Отсюда, в частности, следует, что $h\omega$ делится на dh.

Замечание. Если h — голоморфная функция и форма $\omega \in \Omega^q_{M,x}$ такова, что $dh \wedge \omega = 0$, то $(\partial h/\partial z_i)^\rho \omega = dh \wedge \eta$, $i = 0, \ldots, n$, для некоторого целого $\rho \geqslant 0$ и $\eta \in \Omega^{q-1}_{M,x}$ — см. [14, (2.3)]. Содержательный смысл целого числа ρ заключается, по-видимому, в том, что оно служит мерой «отклонения» модуля $\mathrm{Der}_{M,x}(\log h)$ от свободного.

§ 3. Числа Милнора

Пусть $x \in \mathbf{C}^m$ и $f\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}$ — голоморфное отображение такое, что $f(x) = 0$ и $f^{-1}(t)$ гладко для всех $t \neq 0$.

Возьмем малые окрестности точек $x \in \mathbf{C}^m$ и $0 \in \mathbf{C}$: $X = \{y \in \mathbf{C}^m\colon \|y - x\| < \varepsilon, |f(y)| < \delta\}$, $S = \{t \in \mathbf{C}\colon |t| < \delta\}$. Пусть $X_t = f^{-1}(t) \cap X$, $t \in S$,— слой ограничения $f\colon X \to S$, $X' = X - X_0$, $S' = S - \{0\}$. Если $0 < \delta < \varepsilon$ достаточно малы, то $f'\colon X' \to S'$ — локально тривиальное C^∞-расслоение. Можно доказать, что $H^p(X_t, \mathbf{C}) = 0$ при $0 < p < \operatorname{codim}(\operatorname{Sing} X_0, X_0)$ (см. [8, теорема 1]). Более того, из результатов ряда авторов (см., например, [11]) следует обращение в нуль соответствующих гомотопических групп.

Пусть, как обычно, $\Omega^\cdot_X$ — комплекс де Рама голоморфных дифференциальных форм на X, $\Omega^\cdot_{X/S} = \Omega^\cdot_X/df \wedge \Omega^{\cdot -1}_X$ — комплекс относительных дифференциальных форм. Тогда $\mathbf{R}^p f_* \Omega^\cdot_{X/S}$ — p-я группа относительных когомологий де Рама является $\mathcal{O}_S$-модулем. Будем обозначать через $\mathcal{M}/\mathrm{Torsion}$ фактор $\mathcal{O}_S$-модуля $\mathcal{M}$ по подмодулю, состоящему из элементов $\mathcal{O}_S$-кручения $\mathcal{M}$.

Теорема [9, гл. II]. *Для любого $p \geqslant 0$ пучок $\mathbf{R}^p f_* \Omega^\cdot_{X/S}/\mathrm{Torsion}$ является свободным $\mathcal{O}_S$-модулем конечного типа. Кроме того, существует канонический изоморфизм* $(\mathbf{R}^p f_* \Omega^\cdot_{X/S}/\mathrm{Torsion})_t \cong H^p(X_t, \mathbf{C}) \otimes \mathcal{O}_{S,t}$, $t \in S' \subset \mathbf{C}^*$.

Определение. Положим в этих обозначениях для $p \geqslant 0$

$$\mu^{(p)}(X_0) = \mathrm{rang}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{R}^p f_* \Omega^\cdot_{X/S}/\mathrm{Torsion})$$

и назовем $\mu^{(p)}(X_0)$ *p-м числом Милнора* особенности X_0. Конечно, $\mu^{(p)}(X_0) = 0$ при $p > n = \dim X_0$. Изоморфизм теоремы Хамма проясняет топологический смысл p-го числа Милнора неизолированной особенности — это размерность p-й группы когомологий ее неособой деформации.

В квазиоднородном случае определение чисел Милнора можно переформулировать в более удобной для вычислений форме.

