ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 12, с. 1646–1656

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2006 г. А. С. Макин

В настоящей работе изучаются краевые задачи на собственные значения для несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля

$$Lu = u'' - q(x)u, \tag{1}$$

заданного на интервале $(0,1)$, где $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0,1)$. Основная цель – исследование базисных свойств систем корневых функций оператора (1) с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Наш интерес к указанной проблеме был стимулирован работами В.А. Ильина [1–3].

Обозначим через $\varphi(x,\mu)$, $\psi(x,\mu)$ фундаментальную при $\mu \neq 0$ систему решений уравнения

$$u'' - q(x)u + \mu^2 u = 0,$$

определенную начальными условиями $\varphi(0,\mu) = \psi(0,\mu) = 1$, $\varphi'_x(0,\mu) = i\mu$, $\psi'_x(0,\mu) = -i\mu$. Хорошо известно, что функции $\varphi(x,\mu)$ и $\psi(x,\mu)$ удовлетворяют соответственно интегральным уравнениям

$$\varphi(x,\mu) = e^{i\mu x} + \frac{1}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-t)q(t)\varphi(t,\mu)\,dt, \tag{2}$$

$$\psi(x,\mu) = e^{-i\mu x} + \frac{1}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-t)q(t)\psi(t,\mu)\,dt, \tag{2'}$$

являются непрерывными со своими частными производными и для любого фиксированного x являются аналитическими функциями параметра μ. В дальнейшем считаем, что всегда выполняется неравенство

$$|\operatorname{Im}\mu| < M, \tag{3}$$

где M – некоторая постоянная. В работе [4] получены оценки

$$|\varphi(x,\mu)| \le c_1, \quad |\varphi'_\mu(x,\mu)| \le c_1, \tag{4}$$

$$|\psi(x,\mu)| \le c_2, \quad |\psi'_\mu(x,\mu)| \le c_2, \tag{4'}$$

справедливые при $0 \le x \le 1$, $|\mu| \ge \mu_0$, где μ_0 – некоторое достаточно большое число.

Нам понадобятся более точные асимптотические формулы для функций $\varphi(x,\mu)$ и $\psi(x,\mu)$. Преобразуя правую часть уравнения (2), будем иметь

$$\varphi(x,\mu) = e^{i\mu x} + \frac{1}{2i\mu}\int_0^x (e^{i\mu(x-t)} - e^{-i\mu(x-t)})q(t)\left[e^{i\mu t} + \frac{1}{\mu}\int_0^t \sin\mu(t-s)q(s)\varphi(s,\mu)\,ds\right]dt =$$

$$= e^{i\mu x}\left\{1 + \frac{1}{2i\mu}\int_0^x q(t)\,dt - \frac{1}{2i\mu}\int_0^x e^{2i\mu(t-x)}q(t)\,dt - \frac{1}{4\mu^2}\int_0^x (e^{i\mu(x-t)} - e^{-i\mu(x-t)})q(t)\,dt\times\right.$$

$$\times \int_0^t (e^{i\mu(t-s)} - e^{-i\mu(t-s)})q(s)\left[e^{i\mu s} + \frac{1}{\mu}\int_0^s \sin\mu(s-y)q(y)\varphi(y,\mu)\,dy\right]ds\Big\}. \tag{5}$$

Обозначив сумму трех первых слагаемых в фигурных скобках в правой части (5) через $F_1(x,\mu)$ и разбив интеграл по s на сумму трех слагаемых, получим, что

$$\varphi(x,\mu) = e^{i\mu x}\Big\{F_1(x,\mu) - \frac{1}{4\mu^2}e^{-i\mu x}\int_0^x (e^{i\mu(x-t)} - e^{-i\mu(x-t)})q(t)\,dt\Big[e^{i\mu t}\int_0^t q(s)\,ds -$$

$$- \int_0^t e^{-i\mu(t-2s)}q(s)\,ds + \frac{1}{\mu}\int_0^t (e^{i\mu(t-s)} - e^{-i\mu(t-s)})q(s)\,ds\int_0^s \sin\mu(s-y)q(y)\varphi(y,\mu)\,dy\Big]\Big\}. \tag{6}$$

Обозначим последнее слагаемое в квадратных скобках в правой части (6) через $\theta_1(t,\mu)$. Из неравенств (3), (4) следует, что $\theta_1(t,\mu) = O(\mu^{-1})$, $\partial\theta_1(t,\mu)/\partial\mu = O(\mu^{-1})$.

Записывая члены в фигурных скобках в правой части (6) по убывающим степеням μ, находим, что

$$\varphi(x,\mu) = e^{i\mu x}\Big\{F_1(x,\mu) - \frac{1}{4\mu^2}\int_0^x q(t)\,dt\int_0^t q(s)\,ds + \frac{1}{4\mu^2}\int_0^x e^{2i\mu(t-x)}q(t)\,dt\int_0^t q(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{4\mu^2}e^{-i\mu x}\int_0^x (e^{i\mu(x-t)} - e^{-i\mu(x-t)})q(t)\,dt\int_0^t e^{-i\mu(t-2s)}q(s)\,ds -$$

$$- \frac{1}{4\mu^2}e^{-i\mu x}\int_0^x (e^{i\mu(x-t)} - e^{-i\mu(x-t)})q(t)\theta_1(t,\mu)\,dt\Big\}. \tag{7}$$

