А. М. Старолетов, О композиционных факторах конечных групп, изоспектральных простым классическим группам,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 422–440

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 512.542

О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОСТЫМ КЛАССИЧЕСКИМ ГРУППАМ

А. М. Старолетов

Аннотация. Группы с одинаковым множеством порядков элементов называются *изоспектральными.* Показано, что конечная группа, изоспектральная конечной простой классической группе, не имеет среди неабелевых композиционных факторов исключительных групп типов E_7 и E_8.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.213

Ключевые слова: простая классическая группа, исключительная группа лиева типа, порядки элементов, распознавание по спектру.

1. Введение

Множество порядков элементов конечной группы G называется *спектром* и обозначается через $\omega(G)$. Группы, имеющие одинаковый спектр, называются *изоспектральными.* Если любая конечная группа, изоспектральная группе G, изоморфна ей, то группа G называется *распознаваемой по спектру.* Если существует лишь конечное число попарно не изоморфных групп, изоспектральных G, то говорят, что группа G *почти распознаваема* (*по спектру*). Иначе говорят, что группа G *нераспознаваема* (*по спектру*).

Известно, что любая конечная группа, имеющая нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, нераспознаваема [1]. С другой стороны, знакопеременные группы степени $n \geq 5$ при $n \neq 6, 10$ [2] и все простые спорадические группы, за исключением J_2, распознаваемы [3]; все простые исключительные группы лиева типа, кроме группы ${}^3D_4(2)$, почти распознаваемы [4]. В [5] показано, что любая классическая группа L размерности не менее чем 62 почти распознаваема. В [6] нижняя оценка на размерность группы L понижена до 38. Отметим, что в этих работах использовалось то, что при выбранных ограничениях на размерность среди композиционных факторов конечной группы G, изоспектральной L, нет исключительных групп лиева типа. В данной работе показано, что группы лиева типа E_7 или E_8 не могут встретиться среди композиционных факторов группы G без ограничения на размерность группы L.

Теорема. *Предположим, что L — конечная простая классическая группа и G — конечная группа, изоспектральная L. Тогда среди неабелевых композиционных факторов группы G нет простых исключительных групп лиевых типов E_7 и E_8.*

Данная работа имеет следующую структуру. Разд. 2 посвящен вспомогательным понятиям и утверждениям, которые используются на протяжении

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18–31–20011.

текста; в разд. 3 получены ограничения на конечные группы, удовлетворяющие предположению теоремы; в разд. 4 доказывается основная теорема.

2. Предварительные сведения

В данном разделе введены понятия примитивных простых делителей и графа простых чисел конечной группы, сформулированы некоторые их свойства, а также доказаны вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основной теоремы.

Пусть q — степень простого числа p. При обозначении простых ортогональных и симплектических групп используется лиева нотация: $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$. Иногда для удобства также будем использовать обозначения $D_n^+(q) := D_n(q)$ и $D_n^-(q) := {}^2D_n(q)$. Простые линейные и унитарные группы размерности n над полем из q элементов обозначаются через $L_n^+(q)$ и $L_n^-(q)$ соответственно. Наконец, простые исключительные группы лиевых типов E_7 и E_8 обозначаются через $E_7(q)$ и $E_8(q)$.

2.1. Простые числа Жигмонди. Наибольший общий делитель двух целых чисел a и b обозначается через (a, b). Пусть n ненулевое целое. Тогда через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых делителей числа n. Для конечной группы G положим $\pi(G) = \pi(|G|)$. Если p — простое число, то $(n)_p$ обозначает p-часть числа n, т. е. наибольшую степень числа p, делящую n. Отношение $n/(n)_p$ обозначается через $(n)_{p'}$.

Пусть a — целое число и $|a| > 1$. Если простое число r нечетно и взаимно просто с a, то $e(r, a)$ обозначает мультипликативный порядок a по модулю r. Для нечетного числа a положим $e(2, a) = 1$, если $a \equiv 1 \pmod 4$, и $e(2, a) = 2$, если $a \equiv 3 \pmod 4$. Простое число r называется *примитивным простым делителем* числа $a^i - 1$, если $e(r, a) = i$. Следующая лемма доказана в [7, 8].

Лемма 2.1 (Бэнг — Жигмонди). *Предположим, что a — целое число и $|a| > 1$. Тогда для любого натурального числа i существует простое число r с условием $e(r, a) = i$, за исключением случаев, когда $(a, i) \in \{(2, 1), (2, 6), (-2, 2), (-2, 3), (3, 1), (-3, 2)\}$.*

Множество всех примитивных простых делителей числа $a^i - 1$ обозначается через $R_i(a)$, любой элемент этого множества — через $r_i(a)$. Если $i \neq 2$, то произведение всех примитивных простых делителей числа $a^i - 1$ с учетом их кратности обозначается через $k_i(a)$. При $i = 2$ полагаем $k_2(a) = k_1(-a)$. Нетрудно проверить, что если i делится на 4, то $k_i(a) = k_i(-a)$; если i нечетно, то $k_i(a) = k_{2i}(-a)$. Следующая общая формула [9] выражает число $k_i(a)$, где $i > 2$, в терминах i-го кругового многочлена $\Phi_i(x)$:

$$k_i(a) = \frac{\Phi_i(a)}{(r, \Phi_{(i)_{r'}}(a))},$$

где r — наибольший простой делитель числа i. Из малой теоремы Ферма следует, что если $(i)_{r'}$ не делит $r - 1$, то $(r, \Phi_{(i)_{r'}}(a)) = 1$.

Напомним, что степень многочлена $\Phi_i(x)$ равна $\varphi(i)$, где φ — функция Эйлера. Для оценки значений $k_i(a)$ и $\Phi_i(a)$ понадобятся следующие два результата.

Лемма 2.2. *Пусть i — целое положительное число и $i < 105$. Тогда*

(i) *если $q \geq 3$, то $\Phi_i(q) < 1.5q^{\varphi(i)}$ и $\Phi_i(q^2) < 1.125q^{2\varphi(i)}$;*

(ii) *если i — простое число и $q \geq 3$, то $\Phi_i(q)\Phi_{2i}(q) < 1.125q^{2i-2}$ и $\Phi_i(q^2)\Phi_{2i}(q^2) < 1.0125q^{4i-4}$;*

(iii) *если* $q \geq 3$ *и* $i \geq 2$, *то* $\Phi_i(q) > \frac{q-1}{q+1} \cdot q^{\varphi(i)}$; *в частности,* $\Phi_i(q) > 0.5q^{\varphi(i)}$.