Предложение. *Пусть $A = \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[z_0, \ldots, z_n]$, $S = \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t]$, $h \in \mathbf{C}[z_0, \ldots, z_n]$ — квазиоднородный полином, задающий, как обычно, морфизм $f\colon A \to S$ со слоем $f^{-1}(0) = X_0$ — (неизолированной) особенностью, $t_0 \in S' \subset \mathbf{C}^*$, $n = \dim X_0$. Тогда $\mu^{(p)}(X_0) = \mathrm{rang}_{\mathcal{O}_S} H^p(\Gamma(A, dh \wedge \Omega^\cdot_A))/$ $/\mathrm{Torsion} = \dim_{\mathbf{C}} H^p(\Gamma(A, \Omega^\cdot_A/dh \wedge \Omega^{\cdot -1} + (h - t_0)\,\Omega^\cdot_A))$.*

Доказательство. В диссертации Г. А. Хамма [9, гл. II, § 6] показано, что существует изоморфизм $\mathcal{O}_S$-модулей $\Gamma(S, \mathbf{R}^p f_* \Omega^\cdot_{A/S}/\mathrm{Torsion}) \simeq$ $\simeq H^p(\Gamma(A, \Omega^\cdot_{A/S}))/\mathrm{Torsion} \cong H^p(\Gamma(A, dh \wedge \Omega^\cdot_A))/\mathrm{Torsion}$ — отсюда следует утверждение. Другое рассуждение имеется в работе [10, § 2].

§ 4. Вычисление чисел Милнора

Пусть (D, x) — n-мерная *квазиоднородная* особенность Саито, $\delta^0 = E$, $\delta^1, \ldots, \delta^n$ — нильпотентный базис модуля $\mathrm{Der}_{M,x}(\log D)$, Δ — матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$, строки которой состоят из коэффициентов этих векторных полей (см. § 1), а порядковый номер строки тот же, что и у соответствующего векторного поля. Тогда $h = \det(\Delta)$ — квазиоднородный полином от взвешенных переменных $z_0, \ldots, z_n$ с весами $w_0, \ldots, w_n \in \mathbf{Z}_+$ соответственно — это полином и задает особенность D.

Из последнего утверждения предыдущего параграфа следует, что для квазиоднородной особенности вычисление чисел Милнора сводится к изучению когомологий комплекса $\{\Gamma(A, dh \wedge \Omega^\cdot_A), d\}$ на аффинном пространстве $A = \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[z_0, \ldots, z_n]$. Чтобы упростить обозначения, будем опускать символ функтора взятия сечений от пучков на A, так, например, запись $g \in \mathcal{O}_A$, $\omega \in \Omega^q_A$ следует понимать как $g \in \Gamma(A, \mathcal{O}_A)$, $\omega \in \Gamma(A, \Omega^q_A)$ и т. д. Наконец, если в тексте встречается несколько однотипных сумм подряд, то условимся индексы и границы их изменения указывать только у первого в группе знака суммирования.

Напомним (см. § 2), что для нильпотентного базиса $[\delta^i, \delta^j] = \sum_{k=1}^{n} c^{ij}_k(z)\,\delta^k$, и если $v_i = \deg \delta^i \in \mathbf{Z}_+$, то $[\delta^0, \delta^i] = v_i \delta^i$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, пусть $L_{\delta^i} = \iota_{\delta^i} d + d\iota_{\delta^i}$ — производная Ли векторного поля δ^i, положим $L_{\delta^i}(dz) = \varphi_i(dz)$, $\varphi_i \in \mathcal{O}_A$, $i = 0, \ldots, n$.

Обозначим через M_p группу альтернированных функций на $[1, n]^{p+1}$ со значениями в Ω_A^{n+1}, $0 \leqslant p \leqslant n$, и определим *стягивающие* цепные операторы l_p: $M_p \to M_{p-1}$ следующим образом:

$$l_0(g\,dz) = 0, \quad l_1(g\,dz) = \sum_{i_0=1}^{n} L_{\delta^{i_0}}(g\,dz)_{i_0},$$

$$(l_p(g\,dz))_{i_0\ldots i_{p-2}} = \sum_{i_{p-1}=1}^{n} (-1)^{p-1} L_{\delta^{i_{p-1}}}(g\,dz)_{i_0\ldots i_{p-1}} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{p-2} (-1)^j \sum_{1\leqslant i_{p-1}<i_p\leqslant n} c_{i_j}^{i_{p-1}i_p}(z)\,(g\,dz)_{i_0\ldots\hat{i}_j\ldots i_{p-1}i_p},$$
$$2 \leqslant p \leqslant n,\ 1 \leqslant i_0 < \ldots < i_{p-2} \leqslant n.$$

Теорема. *Семейство* $\{M_p, l_p\}$ *определяет* **комплекс** $(M_\bullet, l_\bullet)$ *свободных* $\mathcal{O}_S$-*модулей, и для любого* $0 \leqslant p \leqslant n$ *имеется изоморфизм* $H_p(M_\bullet, l_\bullet)/\mathrm{Torsion} \cong$ $\cong H^{n-p}(dh \wedge \Omega_A^\bullet)/\mathrm{Torsion}$.