Обозначим последнее слагаемое в фигурных скобках в правой части (7) через $\theta_2(x,\mu)$. Легко видеть, что $\theta_2(x,\mu) = O(\mu^{-3})$, $\partial\theta_2(x,\mu)/\partial\mu = O(\mu^{-3})$. Упрощая выражение в фигурных скобках в правой части (7), получаем, что

$$\varphi(x,\mu) = e^{i\mu x}\Big\{F_1(x,\mu) - \frac{1}{4\mu^2}\int_0^x q(t)\,dt\int_0^t q(s)\,ds + \Big[\frac{1}{4\mu^2}\Big(e^{-2i\mu x}\int_0^x e^{2i\mu t}q(t)\,dt\int_0^t q(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^x e^{-2i\mu t}q(t)\,dt\int_0^t e^{2i\mu s}q(s)\,ds - e^{-2i\mu x}\int_0^x q(t)\,dt\int_0^t e^{2i\mu s}q(s)\,ds\Big)\Big] + \theta_2(x,\mu)\Big\}. \tag{8}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в правой части (8) через $\theta_3(x,\mu)$. Из неравенства (3) и леммы Римана вытекает, что $\theta_3(x,\mu) = o(\mu^{-2})$, $\partial\theta_3(x,\mu)/\partial\mu = o(\mu^{-2})$.

Исходя из (2′) и (4′), совершенно аналогично получаем, что

$$\psi(x,\mu) = e^{-i\mu x}\Big\{F_2(x,\mu) - \frac{1}{4\mu^2}\int_0^x q(t)\,dt\int_0^t q(s)\,ds + \Big[\frac{1}{4\mu^2}\Big(e^{2i\mu x}\int_0^x e^{-2i\mu t}\,dt\int_0^t q(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^x e^{2i\mu t}q(t)\,dt\int_0^t e^{-2i\mu s}q(s)\,ds - e^{2i\mu x}\int_0^x q(t)\,dt\int_0^t e^{-2i\mu s}q(s)\,ds\Big)\Big] + \tilde\theta_2(x,\mu)\Big\}, \tag{8′}$$

где

$$F_2(x,\mu) = 1 - \frac{1}{2i\mu}\int\limits_0^x q(t)\,dt + \frac{1}{2i\mu}\int\limits_0^x e^{2i\mu(x-t)}q(t)\,dt, \quad \tilde\theta_2(x,\mu) = O\left(\frac{1}{\mu^3}\right), \quad \frac{\partial\tilde\theta_2(x,\mu)}{\partial\mu} = O\left(\frac{1}{\mu^3}\right).$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в правой части (8′) через $\tilde\theta_3(x,\mu)$. Из неравенства (3) и леммы Римана вытекает, что $\tilde\theta_3(x,\mu) = o(\mu^{-2})$, $\partial\tilde\theta_3(x,\mu)/\partial\mu = o(\mu^{-2})$.

Аналогично установим асимптотические формулы для функций $\varphi'_x(x,\mu)$ и $\psi'_x(x,\mu)$. Дифференцируя равенство (2), находим, что

$$\varphi'_x(x,\mu) = i\mu e^{i\mu x} + \int\limits_0^x \cos\mu(x-t)q(t)\varphi(t,\mu)\,dt. \tag{9}$$

Преобразуя второе слагаемое в правой части (9) согласно (8), будем иметь

$$\varphi'_x(x,\mu) = i\mu e^{i\mu x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (e^{i\mu(x-t)} + e^{-i\mu(x-t)})q(t)[e^{i\mu t}(F_1(t,\mu) + \theta_4(t,\mu))]\,dt =$$

$$= i\mu e^{i\mu x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (e^{i\mu x} + e^{i\mu(2t-x)})q(t)[F_1(t,\mu) + \theta_4(t,\mu)]\,dt, \tag{10}$$

где

$$\theta_4(t,\mu) = -\frac{1}{4\mu^2}\int\limits_0^t q(s)\,ds\int\limits_0^s q(y)\,dy + \theta_2(t,\mu) + \theta_3(t,\mu).$$

Очевидно, что $\theta_4(t,\mu) = O(\mu^{-2})$, $\partial\theta_4(t,\mu)/\partial\mu = O(\mu^{-2})$.

Записывая члены в правой части (10) по убывающим степеням μ, получаем, что

$$\varphi'_x(x,\mu) = e^{i\mu x}\Bigg\{i\mu + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{2i\mu(t-x)}q(t)\,dt + \frac{1}{4i\mu}\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_0^t q(s)\,ds +$$

$$+\Bigg[-\frac{1}{4i\mu}\int\limits_0^x e^{-2i\mu t}q(t)\,dt\int\limits_0^t e^{2i\mu s}q(s)\,ds + \frac{1}{4i\mu}e^{-2i\mu x}\int\limits_0^x e^{2i\mu t}q(t)\,dt\int\limits_0^t q(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{4i\mu}e^{-2i\mu x}\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_0^t e^{2i\mu s}q(s)\,ds\Bigg] + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (1 + e^{2i\mu(t-x)})q(t)\theta_4(t,\mu)\,dt\Bigg\}. \tag{11}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в (11) через $\theta_5(x,\mu)$. Из неравенства (3) и леммы Римана вытекает, что $\theta_5(x,\mu) = o(\mu^{-1})$, $\partial\theta_5(x,\mu)/\partial\mu = o(\mu^{-1})$.

Совершенно аналогично получаем, что

$$\psi'_x(x,\mu) = e^{-i\mu x}\Bigg\{-i\mu + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{2i\mu(x-t)}q(t)\,dt - \frac{1}{4i\mu}\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_0^t q(s)\,ds +$$

$$+\Bigg[\frac{1}{4i\mu}\int\limits_0^x e^{2i\mu t}q(t)\,dt\int\limits_0^t e^{-2i\mu s}q(s)\,ds - \frac{1}{4i\mu}e^{2i\mu x}\int\limits_0^x e^{-2i\mu t}q(t)\,dt\int\limits_0^t q(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{4i\mu}e^{2i\mu x}\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_0^t e^{-2i\mu s}q(s)\,ds\Big]+\frac{1}{2}\int\limits_0^x(e^{2i\mu(x-t)}+1)q(t)\tilde\theta_4(t,\mu)\Big\},\tag{11'}$$

где $\tilde\theta_4(t,\mu)=O(\mu^{-2})$, $\partial\tilde\theta_4(t,\mu)/\partial\mu=O(\mu^{-2})$. Обозначим выражение в квадратных скобках в (11′) через $\tilde\theta_5(x,\mu)$. Из неравенства (3) и леммы Римана вытекает, что $\tilde\theta_5(x,\mu)=o(\mu^{-1})$, $\partial\tilde\theta_5(x,\mu)/\partial\mu=o(\mu^{-1})$.