Доказательство. Пусть $i < 105$. Известно, что все коэффициенты многочлена $\Phi_i(x)$ по модулю не превосходят 1 [10]. Значит,

$$\Phi_i(q) \leq 1 + q + \dots + q^{\varphi(i)} = \frac{q^{\varphi(i)+1} - 1}{q - 1} < \frac{q}{q-1} q^{\varphi(i)}.$$

Если $q \geq 3$, то $\frac{q}{q-1} \leq 1.5$ и $\frac{q^2}{q^2-1} \leq 1.125$, откуда получаем, что $\Phi_i(q) < 1.5q^{\varphi(i)}$ и $\Phi_i(q^2) < 1.125q^{2\varphi(i)}$.

Пусть i — простое число. Если $i = 2$, то $\Phi_i(q)\Phi_{2i}(q) = q^2 - 1 < q^2$. Предположим, что $i > 2$. Тогда

$$\Phi_i(q)\Phi_{2i}(q) = \frac{(q^i - 1)}{(q - 1)} \cdot \frac{(q^i + 1)}{(q + 1)} = \frac{q^{2i} - 1}{q^2 - 1} < \frac{q^2}{q^2 - 1} q^{2i-2}.$$

Если $q \geq 3$, то $\frac{q^2}{q^2-1} \leq 1.125$ и $\frac{q^4}{q^4-1} \leq 1.0125$, откуда получаем требуемые неравенства из утверждения (ii).

Докажем (iii). Поскольку $\Phi_i(q) \geq q^{\varphi(i)} - q^{\varphi(i)-1} - \dots - 1$, достаточно доказать, что $q^{\varphi(i)} - \frac{q^{\varphi(i)}-1}{q-1} = q^{\varphi(i)} - q^{\varphi(i)-1} - \dots - 1 > \frac{q-1}{q+1} q^{\varphi(i)}$. Это неравенство равносильно неравенству $\frac{2}{q+1} q^{\varphi(i)} > \frac{q^{\varphi(i)}-1}{q-1}$. Приведя к общему знаменателю, приходим к неравенству $2q^{\varphi(i)+1} - 2q^{\varphi(i)} > q^{\varphi(i)+1} + q^{\varphi(i)} - q - 1$. Поскольку $q^{\varphi(i)+1} \geq 3q^{\varphi(i)}$, получаем верное неравенство. Лемма доказана.

Лемма 2.3 [11, лемма 1.5]. *Предположим, что* a *и* i *— целые числа и* $\varepsilon \in \{+, -\}$. *Если* $a \geq 2$, $i \geq 3$ *и* $(a, i) \notin \{(2, 3), (2, 6)\}$, *то* $k_i(\varepsilon a) > a^{\varphi(i)/2}$.

2.2. Граф простых чисел простых групп лиева типа. Пусть G — конечная группа. *Граф простых чисел* $GK(G)$ (*граф Грюнберга — Кегеля*) группы G определяется следующим образом: его вершины — это элементы множества $\pi(G)$, и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Напомним, что подмножество вершин графа называется *кокликой*, если любые две вершины этого подмножества не смежны. Обозначим через $t(G)$ наибольший размер коклики в $GK(G)$. Назовем $\{r\}$*-кокликой* коклику, содержащую r. Если $r \in \pi(G)$, то $t(r, G)$ — наибольший размер $\{r\}$-коклики. Нам потребуется следующее определение, введенное в [11]. Если $r \in \pi(G)$ и $t(r, G) = t(G)$, то число r называется *большим по отношению к* G.

Лемма 2.4 [5, лемма 2.2]. *Пусть* L *— конечная неабелева простая группа, отличная от групп* $L_3^{\pm}(3)$, $C_2(3)$, *и пусть* G *— конечная группа, изоспектральная* L. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Существует неабелева простая группа* S *такая, что* $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ *для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы* K *группы* G.

(ii) *Для каждой коклики* ρ *в* $GK(G)$, *содержащей по крайней мере три элемента, не более одного простого числа из* ρ *делит произведение* $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. *В частности,* $t(S) \geq t(L) - 1$.

(iii) *Каждое простое число* $r \in \pi(G)$, *не смежное с* 2 *в* $GK(G)$, *не делит* $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. *В частности,* $t(2, S) \geq t(2, L)$.

Отметим, что значения $t(S)$ и $t(2, S)$ для всех неабелевых простых групп S найдены в [12, 13].

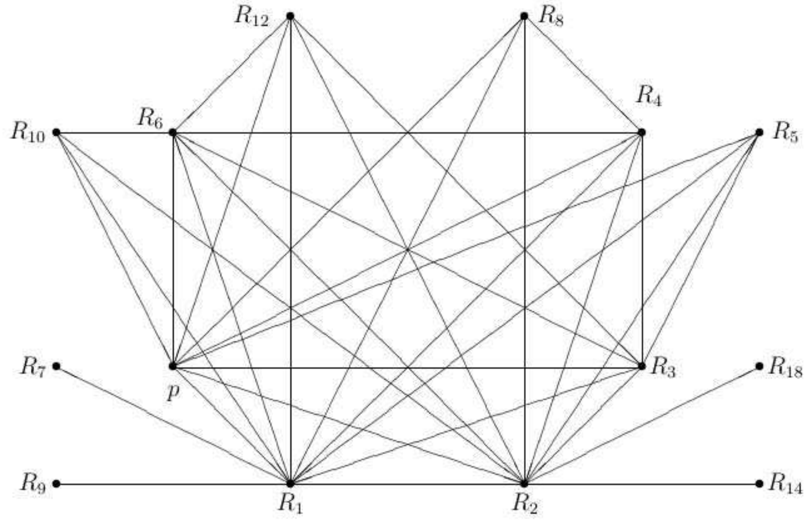

Рис. 1. Компактная форма графа $GK(E_7(q))$.