Группы гомологий комплекса $M_\bullet$ для $p = 0, 1$ можно представить так:

$$H_0(M_\bullet) \simeq \mathcal{O}_A/\Big\{g \in \mathcal{O}_A\colon\ g = \sum_{i=1}^{n} (\delta^i(g_i) + \varphi_i g_i),\ g_i \in \mathcal{O}_A\Big\},$$

$$H_1(M_\bullet) \simeq \Big\{g = (g_i) \in \mathcal{O}_A^n\colon\ \sum_{i=1}^{n} (\delta^i(g_i) + \varphi_i g_i) = 0\Big\}\Big/\Big\{g = (g_j) \in \mathcal{O}_A^n\colon\ g_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\delta^i(g_{ij}) + \varphi_i g_{ij}) + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} c_j^{kl} g_{kl},\ g_{ij} = -g_{ji} \in \mathcal{O}_A\Big\}.$$

В доказательстве теоремы мы будем пользоваться следующей формулой.

Лемма. *Для произвольного набора векторных полей* $V^1, \ldots, V^q$ *на* A *при* $q \geqslant 2$ *имеется тождество*

$$d\iota_{V^1}\ldots\iota_{V^q} = \frac{1}{2(q-2)!}\sum \sigma(i_1, \ldots, i_q)\,\iota_{[V^{i_1}, V^{i_2}]}\iota_{V^{i_3}}\ldots\iota_{V^{i_q}} +$$
$$+ (-1)^{q-1}\frac{1}{(q-1)!}\sum \sigma(i_1, \ldots, i_q)\,\iota_{V^{i_1}}\ldots\iota_{V^{i_{q-1}}}d\iota_{V^{i_q}} +$$
$$+ (-1)^{q-1}(q-1)\,\iota_{V^1}\ldots\iota_{V^q}d,$$

где $\sigma(i_1, \ldots, i_q)$ — *знак подстановки, а суммирование ведется по всем перестановкам* $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, q\}$.

Доказательство. Используя стандартное соотношение $[L_V, \iota_W] = \iota_{[V,W]}$, при $q = 2$ получаем

$$d\iota_{V^1}\iota_{V^2} = \iota_{[V^1, V^2]} - \iota_{V^1}d\iota_{V^2} + \iota_{V^2}d\iota_{V^1} - \iota_{V^1}\iota_{V^2}d.$$

Дальше нетрудно провести индукцию, поскольку $d\iota_{V^1}\ldots\iota_{V^q} = (d\iota_{V^1}\ldots$ $\ldots\iota_{V^{q-1}})\,\iota_{V^q}$.

Доказательство теоремы. Тот факт, что композиция $l_p \cdot$ $\cdot l_{p+1}$ равна нулю, можно получить с помощью тождества $[L_{\delta^i}, L_{\delta^j}] = L_{[\delta^i,\delta^j]}$.

Обозначим через $U = \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t, t^{-1}] \subset S$ открытое аффинное подмножество. Для доказательства теоремы достаточно показать, что существуют изоморфизмы $\mathcal{O}_U$-модулей $H_p(M_\bullet, l_\bullet) \cong H^{n-p}(dh \wedge \Omega_A^\bullet)$. Рассмотрим сперва случай $p = 0$.

Так как $\dim A = n + 1$, то $dh \wedge \Omega_A^{n+1} = 0$ и, следовательно,

$$\mathrm{Ker}\,(d_n\colon\ dh \wedge \Omega_A^n \to dh \wedge \Omega_A^{n+1}) \simeq dh \wedge \Omega_A^n \simeq \Big(\sum_{i=0}^{n} \mathcal{O}_A\,\partial h/\partial z_i\Big)(dz).$$

Последнее пространство, конечно, вкладывается в Ω_A^{n+1}, причем коядро этого вложения аннулируется умножением на h.