Для упрощения полученных выше асимптотических формул докажем равенство

$$\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_0^t q(s)\,ds=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big)^2.\tag{12}$$

Если функция $q(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то равенство (12) устанавливается интегрированием по частям. Для доказательства в общем случае приблизим функцию $q(t)$ непрерывной функцией $f(t)$ так, что $q(t)-f(t)=r(t)$, где $\int_0^1|r(t)|\,dt<\varepsilon$, $\varepsilon>0$ – произвольное наперед заданное число. Обозначим $q_0=\int_0^1|q(t)|\,dt$. Тогда будем иметь

$$\Big|\int\limits_0^x q(t)\,dt\int\limits_0^t q(s)\,ds-\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big)^2\Big|=$$

$$=\Big|\int\limits_0^x(f(t)+r(t))\,dt\int\limits_0^t(f(s)+r(s))\,ds-\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x(f(t)+r(t))\,dt\Big)^2\Big|=$$

$$=\Big|\int\limits_0^x f(t)\,dt\int\limits_0^t f(s)\,ds+\int\limits_0^x r(t)\,dt\int\limits_0^t f(s)\,ds+\int\limits_0^x f(t)\,dt\int\limits_0^t r(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_0^x r(t)\,dt\int\limits_0^t r(s)\,ds-\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x f(t)\,dt\Big)^2-\int\limits_0^x f(t)\,dt\int\limits_0^x r(t)\,dt-\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x r(t)\,dt\Big)^2\Big|\le\varepsilon\Big(3q_0+\frac{3\varepsilon}{2}\Big).$$

Отсюда следует, что равенство (12) справедливо для любой функции $q(t)$ из класса $L_1(0,1)$. Из равенств (8), (8′), (11), (11′), оценок для функций θ_i, $\tilde\theta_i$ $(i=\overline{1,5})$ и (12) получаем следующие асимптотические формулы:

$$\varphi(x,\mu)=e^{i\mu x}\Big\{1+\frac{1}{2i\mu}\int\limits_0^x q(t)\,dt-\frac{1}{2i\mu}\int\limits_0^x e^{2i\mu(t-x)}q(t)\,dt-\frac{1}{8\mu^2}\Big(\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big)^2+\theta_6(x,\mu)\Big\},\tag{13}$$

$$\psi(x,\mu)=e^{-i\mu x}\Big\{1-\frac{1}{2i\mu}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{1}{2i\mu}\int\limits_0^x e^{2i\mu(x-t)}q(t)\,dt-\frac{1}{8\mu^2}\Big(\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big)^2+\tilde\theta_6(x,\mu)\Big\},\tag{13'}$$

где $\theta_6(x,\mu)=o(\mu^{-2})$, $\partial\theta_6(x,\mu)/\partial\mu=o(\mu^{-2})$, $\tilde\theta_6(x,\mu)=o(\mu^{-2})$, $\partial\tilde\theta_6(x,\mu)/\partial\mu=o(\mu^{-2})$,

$$\varphi'_x(x,\mu)=e^{i\mu x}\Big\{i\mu+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{2i\mu(t-x)}q(t)\,dt+\frac{1}{8i\mu}\Big(\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big)^2+\theta_7(x,\mu)\Big\},\tag{14}$$

$$\psi'_x(x,\mu)=e^{-i\mu x}\Big\{-i\mu+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{2i\mu(x-t)}q(t)\,dt-\frac{1}{8i\mu}\Big(\int\limits_0^x q(t)\,dt\Big)^2+\tilde\theta_7(x,\mu)\Big\};\tag{14'}$$

здесь $\theta_7(x,\mu)=o(\mu^{-1})$, $\partial\theta_7(x,\mu)/\partial\mu=o(\mu^{-1})$, $\tilde\theta_7(x,\mu)=o(\mu^{-1})$, $\partial\tilde\theta_7(x,\mu)/\partial\mu=o(\mu^{-1})$.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для оператора (1), где краевые условия задаются линейно независимыми формами с произвольными комплекснозначными коэффициентами

$$\begin{aligned} B_1(u) &= a_1u'(0) + b_1u'(1) + a_0u(0) + b_0u(1) = 0, \\ B_2(u) &= c_1u'(0) + d_1u'(1) + c_0u(0) + d_0u(1) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Условия (15) удобно записывать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_0 & b_0 \\ c_1 & d_1 & c_0 & d_0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

и обозначать через $A(ij)$ матрицу, составленную из i-го и j-го столбцов матрицы A $(1 \le i \le j \le 4)$, $A_{ij} = \det A(ij)$. Обозначим также

$$B_1^*(u) = -a_1u'(0) + b_1u'(1) - a_0u(0) + b_0u(1), \quad B_2^*(u) = -c_1u'(0) + d_1u'(1) - c_0u(0) + d_0u(0).$$

Дополнительно предположим, что

$$\int_0^1 q(x)\,dx = 0. \tag{17}$$

Тогда из формул (13), (13′), (14), (14′) и (17) вытекает, что

$$\varphi(0,\mu) = 1, \quad \varphi(1,\mu) = e^{i\mu}(1+P), \quad \varphi'_x(0,\mu) = i\mu, \quad \varphi'_x(1,\mu) = e^{i\mu}(i\mu + P'), \tag{18}$$