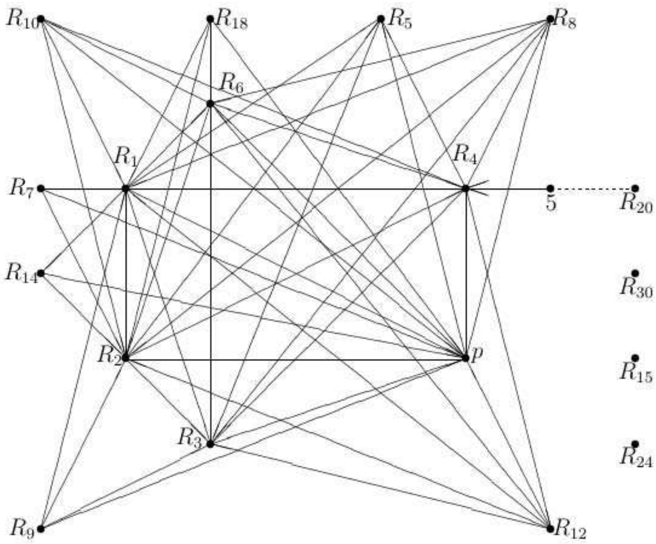

Рис. 2. Компактная форма графа $GK(E_8(q))$.

Следуя [13], под компактной формой графа простых чисел конечной простой группы G лиева типа над полем порядка q и характеристики p подразумевается граф, вершины которого помечены метками R_i и p. Вершина, помеченная R_i, представляет клику $GK(G)$ такую, что любая вершина в этой клике помечена простым числом из $R_i(q)$. Ребро, соединяющее R_i и R_j, представляет множество ребер графа $GK(G)$, которые соединяют каждую вершину из $R_i(q)$ с каждой вершиной в $R_j(q)$. Наконец, ребро между p и R_i означает, что p смежно со всеми простыми числами из $R_i(q)$. Рис. 1 представляет компактную форму графа $GK(E_7(q))$ (см. [13, рис. 4]).

Рис. 2 взят из [13, рис. 5] и содержит компактную форму графа простых чисел группы $E_8(q)$. Вектор из вершины 5 к R_4 и пунктирное ребро $(5, R_{20})$ означают, что R_4 и R_{20} не смежны, но если $5 \in R_4$ (т. е. $q^2 \equiv -1 \pmod 5$), то существует ребро между 5 и R_{20}.

Лемма 2.5 [13, предложение 3.11]. *Пусть простое число r является большим по отношению к простой группе S лиева типа над полем порядка q.*

(i) *Если $S = E_7(q)$, то $t(S) = 8$ и $e(r, q) \in \{4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18\}$.*

(ii) *Если $S = E_8(q)$, то $t(S) = 12$ и $e(r, q) \in \{5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30\}$.*

2.3. Вспомогательные результаты. Если G — конечная группа, то *экспонентой* $\exp(G)$ группы G называют наименьшее общее кратное элементов множества $\omega(G)$. Если r — простое число, то $\exp_r(G)$ — наибольшая степень числа r, лежащая в $\omega(G)$, и $\exp_{r'}(G)$ — наименьшее общее кратное элементов из $\omega(G)$, которые не делятся на r; в частности, $\exp(G) = \exp(G)_r \cdot \exp_{r'}(G)$.

Лемма 2.6 [14, лемма 3.6]. *Если $S = E_8(u)$, то $\exp(S) \geq 2u^{80}$, и если $S = E_7(u)$, то $\exp(S) \geq 3u^{48}$.*

Лемма 2.7. *Пусть L — классическая группа над полем порядка q характеристики p. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $n \geq 2$ и $L = B_n(q)$ или $L = C_n(q)$, то*

$$\exp(L) = \exp_p(L) \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(q^2)/c < \frac{2np}{(q-1,2)} \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(q^2),$$

где $c = (q-1,2)^2$, если $n = 2^s$, и $c = (q-1,2)$ иначе.

(ii) *Если $n \geq 4$ четно и $L = {}^2D_n(q)$ или $n \geq 3$ нечетно и $L = D_{n+1}(q)$, то $\exp_{p'}(L) = \exp_{p'}(B_n(q))$. Более того,*

$$\exp(L) = \exp_p(L) \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(q^2)/c < \frac{2np}{(q-1,2)} \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(q^2),$$

где число c, как в (i).

(iii) *Если $n \geq 5$ нечетно и $L = D_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, то*

$$\exp(L) = \frac{\exp_p(L)}{(q-1,2)} \Phi_n(\varepsilon q) \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(q^2) < \frac{2np}{(q-1,2)} \Phi_n(\varepsilon q) \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(q^2).$$

(iv) *Если $n \geq 3$ и $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, то*

$$\exp(L) = \exp_p(L) \prod_{i=1}^{n} |\Phi_i(\varepsilon q)|/c < np \cdot \prod_{i=1}^{n} |\Phi_i(\varepsilon q)|,$$

где $c = r \in \pi(q - \varepsilon 1)$, если $n = r^s$, и $c = 1$ иначе.

Доказательство. Экспоненты классических групп найдены в [14, лемма 3.5]. Из [15, предложение 0.5] следует, что $\exp_p(L) < 2(n-1)p$, если L имеет тип D_n, $\exp_p(L) < 2np$, если L — ортогональная или симплектическая группа, и $\exp_p(L) < np$, если L — линейная или унитарная группа. $\square$

Лемма 2.8 [16, лемма 1.3]. *Пусть S — простая группа лиева типа ранга m над полем порядка u. Тогда*

(i) *если $S = E_8(u)$, то порядки элементов группы S не превосходят $(u+1)/(u-1) \cdot u^8$;*

(ii) *если S отлична от групп Ри и Сузуки, а также от $E_8(u)$, то порядки элементов группы S не превосходят $u/(u-1) \cdot u^m$.*

Лемма 2.9 [11, лемма 3.6]. *Пусть v и r — различные простые числа и G — полупрямое произведение конечной v-группы U и циклической группы $\langle g\rangle$ порядка r. Предположим, что $[U,g]\neq 1$ и G действует точно на векторном пространстве W положительной характеристики $w\neq v$. Тогда либо естественное полупрямое произведение $W\rtimes G$ имеет элемент порядка rw, либо $v=2$ и r — простое число Ферма.*

Лемма 2.10 [17, теорема 1]. *Пусть L — конечная неабелева простая группа, отличная от знакопеременной группы степени 10. Если G — конечная неразрешимая группа с условием $\omega(G)=\omega(L)$, то разрешимый радикал группы G нильпотентен.*

3. Конечные группы, изоспектральные простой классической группе

В данном разделе получены ограничения на конечные группы G, изоспектральные простой классической группе L и имеющие среди композиционных факторов исключительную группу лиева типа E_7 или E_8.