Опишем $\mathrm{Im}\ (d_{n-1}\colon dh \wedge \Omega_A^{n-1} \to dh \wedge \Omega_A^n)$. Пусть $\omega \in \Omega_A^n$ и $\eta \in \Omega_A^{n-1}$ таковы, что $dh \wedge \omega = dh \wedge d\eta$, т. е. $dh \wedge (\omega - d\eta) = 0$. По лемме де Рама § 2 найдутся элементы $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_A$ такие, что $\omega - d\eta = \sum_{i=1}^{n} g_i \iota_{\delta^i}(dz)$. Согласно свойствам 2) и 5) из § 2 имеем

$$h\, dg_i = \sum_{k=0}^{n} \delta^k (g_i)\, \vartheta_k,\ h^{n-1}\iota_{\delta^i}(dz) = (-1)^i \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\vartheta}_i \wedge \ldots \wedge \vartheta_n,$$

поэтому $h^n\, d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i h\, dg_i \wedge \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\vartheta}_i \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + h^n g_i \varphi_i (dz)$.
Отсюда получается $d\omega = \sum L_{\delta^i}(g_i\, dz) = \sum (\delta^i (g_i) + \varphi_i g_i)(dz)$.

Для описания фактора $\mathrm{Ker}\, d_n / \mathrm{Im}\, d_{n-1}$ рассмотрим коммутативную диаграмму $\mathcal{O}_U$-модулей

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & I^n & \to & \Omega_A^n & \xrightarrow{dh} & dh \wedge \Omega_A^n & \to 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & I_0^n & \to & d\Omega_A^{n-1} & \xrightarrow{dh} & dh \wedge d\Omega_A^{n-1} & \to 0,
\end{array}$$

в которой $I^n = \{\omega \in \Omega_A^n\colon \omega = \sum g_i \iota_{\delta^i}(dz),\ g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_A\}$, $I_0^n = \{\omega \in I^n\colon d\omega = \sum L_{\delta^i}(g_i dz) = 0\} \subset d\Omega_A^{n-1}$, а точность обеих строк следует из леммы де Рама.

Из диаграммы получаем изоморфзим

$$\Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} + I^n \cong dh \wedge \Omega_A^n / dh \wedge d\Omega_A^{n-1}.$$

Наконец, имеется точная последовательность

$$0 \to d\Omega_A^{n-1} + I^n \to \Omega_A^n \xrightarrow{d} \Omega_A^{n+1} / dI^n \to 0,$$

в которой эпиморфизм d индуцируется обычным дифференциалом комплекса де Рама $\Omega_A^{\cdot}$. В итоге получаем изоморфизм $\mathcal{O}_U$-модулей

$$H^n (dh \wedge \Omega_A^{\cdot}) \cong \Omega_A^{n+1} / \sum L_{\delta^i} (\Omega_A^{n+1})$$

и утверждение теоремы для $p = 0$.

Перейдем к случаю $p = 1$. Сначала определим $\mathrm{Ker}\ (d_{n-1}\colon dh \wedge \Omega_A^{n-1} \to dh \wedge \Omega_A^n)$. Пусть форма $\omega \in \Omega_A^{n-1}$ такова, что $dh \wedge d\omega = 0$. По лемме де Рама, $d\omega = \sum g_i \iota_{\delta^i}(dz)$, $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_A$. Найдем ограничения на g_i, используя условие интегрируемости формы ω

$$d^2\omega = \sum dg_i \wedge \iota_{\delta^i}(dz) + g_i d\iota_{\delta^i}(dz) = 0.$$

Пользуясь свойствами нильпотентного базиса, как и при $p = 0$, имеем $h^n d^2\omega = \sum (-1)^i h\, dg_i \wedge \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\vartheta}_i \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + h^n \varphi_i g_i (dz) = \sum \delta^i (g_i)\, \vartheta_0 \wedge \wedge \ldots \wedge \vartheta_i \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + h^n \varphi_i g_i (dz)$. Отсюда получается такое условие на $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_A$:

$$\sum L_{\delta^i}(g_i dz) = 0, \text{ или } \sum (\delta^i (g_i) + \varphi_i g_i) = 0$$

— это означает, что $\mathrm{Ker}\ (d_{n-1}) \simeq \mathrm{Ker}\ (l_1)$.