где

$$P = -\frac{1}{2i\mu}e^{-2i\mu}\int_0^1 e^{2i\mu t}q(t)\,dt + \theta_6(1,\mu), \quad P' = \frac{1}{2}e^{-2i\mu}\int_0^1 e^{2i\mu t}q(t)\,dt + \theta_7(1,\mu), \tag{19}$$

$$\psi(0,\mu) = 1, \quad \psi(1,\mu) = e^{-i\mu}(1+Q), \quad \psi'_x(0,\mu) = -i\mu, \quad \psi'_x(1,\mu) = e^{-i\mu}(-i\mu + Q'); \tag{18′}$$

здесь

$$Q = \frac{1}{2i\mu}e^{2i\mu}\int_0^1 e^{-2i\mu t}q(t)\,dt + \tilde\theta_6(1,\mu), \quad Q' = \frac{1}{2}e^{2i\mu}\int_0^1 e^{-2i\mu t}q(t)\,dt + \tilde\theta_7(1,\mu). \tag{19′}$$

Обозначим через $\Delta(\mu)$ характеристический определитель задачи

$$Lu + \mu^2u = 0, \quad B_1(u) = 0, \quad B_2(u) = 0, \tag{20}$$

а через $\Delta_0(\mu)$ характеристический определитель задачи

$$u'' + \mu^2u = 0, \quad B_1(u) = 0, \quad B_2(u) = 0.$$

Исходя из равенств (18)–(19′), при помощи несколько громоздких, но элементарных вычислений находим, что

$$\begin{aligned} &\Delta(\mu) = B_1(\varphi)B_2(\psi) - B_1(\psi)B_2(\varphi) = \\ &= [a_1i\mu + b_1e^{i\mu}(i\mu + P') + a_0 + b_0e^{i\mu}(1+P)][c_1(-i\mu) + d_1e^{-i\mu}(-i\mu + Q') + c_0 + d_0e^{-i\mu}(1+Q)] - \\ &- [a_1(-i\mu) + b_1e^{-i\mu}(-i\mu)(-i\mu + Q') + a_0 + b_0e^{-i\mu}(1+Q)][c_1i\mu + d_1e^{i\mu}(i\mu + P') + c_0 + d_0e^{i\mu}(1+P)] = \\ &= \Delta_0(\mu) + i\mu A_{12}(e^{i\mu}P' + e^{-i\mu}Q') + i\mu A_{14}(e^{i\mu}P + e^{-i\mu}Q) + A_{23}(e^{i\mu}P' - e^{-i\mu}Q') + \\ &+ A_{24}[P' - Q' + i\mu(P+Q)] + \alpha_0(\mu), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_0(\mu) = b_1d_1P'Q' + b_1d_0P'Q + b_0d_1PQ' + b_0d_0PQ - (b_1d_1Q'P' + b_1d_0Q'P + b_0d_1QP' + b_0d_0QP) =$$
$$= b_1d_0(P'Q - PQ') + b_0d_1(PQ' - P'Q) = A_{24}(P'Q - PQ').$$

Из выражений (19), (19′) вытекает, что $\alpha_0(\mu) = o(\mu^{-1})$, $\alpha_0'(\mu) = o(\mu^{-1})$. В дальнейшем будем считать, что $A_{12} = 0$. Из равенств (19), (19′) получаем, что

$$i\mu A_{14}(e^{i\mu}P + e^{-i\mu}Q) = \frac{1}{2}A_{14}\left(e^{i\mu}\int_0^1 e^{-2i\mu t}q(t)\,dt - e^{-i\mu}\int_0^1 e^{2i\mu t}q(t)\,dt\right) + \alpha_1(\mu),$$

$$A_{23}(e^{i\mu}P' - e^{-i\mu}Q') = \frac{1}{2}A_{23}\left(e^{-i\mu}\int_0^1 e^{2i\mu t}q(t)\,dt - e^{i\mu}\int_0^1 e^{-2i\mu t}q(t)\,dt\right) + \alpha_2(\mu),$$

$$A_{24}(P' - Q' + i\mu(P + Q)) = \alpha_3(\mu),$$

где $\alpha_j(\mu) = o(\mu^{-1})$, $\alpha_j'(\mu) = o(\mu^{-1})$, $j = 1, 2, 3$. Отсюда следует равенство

$$\Delta(\mu) = \Delta_0(\mu) + \frac{1}{2}(A_{14} - A_{23})\left[e^{i\mu}\int_0^1 e^{-2i\mu t}q(t)\,dt - e^{-i\mu}\int_0^1 e^{2i\mu t}q(t)\,dt\right] + \theta(\mu), \tag{21}$$

где $\theta(\mu) = o(\mu^{-1})$, $\theta'(\mu) = o(\mu^{-1})$.

Пусть краевые условия (15) являются регулярными, но не усиленно регулярными [5, с. 71–73]. Согласно [5, с. 73], это эквивалентно выполнению условий

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}). \tag{22}$$

Без ограничения общности будем считать условия (15) нормированными [5, с. 66]. В силу равенства $A_{12} = 0$ это означает, что

$$c_1 = d_1 = 0. \tag{23}$$

Пусть $\{u_n(x)\}$ – система собственных и присоединенных функций задачи (20), $\lambda_n = \mu_n^2$ – соответствующие собственные значения ($\operatorname{Re}\mu_n \geq 0$). Согласно [5, с. 74], множество чисел μ_n, за исключением, может быть, конечного числа, состоит из двух серий

$$\mu_n' = 2\pi n + \delta_n', \quad \mu_n'' = 2\pi n + \delta_n'', \tag{24}$$

где $|\delta_n'| \leq c_1 n^{-1/2}$, $|\delta_n''| \leq c_1 n^{-1/2}$, $c_1 > 0$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, если в (22) $A_{14} + A_{23} = -(A_{13} + A_{24})$ (случай 1), и, за исключением, может быть, конечного числа, состоит из двух серий

$$\tilde{\mu}_n' = (2n - 1)\pi + \tilde{\delta}_n', \quad \tilde{\mu}_n'' = (2n - 1)\pi + \tilde{\delta}_n'', \tag{24′}$$