Предположим, что $L\in\{L_3^{\pm}(3),C_2(3)\}$. Тогда $|\pi(L)|=3$. С другой стороны, в силу выбора группы G имеем $|\pi(G)|>3$, так что этот случай невозможен. Если $L\notin\{L_3^{\pm}(3),C_2(3)\}$, то из леммы 2.4 следует, что существует неабелева простая группа S такая, что $t(S)\geq t(L)-1$ и $S\leq\overline{G}=G/K\leq \mathrm{Aut}(S)$, где K — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в группе G. Тогда $S=E_7(u)$ или $S=E_8(u)$, где $u=v^k$ для некоторого простого числа v и целого числа k. Напомним, что $t(E_7(u))=8$ и $t(E_8(u))=12$, поэтому $t(L)\leq 9$ и $t(L)\leq 13$ соответственно.

Обозначим через n размерность группы L, если она является линейной или унитарной группой, иначе n обозначает лиев ранг группы L. Порядок основного поля группы L обозначается через q.

Лемма 3.1. *Если q нечетно, то $u\neq 2$.*

Доказательство. Предположим, что q нечетно и $u=2$. Положим $\tau=-$, если L — унитарная группа, и $\tau=+$ иначе. Из [12, табл. 6] находим, что для некоторого $i\in\{n-1,n,2n-2,2n\}$ число $r_i(\tau q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$. Из леммы 2.4 следует, что $k_i(\tau q)\in\omega(S)$. Покажем, что $k_i(\tau q)\geq\frac{q^2-q+1}{3}$. Если i равно 3, 4 или 6, то это неравенство очевидно. При других значениях i имеем, что $\varphi(i)\geq 4$, поэтому $k_i(\tau q)>q^2$ по лемме 2.3, в частности, $k_i(\tau q)\geq\frac{q^2-q+1}{3}$.

Пусть S имеет тип E_7. Тогда по лемме 2.8 все элементы множества $\omega(S)$ не превосходят $2\cdot 2^7=256$. Если $q\geq 29$, то $\frac{q^2-q+1}{3}\geq 271>256$; противоречие. Значит, можно считать, что $q\leq 27$. Заметим, что $127=r_7(2)\in\omega(S)$. С другой стороны,

$$126=e(127,3)=e(127,7)=e(127,23),\quad 42=e(127,5)=e(127,27),$$

$$63=e(127,9)=e(127,11)=e(127,13)=e(127,17),\quad 21=e(127,25),$$

поэтому если $q\neq 19$, то $n\geq 21$. В этом случае из [13, табл. 2, 3] находим, что $t(L)\geq 11$; противоречие. Аналогично если $q=19$, то $43=r_{14}(2)\in\omega(S)$, при этом $e(43,19)=42$, тем самым этот случай также невозможен.

Пусть S имеет тип E_8. Тогда по лемме 2.8 все элементы $\omega(S)$ не превосходят $3\cdot 2^8=768$. Если $q\geq 49$, то $\frac{q^2-q+1}{3}>768$; противоречие. Значит, можно считать, что $q\leq 47$. Заметим, что $331=r_{30}(2)\in\omega(S)$. С другой стороны, имеем

$$330=e(331,3)=e(331,11)=e(331,29)=e(331,37)=e(331,41),$$

$$165 = e(331,5) = e(331,9) = e(331,17) = e(331,19) = e(331,25) = e(331,43),$$
$$110 = e(331,7) = e(331,27), \quad 66 = e(331,13) = e(331,23) = e(331,47).$$

Значит, если $q \neq 31$, то $n \geq 33$; противоречие с $t(L) \leq 13$. Если $q = 31$, то $127 = r_7(2) \in \omega(S)$, но $e(127,31) = 63$, так что этот случай также невозможен. $\square$

Лемма 3.2. *Если $q \geq 3$, $x \in \omega(\overline{G}/S)$ и x нечетно, то $x \leq q^2$.*

Доказательство. Предположим, что в $\omega(\overline{G}/S)$ существует нечетное число x и $x > q^2$. Тогда $x \geq 11$ и x делит k. Значит, $k \geq x \geq 11$. Следовательно, $u = v^k \geq 2^k > k^3 \geq q^6$. Сначала рассмотрим случай $S = E_8(u)$. Поскольку $t(L) \leq 13$, из [13, табл. 2, 3] находим, что $n \leq 26$. Из циклического строения максимальных торов группы $E_8(u)$ [18] следует, что $u^8 - 1 \in \omega(E_8(u))$. По лемме 2.8 все элементы из $\omega(L)$ не превосходят $(3/2)q^{26}$, следовательно, $u^8/2 < u^8 - 1 \leq 3/2q^{26}$. Поскольку $u \geq q^6$, то $u^8 > q^{48}$; противоречие.

Если $S = E_7(u)$, то в силу [18] получаем, что в $\omega(S)$ лежит число $(u^7 - 1)/(u-1, 2)$, которое больше, чем $u^7/4$. Поскольку $t(L) \leq 9$, то $n \leq 18$. Лемма 2.8 влечет, что все элементы из $\omega(L)$ не превосходят $(3/2)q^{18}$. Значит, $u^7 < 6q^{18}$, что противоречит неравенству $q^6 < u$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $r \in \{r_7(u), r_{14}(u), r_9(u), r_{18}(u), r_{24}(u)\}$, если S имеет тип E_8, и $r \in \{r_5(u), r_9(u), r_{12}(u)\}$, если S имеет тип E_7. Тогда если $s \in \pi(K) \setminus \{v\}$, то либо $s = r$, либо s и r смежны в $GK(L)$.*

Доказательство. Предположим, что $s \neq r$. По лемме 2.10 группа K нильпотента, поэтому можно считать, что K является элементарной абелевой s-группой. Пусть S имеет тип E_8. Если $r = r_{24}(u)$, то утверждение следует из [19, предложение 2]. Значит, $r = r_i(u)$, где $i \in \{7, 9, 14, 18\}$. Тогда r делит порядок максимальной параболической подгруппы P, соответствующей поддиаграмме типа E_7 диаграммы Дынкина типа E_8. Пусть U — унипотентный радикал группы P и g — элемент из P порядка r. Тогда $\langle g\rangle$ нормализует U и $[U, g] \neq 1$ по [20, 13.2]. Поскольку по малой теореме Ферма $r - 1$ делится на 7 или 9, то r не может быть простым числом Ферма, поэтому из леммы 2.9 получаем, что $rs \in \omega(L)$.