Найдем теперь $\mathrm{Im}\ (d_{n-2}\colon dh \wedge \Omega_A^{n-2} \to dh \wedge \Omega_A^{n-1})$. Пусть $\omega \in \Omega_A^{n-1}$ и существует форма $\eta \in \Omega_A^{n-2}$ такая, что $dh \wedge \omega = dh \wedge d\eta$, т. е. $dh \wedge (\omega - d\eta) = 0$. По лемме де Рама это значит, что найдутся функции $g_{ij} \in \mathcal{O}_A$,

$1 \leqslant i < j \leqslant n$, такие, что

$$\omega - d\eta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij} \iota_{\delta^i} \iota_{\delta^j}(dz), \text{ т. е. } d\omega = \sum dg_{ij} \wedge \iota_{\delta^i}\iota_{\delta^j}(dz) + g_{ij} d\iota_{\delta^i}\iota_{\delta^j}(dz).$$

Пользуясь леммой, доказанной выше для $q = 2$, и тем, что $[\delta^i, \delta^j] = \sum_{k=1}^{n} c_k^{ij} \delta^k$, $h\, dg_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \delta^k (g_{ij}) \vartheta_k$, получаем

$$\begin{aligned} h^{n-1} d\omega = & \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} h\, dg_{ij} \wedge \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_j \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + \\ & + h^{n-1} \sum g_{ij} (\iota_{[\delta^i, \delta^j]} - \iota_{\delta^i} d\iota_{\delta^j} + \iota_{\delta^j} d\iota_{\delta^i})(dz) = \\ & = \sum_{1 \leq k < j} (-1)^j \delta^k (g_{kj}) \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_j \wedge \ldots \wedge \vartheta_n - \\ & - \sum_{i < k \leq n} (-1)^i \delta^k (g_{ik}) \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_i \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{ g_{ij} [\sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k^{ij} \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_k \wedge \ldots \wedge \vartheta_n] - \\ & - (-1)^i \varphi_j \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_i \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + (-1)^j \varphi_i \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_j \wedge \ldots \wedge \vartheta_n \}. \end{aligned}$$

Выпишем коэффициент при $h^{n-1}\iota_{\delta^s}(dz) = (-1)^s \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_s \wedge \ldots \wedge \vartheta_n$:

$$\sum_{1 \leq k < s} \delta^k (g_{ks}) - \sum_{s < k \leq n} \delta^k (g_{sk}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij} c_s^{ij} - \sum_{s < j \leq n} g_{sj} \varphi_j + \sum_{1 \leq i < s} g_{is} \varphi_i.$$

Рассматривая функции g_{ij} как альтернированные, получаем, что $\operatorname{Im}(d_{n-2}) \simeq \operatorname{Im}(l_2)$, а следовательно, и изоморфизм теоремы при $p = 1$.

Наконец, зафиксируем $p \in [2, n]$ и опишем $\operatorname{Ker}(d_{n-p}\colon dh \wedge \Omega_A^{n-p} \to dh \wedge \Omega_A^{n-p+1})$. Пусть форма $\omega \in \Omega_A^{n-p}$ такова, что $dh \wedge \omega = 0$. По лемме де Рама,

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_0 < \ldots < i_{p-1} \leq n} g_{i_0 \ldots i_{p-1}} \iota_{\delta^{i_0}} \ldots \iota_{\delta^{i_{p-1}}}(dz),$$

и после некоторых преобразований (с использованием леммы из начала доказательства) условие интегрируемости $h^{n-p+1} d^2\omega = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} (-1)^{p-1} & \sum_{i_{p-1}=1}^{n} \sum_{1 \leq i_0 < \ldots < i_{p-2} \leq n} (-1)^{i_0 + \ldots + i_{p-2}} [\delta^{i_{p-1}} (g_{i_0 \ldots i_{p-1}}) + \\ & + \varphi_{i_{p-1}} g_{i_0 \ldots i_{p-1}}] \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_{i_{p-2}} \wedge \ldots \wedge \vartheta_n + \\ & + \sum_{1 \leq i_0 < \ldots < i_{p-1} \leq n} g_{i_0 \ldots i_{p-1}} \sum_{0 \leq s < r \leq p-1} (-1)^{i_0 + \ldots + \widehat{i}_s + \ldots + \widehat{i}_r + \ldots + i_p} \times \\ & \times (-1)^{s+r+1} \sum_{i_p = 1}^{n} \sigma(i_p, i_0, \ldots, \widehat{i}_s, \ldots, \widehat{i}_r, \ldots, i_{p-1}) c_{i_p}^{i_s i_r} \times \\ & \times \vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_{i_0} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{i_s} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{i_r} \wedge \ldots \wedge \widehat{\vartheta}_{i_p} \wedge \ldots \wedge \vartheta_n = 0, \end{aligned}$$