где $|\tilde{\delta}_n'| \leq c_2 n^{-1/2}$, $|\tilde{\delta}_n''| \leq c_2 n^{-1/2}$, $c_2 > 0$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, если в (22) $A_{14} + A_{23} = A_{13} + A_{24}$ (случай 2). Известно также [5, с. 91, 98], что система $\{u_n(x)\}$ полна в $L_2(0,1)$ и существует биортогонально сопряженная к ней система функций $\{v_n(x)\}$. Если μ_n – простой нуль функции $\Delta(\mu)$, то, согласно [5, с. 48],

$$u_n(x)\overline{v_n(\xi)} = -2\mu_n H(x, \xi, \mu_n)/\Delta'(\mu_n), \tag{25}$$

где

$$H(x, \xi, \mu) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) & g(x,\xi) \\ B_1(\varphi) & B_1(\psi) & B_1(g) \\ B_2(\varphi) & B_2(\psi) & B_2(g) \end{vmatrix}, \tag{26}$$

$$g(x,\xi) = \pm\frac{1}{2W(\xi)}\begin{vmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi(\xi) & \psi(\xi)\end{vmatrix}, \quad W(\xi) = \begin{vmatrix}\varphi'(\xi) & \psi'(\xi)\\ \varphi(\xi) & \psi(\xi)\end{vmatrix}, \tag{27}$$

причем знак " + " берется при $x > \xi$, а " − " при $x < \xi$. Раскрывая определители (26) и (27), находим, что

$$H(x,\xi,\mu_n) = \Phi(x,\xi,\mu_n)/(2W(\xi)), \tag{28}$$

где

$$\Phi(x,\xi,\mu) = \varphi(x)[B_1(\psi)(\psi(\xi)B_2^*(\varphi) - \varphi(\xi)B_2^*(\psi)) - B_2(\psi)(\psi(\xi)B_1^*(\varphi) - \varphi(\xi)B_1^*(\psi))] -$$
$$- \psi(x)[B_1(\varphi)(\psi(\xi)B_2^*(\varphi) - \varphi(\xi)B_2^*(\psi)) - B_2(\varphi)(\psi(\xi)B_1^*(\varphi) - \varphi(\xi)B_1^*(\psi))]. \tag{29}$$

Теорема 1. *Если* $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} \neq 0$, *то система* $\{u_n(x)\}$ *образует базис Рисса в* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Из работы [6] следует, что

$$\Delta_0(\mu) = \mp i(A_{13} + A_{24})\mu e^{-i\mu}(e^{i\mu} \mp 1)\left[(e^{i\mu} \mp 1) \pm \frac{A_{34}}{i(A_{13} + A_{24})\mu}(e^{i\mu} \pm 1)\right],$$

где всюду выбирается верхний знак в случае 1 и нижний знак в случае 2. Отсюда и из равенств (21) вытекает, что уравнение $\Delta(\mu) = 0$ принимает вид

$$\mp i(A_{13} + A_{24})\mu(1 \mp e^{-i\mu})\left[(e^{i\mu} \mp 1) \pm \frac{A_{34}}{i(A_{13} + A_{24})\mu}(e^{i\mu} \pm 1)\right] + \theta(\mu) = 0.$$

Последнее уравнение в случае 1 преобразуется к виду

$$w_1(\mu) = (1 - e^{-i\mu})\left[(e^{i\mu} - 1) + \frac{b}{i\mu}(e^{i\mu} + 1)\right] + R_1(\mu) = 0, \tag{30}$$

а в случае 2 – к виду

$$w_2(\mu) = (1 + e^{-i\mu})\left[(e^{i\mu} + 1) - \frac{b}{i\mu}(e^{i\mu} - 1)\right] + R_2(\mu) = 0, \tag{30'}$$

где $b = A_{34}/(A_{13} + A_{24})$, $R_j(\mu) = o(\mu^{-2})$, $R_j'(\mu) = o(\mu^{-2})$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим случай 1. Подставляя в уравнение (30) $\mu = 2\pi n + z$, из (24) находим, что функция $F_n(z) = g(z)f_n(z) + R_1(2\pi n + z)$, где

$$g(z) = 1 - e^{-iz}, \quad f_n(z) = e^{iz} - 1 + b(e^{iz} + 1)/(i(2\pi n + z)),$$

в круге $|z| \le c_1 n^{-1/2}$ имеет два корня δ_n' и δ_n''. Очевидно, что функция $g(z)$ в том же круге имеет единственный корень $z = 0$, а в работе [6] установлено, что функция $f_n(z)$ в том же круге имеет единственный корень z_n'', причем $z_n'' = O(n^{-1})$. Из последнего равенства и формулы Маклорена для функции e^{iz} вытекает, что $z_n'' = b/(\pi n) + O(n^{-2})$.