Предположим, что S имеет тип E_7. Заметим, что r делит порядок максимальной параболической подгруппы, соответствующей поддиаграмме типа E_6 диаграммы Дынкина типа E_7. Далее рассуждаем, как в предыдущем абзаце, и получаем, что $rs \in \omega(L)$. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть $s \in \pi(K)$. Тогда $t(s, L) \leq 8$, если S имеет тип E_8, и $t(s, L) \leq 6$, если S имеет тип E_7.*

Доказательство. Предположим, что $S = E_8(u)$ и существует число $s \in \pi(K)$ такое, что $t(s, L) \geq 9$. Поскольку $t(v, S) \leq 5$ и $t(v, S) \geq t(v, L) - 1$, то можно предполагать, что $s \neq v$. По лемме 2.4 получаем, что 8 элементов из $\{s\}$-коклики ρ размера 9, отличных от s, не делят произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Предположим, что все они большие по отношению к S. Тогда, поскольку $t(S) = 12$, в силу леммы 2.5 хотя бы один из них принадлежит множеству $R_i(u)$, где $i \in \{7, 9, 14, 18, 24\}$, и, следовательно, по лемме 3.3 смежен с s в $GK(G)$; противоречие. Значит, найдется число $r \in \rho$, которое не является большим по отношению к S. В соответствии с леммой 2.5 и рис. 2 если два числа не смежны в $GK(S)$, то хотя бы одно из них является большим по отношению к S. Значит, оставшиеся семь элементов из ρ являются большими по отношению к S и лежат в некоторой r-коклике в $GK(S)$. Следовательно, имеем

$r \in R_i(u)$, где $i \in \{3,4,6\}$. Заметим, что $t(r,S) \leq 9$ и простые числа $r_7(u)$, $r_{14}(u)$ и $r_{24}(u)$ не смежны с r в $GK(S)$. Тогда некоторый элемент из ρ лежит в $\{r_7(u), r_{14}(u), r_{24}(u)\}$ и поэтому смежен с s в $GK(G)$; противоречие.

Предположим, что группа S имеет тип E_7 и найдется число $s \in \pi(K)$ такое, что $t(s,L) \geq 7$. Поскольку $t(v,S) \leq 5$, можно предполагать, что $s \neq v$. По лемме 2.4 шесть элементов из $\{s\}$-коклики ρ размера 7, отличных от s, не делят произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Предположим, что все они большие по отношению к S. Поскольку $t(S) = 8$, в силу леммы 2.5 хотя бы один из них принадлежит множеству $R_i(u)$, где $i \in \{6,9,12\}$, и, следовательно, по лемме 3.3 смежен с s в $GK(G)$; противоречие. Значит, найдется число $r \in \rho$ такое, что оно не является большим по отношению к S. В соответствии с рис. 1 находим, что $r \in R_i(u)$, где $i \in \{3,6\}$. Из строения максимальных торов группы S [18] получаем, что силовская r-группа в S нециклическая, поэтому она не может действовать без неподвижных точек на s-группе; противоречие. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть $q \geq 3$. Предположим, что числа $k_{i_j}(q)$, где $1 \leq j \leq m$, лежат в $\omega(L)$ и взаимно просты с $|K|$. Если $k_{i_j}(q) > q^2$ для любого $1 \leq j \leq m$, то существуют такие простые числа $r_{i_j}(q)$, что индуцированные ими подграфы в $GK(L)$ и в $GK(S)$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку $k_{i_j}(q) > q^2$, где $1 \leq j \leq m$, получаем, что $i_j > 2$. Делители числа $k_{i_j}(q)$ — нечетные числа, поэтому $(k_{i_j}(q), |\overline{G}/S|)$ делит k. Значит, в $\overline{G}/S$ есть элемент порядка $(k_{i_j}(q), |\overline{G}/S|)$. Из леммы 3.2 следует, что $(k_{i_j}(q), |\overline{G}/S|) < k_{i_j}(q)$, поэтому найдется такое простое число $r_j = r_{i_j}(q)$, что $(k_{i_j}(q))_{r_j} > (|\overline{G}/S|)_{r_j}$. Покажем, что числа r_j требуемые. Рассмотрим два числа r, r' из множества $\{r_1, \dots, r_m\}$. Если r и r' не смежны в $GK(L)$, то они не смежны и в $GK(S)$. Предположим, что $rr' \in \omega(L)$ и $r \in R_i(q)$, $r' \in R_{i'}(q)$. Тогда в силу [11, лемма 2.13] найдется элемент $\bar{g} \in \overline{G}$ порядка $k_i(q)k_{i'}(q)$. Значит, для некоторого числа t элемент $\bar{g}^t$ лежит в S и имеет порядок $k_i(q)k_{i'}(q)/t$. Поскольку $(k_i(q))_{r_i} > (|\overline{G}/S|)_{r_i} \geq (t)_{r_i}$ и $(k_{i'}(q))_{r_{i'}} > (|\overline{G}/S|)_{r_i} \geq (t)_{r_{i'}}$, то $k_i(q)k_{i'}(q)/t$ делится на $r_i r_{i'}$, поэтому $r_i r_{i'} \in \omega(S)$. Следовательно, любые два элемента из множества $\{r_1, \dots, r_m\}$ смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда они смежны в $GK(S)$. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $x \in \omega(E_7(u))$ и $(x, v(u^2-1)) = 1$. Тогда если $u \geq 3$, то $x < 3(u-1,2)u^6$.*

Доказательство. Поскольку $(x,v) = 1$, число x делит порядок некоторого максимального тора группы $E_7(u)$. Заметим, что такой порядок всегда делится на $(u+\tau 1)/(u+\tau 1, 2)$ для некоторого $\tau \in \{+,-\}$ [18]. Так как $(x, u^2-1) = 1$, в $\omega(S)$ лежит число $x(u+\tau 1)/(u+\tau 1, 2)$. Из леммы 2.8 следует, что $x(u+\tau 1)/(u+\tau 1,2) \leq \frac{u^8}{u-1}$. Тогда $x \leq \frac{(u-1,2)u^8}{(u-1)^2}$. Покажем, что $\frac{(u-1,2)u^8}{(u-1)^2} < (u-1,2)3u^6$. Это неравенство равносильно неравенству $6u^7 < 2u^8 + 3u^6$, которое, очевидно, выполнено при $u \geq 3$. $\square$

Лемма 3.7. *Пусть $S = E_8(u)$. Предположим, что r, r' и r'' — различные элементы множества $\pi(S)$ такие, что $t(r,S) \geq 10$, $t(r',S) \geq 10$ и $t(r'',S) \geq 9$. Если число r смежно с r' и r'' в $GK(S)$, то $r \cdot r' \cdot r'' \in \omega(S)$.*