где первая дифференциальная форма получается из внешнего произведения $\vartheta_0 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n$ исключением 1-форм с номерами $i_0, \ldots, i_{p-2}$, а вторая — выбрасыванием форм с номерами, принадлежащими множеству $\{i_0, \ldots, i_p\} \setminus \{i_s, i_r\}$; кроме того, $g_{i_0 \ldots i_{p-1}}$ рассматриваются как альтернированные функции на $[1, n]^p$.

Поскольку модуль логарифмических дифференциальных форм *свободен*, то полученное тождество эквивалентно системе уравнений, приравнивающих нулю коэффициенты при $h^{n-p+1}\iota_{\delta^{j_0}} \ldots \iota_{\delta^{j_{p-2}}}(dz) = (-1)^{j_0 + \ldots + j_{p-2}} \vartheta_0 \wedge \ldots$

$\ldots \wedge \hat{\vartheta}_{j_0} \wedge \ldots \wedge \hat{\vartheta}_{j_{p-2}} \wedge \ldots \wedge \vartheta_n$ для всех $(p-1)$-наборов $1 \leqslant j_0 < \ldots < j_{p-2} \leqslant n$. Полученная система тождеств совпадает с условиями на цепь, принадлежащую $\operatorname{Ker}(l_p\colon \mathrm{M}_p \to \mathrm{M}_{p-1})$.

Точно так же проверяется, что элементы $\operatorname{Im}(d_{n-p-1}\colon dh \wedge \Omega_A^{n-p-1} \to dh \wedge \Omega_A^{n-p})$ однозначно определяются цепью из $\operatorname{Im}(l_{p+1}\colon \mathrm{M}_{p+1} \to \mathrm{M}_p)$.

Следствие. $\mu^{(p)}(D) = \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(l_p)/\operatorname{Im}(l_p) + (h-t)\operatorname{Ker}(l_p)$, $t \in S - \{0\} \subset \mathbf{C}^*$.

Замечание. В обозначениях § 1 пусть алгебра Ли $\mathfrak{R} \subset \operatorname{Der}_{A,x}(\log D)$ действует на Ω_A^{n+1} с помощью производной Ли, т. е. для $\delta \in \mathfrak{R}$, $\omega \in \Omega_A^{n+1}$ полагаем $\delta.\omega = L_\delta(\omega)$. Тогда Ω_A^{n+1} становится $\mathfrak{R}$-модулем и определены гомологии $H_.(\mathfrak{R}, \Omega_A^{n+1})$ алгебры Ли $\mathfrak{R}$ со значениями в Ω_A^{n+1} (см. [4]) — это и есть гомологии комплекса $\{\mathrm{M}_., l_.\}$ из нашей теоремы.

§ 5. Примеры

Одномерные особенности Саито. Нетрудно проверить (см. [14, (1.7)]), что это (изолированные) особенности кривых в $\mathbf{C}^2$ и обратно. Нильпотентный базис модуля логарифмических векторных полей состоит из поля Эйлера $\delta^0 = E$ и гамильтониана $\delta^1 = -h_1'\partial/\partial z_0 + h_0'\partial/\partial z_1$, так что $L_{\delta^1}(g\,dz) = (-h_1'g_0' + h_0'g_1') = dh \wedge dg$. Комплекс $\mathrm{M}_.$ из теоремы § 4 выглядит так: $0 \leftarrow \mathrm{M}_0 \xleftarrow{l_1} \mathrm{M}_1 \leftarrow 0$. Поэтому $H_0(\mathrm{M}_.) = \mathrm{M}_0/\operatorname{Im}(l_1) \simeq \Omega_A^2/dh \wedge d\mathcal{O}_A$ — этот $\mathcal{O}_S$-модуль Э. Брискорн обозначает через $''H$, и хорошо известно, что у него нет кручения, а его $\mathcal{O}_S$-ранг равен $\mu^{(1)}$ — обычному числу Милнора одномерной изолированной особенности (см. [3, с. 145, замечание 1) и (1.4)] или [7, § 4]).