Обозначим через Γ_n' и Γ_n'' окружности радиуса $r_n = |b|/(4\pi n)$ с центрами в точках 0 и $b/(\pi n)$ соответственно. Из формулы Маклорена следует, что для всех достаточно больших n при $z \in \Gamma_n' \cup \Gamma_n''$ выполняется неравенство $|g(z)f_n(z)| \ge c_3 n^{-2}$ $(c_3 > 0)$. Отсюда следует, что для всех достаточно больших n при $z \in \Gamma_n' \cup \Gamma_n''$ имеет место неравенство $|g(z)f_n(z)| > |F_n(z) - g(z)f_n(z)|$. По теореме Руше из последнего неравенства вытекает, что функции $g(z)f_n(z)$ и $F_n(z)$ имеют равное число корней внутри окружностей Γ_n' и Γ_n'', стало быть, уравнение $F_n(z) = 0$ внутри каждой из окружностей Γ_n' и Γ_n'' имеет ровно один корень при всех достаточно больших n, следовательно,

$$|\delta_n'| < r_n, \quad |\delta_n'' - b/(\pi n)| < r_n, \quad |\mu_n' - \mu_n''| > 2r_n. \tag{31}$$

В случае 2, аналогичным методом исследуя уравнение (30′), получаем неравенства

$$|\tilde{\delta}_n'| < r_n, \quad |\tilde{\delta}_n'' + b/(\pi n)| < r_n, \quad |\tilde{\mu}_n' - \tilde{\mu}_n''| > 2r_n \tag{31′}$$

при всех достаточно больших n. Из неравенств (31), (31′), в частности, следует, что собственные значения λ_n асимптотически простые.

Докажем, что при всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$c_4 \le |\Delta'(\mu_n)| \le c_5, \tag{32}$$

где $c_4 > 0$, $c_5 > 0$, а μ_n – произвольный корень уравнения $\Delta(\mu) = 0$. В случае 1 имеем $\Delta(\mu) = \beta_1 \mu w_1(\mu)$, где $\beta_1 = -i(A_{13} + A_{24})$, откуда следует, что

$$\Delta'(\mu_n) = \beta_1 \mu_n w_1'(\mu_n). \tag{33}$$

Оценим функцию $w_1'(\mu)$. Если $\mu = 2\pi n + z$, то $w_1(\mu) = F_n(z)$. Из неравенств (31) и формулы Маклорена вытекает, что при $z = \delta_n'$ выполняются неравенства $c_6 \le |g'(z)| \le c_7$, $c_8/n \le |f_n(z)| \le c_9/n$, $|g(z)| \le c_{10}/n$, $|f_n(z)| \le c_{11}/n$, а при $z = \delta_n''$ – неравенства $c_{12} \le |f_n(z)| \le c_{13}$, $c_{14}/n \le |g(z)| \le c_{15}/n$, $|f_n(z)| \le c_{16}/n$, $|g'(z)| \le c_{17}/n$ ($c_j > 0$, $j = \overline{6,17}$). Отсюда следует, что $c_{18}/n \le |g(z)(f_n(z))'| \le c_{19}/n$, если $z = \delta_n'$ или $z = \delta_n''$. Из последнего неравенства и (30) вытекает, что при тех же значениях z имеют место неравенства $c_{20}/n \le |F_n'(z)| \le c_{21}/n$ ($c_j > 0$, $j = \overline{18,21}$). Отсюда и из (33) следует оценка (32). Аналогично рассматривается случай 2.

Оценим произведение $u_n(x)\overline{v_n(\xi)}$. Пусть функции $H_0(x,\xi,\mu)$, $g_0(x,\xi)$, $W_0(\xi)$, $\Phi_0(x,\xi,\mu)$ определяются равенствами (26)–(29), где всюду вместо функций $\varphi(x,\mu)$ и $\psi(x,\mu)$ подставлены функции $e^{i\mu x}$ и $e^{-i\mu x}$.

Докажем, что в случае 1 имеет место оценка

$$H(x,\xi,\mu_n) - H_0(x,\xi,\mu_n) = O(n^{-1}). \tag{34}$$

Так как $\mu_n = 2\pi n + O(n^{-1})$, то с учетом (23) получаем, что

$$\varphi(x,\mu_n) = e^{2\pi i n x} + O(n^{-1}),$$

$$B_1(\varphi(x,\mu_n)) = B_1(e^{2\pi i n x}) + O(1), \quad B_2(\varphi(x,\mu_n)) = B_2(e^{2\pi i n x}) + O(n^{-1}),$$

$$B_1^*(\varphi(x,\mu_n)) = B_1^*(e^{2\pi i n x}) + O(1), \quad B_2^*(\varphi(x,\mu_n)) = B_2^*(e^{2\pi i n x}) + O(n^{-1}).$$

Аналогичные оценки имеют место для функций $\psi(x,\mu_n)$ и $e^{-2\pi i n x}$. Отсюда и из (29) следует, что $\Phi(x,\xi,\mu_n) = \Phi_0(x,\xi,2\pi n) + O(1)$. Используя (23), так же получаем, что $\Phi_0(x,\xi,2\pi n) = O(n)$. Легко проверяется, что $W_0(\xi,2\pi n) = 4\pi i n$, $W(\xi,\mu_n) = W_0(\xi,2\pi n) + O(1)$. Из последних четырех равенств и формулы (28) вытекает справедливость оценки (34).

Равенство (25) с учетом оценки (34) примет вид

$$u_n(x)\overline{v_n(\xi)} = (-4\pi n H_0(x,\xi,2\pi n) + O(1))/\Delta'(\mu_n).$$

Выражение для $H_0(x,\xi,2\pi n)$ вычислено в [7, с. 329]:

$$-2\pi i n H_0(x,\xi,2\pi n) = A_{34}(\cos 2\pi n(x-\xi) - \cos 2\pi n(x+\xi))$$

($x \ne \xi$). Из двух последних равенств и оценки (32) вытекает, что

$$|u_n(x)\overline{v_n(\xi)}| \le C \tag{35}$$

для любого номера n. В случае 2 справедливость оценки (35) устанавливается аналогичными рассуждениями. Из (35) следует [8], что система функций $\{u_n(x)\}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Теорема доказана.