Доказательство. Согласно рис. 2 если простое число s не является большим по отношению к S, то $t(s,S) \leq 9$. Значит, числа r и r' большие по отношению к S. По предположению r и r' смежны в $GK(S)$, поэтому в силу леммы 2.5 существует число i такое, что $r, r' \in R_i(u)$. Поскольку $t(r'',S) \geq 9$, то $r'' \neq v$ и найдется такое число j, что $r'' \in R_j(u)$. Если $i = j$, то число $r \cdot r' \cdot r''$ делит $k_i(u)$ и поэтому лежит в $\omega(S)$. Если $i \neq j$, то, поскольку r и r'' смежны в $GK(S)$, получаем, что число r'' не может быть большим по отношению к S. В соответствии с рис. 2 находим, что $j \in \{3, 4, 6\}$. Заметим, что произведение $r \cdot r' \cdot r''$ делит $k_i(u)k_j(u)$. Из строения максимальных торов группы S [18] получаем, что $k_i(u)k_j(u) \in \omega(S)$, значит, $r \cdot r' \cdot r'' \in \omega(S)$. $\square$

4. Доказательство теоремы

В данном разделе доказана основная теорема. Будут использованы обозначения из разд. 3: G — конечная группа, изоспектральная классической простой группе L и имеющая единственный неабелев композиционный фактор S, изоморфный группе $E_7(u)$ или $E_8(u)$. Напомним, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$, где K — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа в G. Более того, $t(S) \geq t(L) - 1$ и $t(E_8(u)) = 12$, $t(E_7(u)) = 8$; в частности, $t(L) \leq 13$.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа. Если $n \leq 4$ и $L \notin \{L_3^{\pm}(3), L_2^{+}(9), L_3^{-}(4), L_3^{-}(5), L_4^{-}(2)\}$, то из результатов работ [21–24] следует, что единственный неабелев композиционный фактор группы G изоморфен L. Если $L \in \{L_3^{\pm}(3), L_2^{+}(9), L_3^{-}(4), L_3^{-}(5), L_4^{-}(2)\}$, то $|\pi(L)| \leq 4 < |\pi(S)|$, стало быть, эти случаи невозможны. В соответствии с [12, табл. 8] находим, что $t(L) \geq 14$ при $n \geq 27$, поэтому в случае унитарных и линейных групп далее предполагаем, что $5 \leq n \leq 26$.

Предположим, что L — симплектическая или ортогональная группа. Если $L \in \{C_2(q), C_3(q), B_3(q), D_4(q)\}$, то при $q \leq 5$ верно, что $|\pi(L)| \leq 6$; при $q > 5$ из [25, 14] следует, что любая конечная группа, изоспектральная L, имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен либо L, либо $L_2^{+}(q^2)$. Тем самым эти случаи для L невозможны. Если $L \in \{B_8(q), C_8(q), {}^2D_8(q)\}$, то в [26, 27] показано, что L является единственным неабелевым композиционным фактором конечных групп, изоспектральных L. В соответствии с [12, табл. 8] находим, что $t(L) \geq 14$, если $L = B_n(q)$ или $L = C_n(q)$ и $n \geq 17$; если $L = D_n^{+}(q)$ и $n \geq 19$; если $L = D_n^{-}(q)$ и $n \geq 18$. Поэтому далее предполагаем, что L не изоморфна этим группам.

Из основных результатов [28, 29] следует, что если q четно и $L \notin \{L_4^{-}(2), L_5^{-}(2), B_4(q)\}$, то любая конечная группа, изоспектральная L, имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен L. Если $L = L_4^{-}(2)$ или $L_5^{-}(2)$, то $|\pi(L)| \leq 4$. Поэтому далее предполагаем, что q нечетно, если $L \neq B_4(q)$. Отметим, что если q нечетно, то $u \neq 2$ в силу леммы 3.1.

Наконец, из [5, теорема 2] следует, что можно считать $v \neq p$. Далее в этом разделе предполагаем перечисленные выше ограничения на n, p и u в зависимости от лиева типа группы L.

Доказательство разбито на несколько случаев. Далее опускаем рассмотрение групп $C_n(q)$, поскольку доказательство теоремы идентично для них и групп $B_n(q)$.

Случай 1. Пусть $n \geq 13$, если L — ортогональная или симплектическая группа, иначе пусть $n \geq 20$. Согласно [12, табл. 8] находим, что $t(L) \geq 10$ и, следовательно, S имеет тип E_8.

Предположим, что $t(L) = 13$. По лемме 3.4 получаем, что любое большое по отношению к L число r не делит $|K|$. С другой стороны, если $r \in R_i(q)$, то $\varphi(i) \geq 4$ и по лемме 2.3 имеем $k_i(q) > q^2$. Из леммы 3.5 следует, что $(k_i(q), |S|) \neq 1$. Значит, $t(S) \geq t(L) = 13$; противоречие.

Предположим, что $t(L) \leq 12$. Для каждой группы L положим числа r, r', r'' согласно второму столбцу табл. 1.

Таблица 1. Числа r, r' и r''

L	r, r', r''
$L_n^{\varepsilon}(q)$, $20 \leq n \leq 26$	$r_{10}(\varepsilon q)$, $r_{20}(\varepsilon q)$, $r_9(\varepsilon q)$
$B_{15}(q)$, $D_{16}(q)$	$r_{14}(q)$, $r_7(q)$, $r_{16}(q)$
$D_{15}^{\varepsilon}(q)$	$r_{14}(\varepsilon q)$, $r_7(\varepsilon q)$, $r_{16}(q)$
$B_{13}(q)$, $B_{14}(q)$, ${}^2D_{14}(q)$	$r_{12}(q)$, $r_7(q)$, $r_{14}(q)$
$D_{13}^{\varepsilon}(q)$	$r_{12}(q)$, $r_{14}(\varepsilon q)$, $r_5(\varepsilon q)$
$D_{14}(q)$	$r_7(q)$, $r_{14}(q)$, $r_{12}(q)$

Непосредственная проверка показывает, что $t(r, L) \geq 10$, $t(r', L) \geq 10$ и $t(r'', L) \geq 9$. Кроме того, r смежно с r' и r'' в $GK(L)$. Если $r \in R_i(q)$, то $\varphi(i) \geq 4$ и по лемме 2.3 получаем, что $k_i(q) > q^2$. Если s — простое число из $\{s\}$-коклики наибольшего размера в $GK(L)$, то по леммам 3.4 и 3.5 можно считать, что s делит $|S|$. Значит, если r делит $|S|$, то $t(r, S) \geq t(r, L)$. Аналогичные утверждения верны для r' и r''. По лемме 3.5 можно считать, что r, r', r'' лежат в $\pi(S)$ и r смежно с r' и r'' в $GK(S)$. По лемме 3.7 получаем, что $r \cdot r' \cdot r'' \in \omega(S)$. С другой стороны, из [30, 31] следует, что $r \cdot r' \cdot r'' \notin \omega(L)$; противоречие.