Двумерные особенности Саито. Рассмотрим объединение трех координатных гиперплоскостей в $\mathbf{C}^3$ — это двумерная неизолированная особенность Саито D, заданная полиномом $h = z_0z_1z_2$. В качестве нильпотентного базиса модуля $\operatorname{Der}_{\mathbf{C}^3,0}(\log D)$ можно взять $\delta^0 = \frac{1}{3}(z_0\partial_0 + z_1\partial_1 + z_2\partial_2)$, $\delta^1 = z_0\partial_0 - z_1\partial_1$, $\delta^2 = z_0\partial_0 - z_2\partial_2$, где $\partial_i = \partial/\partial z_i$, $i = 0, 1, 2$. Комплекс $\mathrm{M}_.$ будет состоять из трех членов: $0 \leftarrow \mathrm{M}_0 \xleftarrow{l_1} \mathrm{M}_1 \xleftarrow{l_2} \mathrm{M}_2 \to 0$. Имеем $H_0(\mathrm{M}_.) = \Omega_A^3/\operatorname{Im}(l_1)$, $\operatorname{Im}(l_1) = \{g\,dz \in \Omega_A^3\colon\ g = \delta^1(g_1) + \delta^2(g_2)$ для некоторых $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_A\}$. Легко проверить, что $H_0(\mathrm{M}_.)$ не имеет кручения и его $\mathcal{O}_S$-ранг равен единице, т. е. $\mu^{(2)}(D) = 1$. Далее, $H_1(\mathrm{M}_.) = \operatorname{Ker} l_1/\operatorname{Im} l_2$, где $\operatorname{Ker}(l_1) \cong \{(g_1, g_2) \in \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_A\colon \delta^1(g_1) + \delta^2(g_2) = 0\}$, а $\operatorname{Im}(l_2) \cong \{(-\delta^2(g), \delta^1(g)) \in \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_A, g \in \mathcal{O}_A\}$. Снова получаем, что $H_1(\mathrm{M}_.)$ без кручения и его ранг равен двум: $\mu^{(1)}(D) = 2$ и т. д. Те же значения для чисел Милнора дают и формулы в [2, п. 4]. Отметим еще, что для особенностей Саито такого типа, т. е. объединения гиперплоскостей в $\mathbf{C}^m$, имеется весьма наглядная (по меньшей мере при $m = 3$) классификация [17].

Как уже упоминалось, широкий класс особенностей Саито составляют дискриминанты версальных деформаций изолированных, краевых и прочих типов особенностей в подходящих теориях деформаций. В свою очередь, среди них наиболее изученными, по-видимому, являются особенности, связанные с конечными группами Коксетера. Квазиоднородный полином, квадрат которого является фундаментальным антиинвариантом соответствующей группы, определяет неизолированную особенность Саито. В работе [18] вычислены базисы $(X_0, \ldots, X_n)$ модулей $\operatorname{Der}(\log h)$ в «симметрическом» виде (см. также для A_k [1] и для E_6 [6]), приведены формулы для функций $c_i(z)$, определенные соотношениями $X_ih = c_i(z)h$, а также выражения для коммутаторов $[X_i, X_j]$. Этой информации оказывается достаточно, чтобы перейти к нильпотентному базису, и вычисление всех чисел Милнора соответствующей особенности сводится к обычной линейной алгебре. В качестве примера рассмотрим особенность, связанную с группой A_3 (ласточкин хвост).

Если переменные перенумеровать в соответствии с весами, то в качестве нильпотентного базиса можно взять такие элементы (ср. [13, § 3]):

$$\delta^0 = 2z_2\partial_2 + 3z_3\partial_3 + 4z_4\partial_4,\ \delta^1 = 3z_3\partial_2 + (4z_4 - z_2^2)\,\partial_3 - \frac{1}{2}\,z_2z_3\partial_4,$$

$$\delta^2 = (4z_2^2 - 48z_4)\,\partial_2 + 12z_2z_3\partial_3 + (9z_3^2 - 16z_2z_4)\,\partial_4,\quad \partial_i := \partial/\partial z_i,$$

$$\det(\Delta) = 3h,\ h = 2^3z_4^3 - 2^7z_2^2z_4^2 + 2^4z_2^4z_4 + 2^4\cdot 3^2z_2z_3^2z_4 - 4z_2^3z_3^2 - 3^3z_3^4.$$