В работе [6] показано, что любые краевые условия (15), удовлетворяющие требованиям теоремы 1, эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A (16) с элементами $a_1 = c_0 = -b_1 = -d_0 = 1$, $a_0 = c_1 = d_1 = 0$ или с элементами $a_1 = b_1 = c_0 = d_0 = 1$ и $a_0 = c_1 = d_1 = 0$, причем в обоих случаях $b_0 \neq 0$.

Теорема 2. *Если*

$$A_{14} \neq A_{23}, \tag{36}$$

то, для того чтобы система корневых функций $\{u_n(x)\}$ задачи (20) являлась базисом Рисса в $L_2(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_n, за исключением, может быть, конечного числа, были кратные (иначе говоря, асимптотически кратные).

Доказательство. Достаточность доказывается элементарно. Известно [9], что двумерные подпространства, отвечающие попарно близким собственным значениям, образуют в $L_2(0,1)$ базис, эквивалентный ортогональному. Выбирая в каждом из данных подпространств, отвечающих кратным собственным значениям, ортонормированный базис, находим [10, с. 414], что последовательность корневых функций задачи (20), полученная объединением всех ортонормированных базисов указанных подпространств, является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Необходимость. Заметим, что если спектр не является асимптотически кратным, то, переходя, возможно, к подпоследовательности, получаем, что, начиная с некоторого номера n_1, имеем $\mu'_n \neq \mu''_n$. Пусть $\tilde{u}_n(x)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ'_n, а $\tilde{v}_n(x)$ – функция из биортогонально сопряженной системы, стоящая в паре с $\tilde{u}_n(x)$. Оценим снизу произведение $\tilde{u}_n(x)\overline{\tilde{v}_n(\xi)}$.

Рассмотрим определитель $\Delta_0(\mu)$. Из работы [6] с учетом условий (22) следует, что

$$\Delta_0(\mu) = -2i(A_{14} + A_{23})\mu(1 \mp \cos\mu) + 2iA_{34}\sin\mu,$$

где в случае 1 выбирается верхний знак, а в случае 2 – нижний знак. Дифференцируя последнее равенство, получаем, что

$$\Delta'_0(\mu) = -2i(A_{14} + A_{23})(1 \mp \cos\mu \pm \mu\sin\mu) + 2iA_{34}\cos\mu.$$

Отсюда и из асимптотических формул (24), (24′) вытекает неравенство $|\Delta'_0(\mu'_n)| \leq c_1\sqrt{n}$, из которого и равенства (21) находим, что

$$|\Delta'(\mu'_n)| \leq c_2\sqrt{n}. \tag{37}$$

Пусть функции $H_0(x,\xi,\mu)$, $g_0(x,\xi)$, $W_0(\xi)$, $\Phi_0(x,\xi,\mu)$ определяются равенствами (26)–(29), где всюду вместо функций $\varphi(x,\mu)$ и $\psi(x,\mu)$ подставлены функции $e^{i\mu x}$ и $e^{-i\mu x}$.

Рассмотрим случай 1. Так как $\mu'_n = 2\pi n + O(n^{-1/2})$, то, рассуждая так же, как и при выводе оценки (34), получаем, что

$$H(x,\xi,\mu'_n) - H_0(x,\xi,2\pi n) = O(n^{-1/2}). \tag{38}$$

Равенство (25) с учетом оценки (38) примет вид

$$\tilde{u}_n(x)\overline{\tilde{v}_n(\xi)} = (-4\pi n H_0(x,\xi,2\pi n) + O(n^{1/2}))/\Delta'(\mu'_n).$$

В работе [7, с. 329] вычислено выражение для $H_0(x,\xi,2\pi n)$

$$-2\pi i n H_0(x,\xi,2\pi n) = A_{34}(\cos 2\pi n(x-\xi) - \cos 2\pi n(x+\xi)) +$$

$$+ 2\pi n[(A_{14} + A_{23} + 2A_{24})\sin 2\pi n(x-\xi) - (A_{14} - A_{23})\sin 2\pi n(x+\xi)]$$

при $x < \xi$ и аналогичное с заменой A_{24} на A_{13} при $x > \xi$. Из трех последних равенств, оценки (37) и условия (36) вытекает, что

$$\|\tilde{u}_n\|_{L_2(0,1)}\|\tilde{v}_n\|_{L_2(0,1)} \geq C\sqrt{n}, \quad C > 0,$$

и, стало быть, система корневых функций $\{u_n(x)\}$ задачи (20) не является базисом в $L_2(0,1)$. Аналогично рассматривается случай 2. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что при выполнении условий (22) и (36) вопрос о базисности системы собственных и присоединенных функций сводится к вопросу об асимптотической кратности спектра. Наличие данного свойства существенно зависит от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$. В наиболее простом случае $q(x) \equiv 0$ указанная проблема полностью решена в [6]. Сформулируем некоторые результаты работы [6]. Для удобства введем следующее

Определение. Задачу (20), где краевые условия удовлетворяют условиям (22) и (36), а также условию $A_{34} = 0$, будем называть задачей типа $(*)$.

Спектр задачи типа $(*)$ асимптотически кратный, а любые краевые условия (15), удовлетворяющие перечисленным в определении требованиям, эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A (16) с элементами $a_1 = c_0 = 1$, $a_0 = b_0 = c_1 = d_1 = 0$, в которой либо $b_1 = \mp 1$, $d_0 \neq 1$, $d_0 \neq -1$, либо $d_0 = \mp 1$, $b_1 \neq 1$, $b_1 \neq -1$, или матрицей A (16), в которой или $a_1 = d_0 = 1$, $b_1 = \mp 1$, остальные элементы равны нулю, или $b_1 = c_0 = 1$, $d_0 = \mp 1$, а остальные элементы нулевые, причем везде выбирается верхний знак в случае 1 и нижний знак в случае 2.