Случай 2. $L = B_{12}(q)$ или $L = {}^2D_{12}(q)$. Поскольку $t(L) = 10$, то S имеет тип E_8. По лемме 2.7 имеем $\exp(L) \leq 12p \prod_{i=1}^{12} \Phi_i(q^2)$. Заметим, что $\Phi_1(q^2)\Phi_2(q^2)\Phi_4(q^2)\Phi_8(q^2) = q^{16}-1 < q^{16}$. Из леммы 2.2 следует, что $\Phi_3(q^2)\Phi_6(q^2) < 1.0125q^8$, $\Phi_5(q^2)\Phi_{10}(q^2) < 1.0125q^{16}$ и $\Phi_i(q^2) < 1.125q^{2\varphi(i)}$ при $i \in \{7, 9, 11, 12\}$. Значит, $\prod_{i=1}^{12} \Phi_i(q^2) < (1.0125)^2(1.125)^4q^{92} < 1.7q^{92}$. Тогда $\exp(L) < 12p \cdot 1.7q^{92} < 22q^{93}$. Из неравенства $\exp(S) > 2u^{80}$ получаем, что $u^{80} < 11q^{93}$. В графе $GK(L)$ есть коклика размера 10, содержащая числа $r_{11}(q)$ и $r_{22}(q)$, поэтому по лемме 2.4 для некоторого $\tau \in \{+, -\}$ число $k_{11}(\tau q)$ принадлежит $\omega(S)$. Более того, из леммы 3.5 следует, что все простые делители $k_{11}(\tau q)$ являются большими по отношению к S. Лемма 2.8 влечет, что $k_{11}(\tau q) \leq \frac{u+1}{u-1} \cdot u^8$. Предположим, что $q = 3$. Тогда из неравенства $u^{80} < 11q^{93}$ находим, что $u = 3$; противоречие с условием $p \neq v$. Пусть $q \geq 5$. По лемме 2.2 имеем

$$k_{11}(\tau q) = \frac{\Phi_{11}(\tau q)}{(q - \tau 1, 11)} > \frac{(q-1)q^{10}}{(q+1)(q - \tau 1, 11)} \geq \frac{4q^{10}}{6(q - \tau 1, 11)}.$$

Значит, $\frac{2q^{10}}{3(q-\tau 1,11)} < k_{11}(\tau q) < 2u^8$. В частности, $u > q \geq 5$ и поэтому $u \geq 7$. Тогда $\frac{u+1}{u-1} \leq 8/6 = 4/3$ и, следовательно, $\frac{2q^{10}}{3(q-\tau 1,11)} < \frac{4}{3}u^8$, откуда находим, что $q^{10} < 2(q - \tau 1, 11)u^8$. Следовательно, $q^{100} < (2(q - \tau 1, 11))^{10}u^{80} < 11 \cdot (2(q - \tau 1, 11))^{10}q^{93}$. Если $(q - \tau 1, 11) = 1$, то получаем неравенство $q^7 < 11 \cdot 2^{10}$; противоречие с $q \geq 5$. Предположим, что $(q - \tau 1, 11) = 11$. Тогда $u > q \geq 23$, поэтому $u \geq 25$. Из неравенства $\frac{2q^{10}}{3(q-\tau 1,11)} < \frac{26}{24}u^8$ находим, что $q^{100} < 11(1.7 \cdot 11)^{10}q^{93}$. Значит, $q^7 < 11 \cdot 19^{10}$. Если $q \geq 109$, то это неравенство не выполнено. Если $q < 109$, то, поскольку $(q - \tau 1, 11) = 11$, имеем $q \in \{23, 43, 67, 89\}$. Заметим, что $67 \in R_{22}(43)$ и $67 \in R_{11}(89)$. Если $67 = r_i(u)$, то по малой теореме Ферма

$67-1$ делится на i. Тогда $i \in \{2,3,6\}$, но во всех этих случаях $r_i(u)$ не является большим по отношению к S. Рассуждая аналогично, приходим к противоречию для чисел $3937230404603 = r_{11}(23)$ и $1890149702927663 = r_{11}(67)$, поскольку $3937230404603 - 1 = 2 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 619256119$ и $1890149702927663 - 1 = 2 \cdot 11^2 \cdot 7810535962511$.

Случай 3. Пусть $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, где $17 \le n \le 19$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$. Предположим, что S имеет тип E_7. Из лемм 3.4 и 3.5 следует, что для каждого i такого, что число $r_i(\varepsilon q)$ большое по отношению к L, найдется число $r_i(\varepsilon q)$, которое делит $|S|$. Следовательно, $t(S) \ge t(L) \ge 9$; противоречие.

Предположим, что S имеет тип E_8. Заметим, что $\exp(L) \le \exp\bigl(L_{19}^{\varepsilon}(q)\bigr)$. Оценим сверху число $\exp\bigl(L_{19}^{\varepsilon}(q)\bigr)$. Отметим, что

$$|\Phi_1(\varepsilon q)\Phi_2(\varepsilon q)\Phi_4(\varepsilon q)\Phi_8(\varepsilon q)\Phi_{16}(\varepsilon q)| = q^{16} - 1 < q^{16}.$$

Если $i \in \{3,5,7\}$, то $|\Phi_i(\varepsilon q)\Phi_{2i}(\varepsilon q)| < 1.125q^{2i-2}$ по лемме 2.2. Наконец, если $i \in \{9,11,12,13,15,17,18,19\}$, то $|\Phi_i(\varepsilon q)| < 1.5q^{\varphi(i)}$. Значит, $\exp(L) < 19p \cdot (1.5)^8(1.125)^3q^{120} < 700q^{121}$. Из неравенства $\exp(S) \le \exp(L)$ получаем $u^{80} < 350q^{121}$.