Комплекс M. имеет длину три; $c_1^{01} = -c_1^{10} = 1$, $c_2^{02} = -c_2^{20} = 2$, $c_1^{12} = -c_1^{21} = 4z_2$, а остальные c_k^{ij} равны нулю; $\varphi_0 = 9$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = c_1^{12} = 4z_2$. Поэтому $\operatorname{Im} l_1 = \{g dz \in \Omega_A^3\colon\ g = \delta^1(g_1) + \delta^2(g_2) + 4z_2g_2$ для $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_A\}$ и т. д. После некоторых вычислений получаем, что $\mu^{(2)}(D) = 2$, вклад в $\mu^{(2)}$ дают классы форм $dz \in (\Omega_A^3)_9$ и $z_3^2dz \in (\Omega_A^3)_{15}$, и $\mu^{(1)}(D) = 2$, вклад в $\mu^{(1)}$ дают классы форм с дифференциалами $\iota_{\delta^1}(dz)$ и $L\iota_{\delta^1}(dz)$, где $L = 16z_4 + \frac{4}{3}z_2^2$ — один из двух первых интегралов поля δ^1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold V. I.* Wave fronts evolution and equivariant Morse lemma // Comm. Pure Appl. Math.— 1976. V. 29, № 6.— P. 557—582.
2. *Bescheron-Lebrigand D.* Sur certaines singularités non isolées // C. R. Acad. Sc. Paris.— 1981. T. 293, № 8.— P. 421—424.
3. *Брискорн Э.* Монодромия изолированных особенностей гиперповерхностей // Математика (Сб. переводов).—1971. Т. 15, № 4.— С. 130—160.
4. *Картье П.* Когомологии алгебр Ли // Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. М.: ИЛ, 1962.— С. 32—67.
5. *Cartier P.* Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géometrie combinatoire // Lecture Notes in Math. № 901. Springer-Verlag, 1981. P. 1—22.
6. *Гивенталь А. Б.* Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и связанных с простыми особенностями функций // Функцион. анализ и его прил.—1980. Т. 14, вып. 2.— С. 4—14.
7. *Greuel G.-M.* Der Gauss — Manin — Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten // Math. Ann.—1975. B. 214, № 2.— S. 235—266.
8. *Greuel G.-M.* Cohomologie des singularités non isolées // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. A.—1977. T. 284, № 5.— P. 321—322.
9. *Hamm H. A.* Zur analytischen und algebraischen Beschchreibung der Picard — Lefschetz-Monodromie // Habilitationschrift. Göttingen, 1974.
10. *Hamm H. A.* Ein Beispiel zur Berechnung der Picard — Lefschetz-Monodromie fur nichtisolierter Hyperflächensingularitäten // Math. Ann.—1975. B. 214.— S. 221—234.
11. *Иомдин И. Н.* Локальные топологические свойства комплексных алгебраических множеств // Сиб. мат. журн.—1974. Т. 15, № 4.— С. 784—805.
12. *Кириллов А. Н.* Дзета-функция монодромии особой точки полного пересечения // Зап. научн. сем. ЛОМИ.—1981. Т. 112.— С. 112—120.
13. *Saito K.* On the uniformization of complements of discriminant loci. Preprint. Williams College, 1975.
14. *Saito K.* Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields // J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. Sec. IA.— 1980. V. 27, № 2.— P. 265—291.
15. *Saito K.* Primitive forms for a universal unfolding of a function with isolated critical point // J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. Sec. IA.—1982. V. 28 № 1.— P. 775—792.
16. *Siersma D.* Isolated line singularities // Proc. Symp. Pure Math.—1983. V. 40, Pt. 2.— 485—496.
17. *Terao H.* Arrangements of hyperplanes and their freeness I // J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. Sec. IA.—1980. V. 27, № 2.— P. 293—312.
18. *Yano T.*, *Sekiguchi J.* The microlocal structure of weighted homogeneous polynomials associated with Coxeter systems II. Preprint. Tokyo, 1979.
19. *Закалюкин В. М.* Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра // Функцион. анализ и его прил.—1976. Т. 10, вып. 2.— С. 69—70.

Институт проблем управления
АН СССР

Поступило в редакцию
26 декабря 1985 г.