Если выполняются условия (22) и (36), но $A_{34} \neq 0$, то спектр задачи (20) асимптотически простой, а любые краевые условия (15), удовлетворяющие указанным требованиям, эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A (16), в которой $a_1 = c_0 = 1$, $a_0 = c_1 = d_1 = 0$ и либо $b_1 = \mp 1$, $d_0 \neq 1$, $d_0 \neq -1$, $b_0 \neq 0$, либо $d_0 = \mp 1$, $b_1 \neq 1$, $b_1 \neq -1$, $b_0 \neq 0$, или матрицей A (16), в которой $a_1 = d_0 = 1$, $b_1 = \mp 1$, $a_0 \neq 0$, а остальные элементы нулевые, или матрица A (16) имеет элементы $b_1 = c_0 = 1$, $d_0 = \mp 1$, $b_0 \neq 0$ и нулевые остальные элементы, причем всюду выбирается верхний знак в случае 1 и нижний знак в случае 2.

Если выполнены условия (22) и (36), то, по нашему мнению, весьма интересной является задача о нахождении потенциалов $q(x) \not\equiv 0$, обеспечивающих асимптотически кратный спектр. В этой связи отметим следующие результаты.

В работах [11, 12] установлено, что при условии

$$q(x) = q(1-x), \quad x \in [0,1], \tag{39}$$

спектр каждой из задач

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u'(0) = u'(1), \quad u(0) = bu(1),$$

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u'(0) = bu'(1), \quad u(0) = u(1),$$

где $b \neq -1$, совпадает со спектром периодической задачи

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u'(0) = u'(1), \quad u(0) = u(1), \tag{40}$$

а спектр каждой из задач

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u'(0) + u'(1) = 0, \quad u(0) + bu(1) = 0,$$

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u'(0) + bu'(1) = 0, \quad u(0) + u(1) = 0,$$

где $b \neq -1$, совпадает со спектром антипериодической задачи

$$Lu + \lambda u = 0, \quad u'(0) + u'(1) = 0, \quad u(0) + u(1) = 0. \tag{41}$$

Отсюда следует, что при соблюдении условия (39) спектр задачи типа $(*)$ совпадает со спектром задачи (40) или задачи (41).

Пусть вещественнозначная функция $q(x) \in L_2(0,1)$. Обозначим через λ_0, λ_n^-, λ_n^+, где $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, собственные значения задачи (40), а через λ_n^-, λ_n^+, где $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$, собственные значения задачи (41), в обоих случаях занумерованные в порядке

неубывания. Пусть $\gamma_n = \lambda_n^+ - \lambda_n^-$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – длина спектральной лакуны. Для задач (40), (41) с потенциалом

$$q(x) = -\pi^2(4\alpha t \cos 2\pi x + 2\alpha^2 \cos 4\pi x), \tag{42}$$

где α, t – вещественные числа, $\alpha \neq 0$, $t \neq 0$, оценки чисел γ_n даны в работе [13], в которой, в частности, установлено, что для четного n

$$\gamma_n = \frac{8\pi^2\alpha^n}{2^n[(n-2)!!]^2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|\left[1 + O\left(\frac{(\ln n)^3}{n}\right)\right],$$

а для нечетного n

$$\gamma_n = \frac{8\pi^2\alpha^n}{2^n[(n-2)!!]^2}\,\frac{2}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right|\left[1 + O\left(\frac{(\ln n)^3}{n}\right)\right].$$

Так как для потенциала (42) выполняется условие (39), то для любой задачи типа $(*)$ параметр t может быть выбран так, что ее спектр будет асимптотически кратным или асимптотически простым.

Если краевые условия удовлетворяют условиям (22) и (36), то в работе [4] доказано, что при дополнительных условиях $q(x) \in W_1^1[0,1]$, $2A_{34}^2 \neq (A_{13} + A_{24})(A_{14} - A_{23})(q(1) - q(0))$ спектр задачи (20) асимптотически простой и система корневых функций не является базисом. Для задачи типа $(*)$ последнее условие эквивалентно условию $q(1) \neq q(0)$. Легко видеть, что для потенциала, определенного формулой (42), $q(1) = q(0)$ при любых α и t и, стало быть, теорема 2 настоящей работы расширяет по сравнению с [4] класс краевых задач, для которых установлено отсутствие свойства базисности.

Известно [14], что спектры периодической и антипериодической задач на отрезке $[0,1]$ для оператора Матье $lu = u'' - 2\pi^2 a \cos 2\pi x$, где a – вещественное число $(a \neq 0)$, асимптотически простые. Из наших рассуждений вытекает, что система собственных и присоединенных функций оператора Матье с краевыми условиями типа $(*)$ не обладает свойством базисности. Легко видеть, что указанный пример также не охватывается работой [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* // Избранные вопросы математики, механики и их приложений. М., 1999. С. 223–229.
2. *Ильин В.А.* // Программные системы. М., 1999. С. 36–43.
3. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 9. С. 1516–1529.
4. *Макин А.С.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1058–1066.
5. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
6. *Lang P., Locker J.* // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 146. № 1. P. 148–191.
7. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
8. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
9. *Шкаликов А.А.* // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1982. № 6. С. 12–21.
10. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
11. *Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.* // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 310–313.
12. *Кангужин Б.Е.* Некоторые вопросы теории обратных задач: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1982.
13. *Djakov P., Mityagin B.* Asymptotics of instability zones of the Hill operator with a two term potential. Columbus (Ohio) (Preprint / OSU Math. Res. Inst.: 04-10).
14. *Ince E.L.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.

Московская государственная академия
приборостроения и информатики

Поступила в редакцию
30.08.2004 г.