Поскольку $t(r_{17}(\varepsilon q), L) \ge 9$, то $(k_{17}(\varepsilon q), |K|) = 1$ по лемме 3.4. Из леммы 3.2 следует, что в $\omega(S)$ есть элемент не меньше, чем $k_{17}(\varepsilon q)/q^2 \ge \frac{q^{14}}{2(q-\varepsilon 1,17)}$. С другой стороны, все элементы из $\omega(S)$ не превосходят $2u^8$, поэтому $q^{14} < 4(q-\varepsilon 1,17)u^8$, откуда $q^{140} < 4^{10}(q-\varepsilon 1,17)^{10}u^{80}$. Из неравенства выше находим, что $q^{140} < 350 \cdot 4^{10}(q-\varepsilon 1,17)^{10}q^{121}$. Тогда $q^{19} < 350 \cdot 4^{10}(q-\varepsilon 1,17)^{10}$. Если $(q-\varepsilon 1,17) = 1$, то это неравенство неверно при $q \ge 3$. Если $(q-\varepsilon 1,17) = 17$, то $q > 17$. Поскольку $17^9 > 350 \cdot 4^{10}$, получаем противоречие.

Случай 4. Пусть $t(L) = 9$ и L — симплектическая или ортогональная группа. Согласно [12, табл. 8] получаем, что $L \in \{B_{11}(q), D_{11}(q), {}^2D_{11}(q), D_{12}(q)\}$. Если число $r_i(q)$ большое по отношению к L, то $i \notin \{1,2,3,4,6\}$. Значит, $\varphi(i) \ge 4$ и, следовательно, $k_i(q) > q^2$. Из лемм 3.4 и 3.5 следует, что для каждого i найдется такое число $r_i(q)$, которое делит $|S|$. Тогда $t(S) \ge t(L) \ge 9$, поэтому группа S имеет тип E_8.

Заметим, что $\exp(L) \le 12p\prod_{i=1}^{11}\Phi_i(q^2)$. Оценим сверху число $\prod_{i=1}^{11}\Phi_i(q^2)$. Во-первых, имеем $\Phi_1(q^2)\Phi_2(q^2)\Phi_4(q)\Phi_8(q^2) < q^{16}$. Далее, если $i = 3,5$, то лемма 2.3 влечет, что $\Phi_i(q^2)\Phi_{2i}(q^2) < 1.0125q^{4i-4}$. Наконец, если $i \in \{7,9,11\}$, то $\Phi_i(q^2) < 1.125q^{2\varphi(i)}$. Значит, $\prod_{i=1}^{11}\Phi_i(q^2) \le (1.0125)^2(1.125)^3q^{84} < 1.5q^{84}$. Тогда $\exp(L) < 12p \cdot 1.5q^{84} \le 18q^{85}$ и, следовательно, $u^{80} < 9q^{85}$.

Предположим, что при некотором $\tau \in \{+,-\}$ верно $(k_{11}(\tau q), |\overline{G}/S|\cdot|K|) = 1$. Тогда $k_{11}(\tau q) \in \omega(S)$. Из лемм 2.2 и 2.8 следует, что $\frac{q^{10}}{2(q-\tau 1,11)} < k_{11}(\tau q) \le 2u^8$, в частности, $u > q$. Отсюда находим, что $u \ge 4$ и $(u+1)/(u-1) \ge 5/3$. По лемме 2.8 имеем $k_{11}(\tau q) \le 5/3u^8$, поэтому $q^{100} < (10/3)^{10}(q-\tau 1,11)^{10}u^{80} < 9\cdot 3.4^{10}(q-\tau 1,11)^{10}q^{85}$, откуда $q^{15} < 9\cdot 3.4^{10}(q-\tau 1,11)^{10}$. Если $(q-\tau 1,11) = 1$, то $3^{15} > 9\cdot 3.4^{10}$; противоречие. Если $(q-\tau 1,11) = 11$, то $q \ge 23$ и $23^{15} > 9\cdot(3.4\cdot 11)^{10}$; противоречие.

Предположим теперь, что число $r_{11}(\tau q)$ делит $|K|\cdot|\overline{G}/S|$. По лемме 3.4 получаем, что $r_{11}(\tau q)$ делит $|\overline{G}/S|$. Тогда $u \ge v^{r_{11}(\tau q)} \ge 2^{23}$. Поскольку $u^{80} < 9q^{85}$, то $q > 20$. Заметим, что во всех случаях для группы L числа $r_4(q)$ и $r_{11}(\tau q)$ лежат в некоторой коклике размера 3 в $GK(L)$. Из леммы 2.4 вытекает, что

$k_4(q)k_{20}(q) \in \omega(S)$. Заметим, что $k_4(q)k_{20}(q) = \frac{q^{10}+1}{2(q^2+1,5)}$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем неравенство $q^{15} < 9 \cdot 3.4^{10}(q^2+1,5)^{10}$; противоречие с $q > 20$.

Случай 5. Пусть $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $13 \le n \le 16$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$. Оценим сверху число $\exp\bigl(L_{16}^\varepsilon(q)\bigr)$. Заметим, что $|\Phi_1(\varepsilon q)\Phi_2(\varepsilon q)\Phi_4(\varepsilon q)\Phi_8(\varepsilon q)\Phi_{16}(\varepsilon q)| = q^{16} - 1 < q^{16}$. По лемме 2.2 если $i \in \{3,5,7\}$, то $|\Phi_i(\varepsilon q)\Phi_{2i}(\varepsilon q)| < 1.125q^{2i-2}$. Поскольку $\Phi_{12}(\varepsilon q) = q^4 - q^2 + 1$, то $\Phi_{12}(\varepsilon q) < q^4$. Наконец, если $i \in \{9,11,13,15\}$, то $|\Phi_i(\varepsilon q)| < 1.5q^{\varphi(i)}$. Значит, $\exp(L) < 16p(1.5)^4(1.125)^3q^{80} < 116q^{81}$. Если группа S имеет тип E_7, то получаем неравенство $u^{48} < 39q^{81}$; если группа S имеет тип E_8, то получаем неравенство $u^{80} < 58q^{81}$.

Предположим, что S имеет тип E_8. Заметим, что числа $r_{11}(\varepsilon q)$, $r_{12}(\varepsilon q)$, $r_{13}(\varepsilon q)$ образуют коклику размера 3 в $GK(L)$, поэтому хотя бы одно из чисел $k_{11}(\varepsilon q)$ или $k_{13}(\varepsilon q)$ принадлежит $\omega(S)$. Оба этих числа не меньше, чем $\frac{q^{10}}{2d}$, где либо $d = 1$, либо $1 < d < q$ и $q > 11$. По лемме 2.8 получаем, что $q^{10} < 4du^8$. Тогда $q^{100} < 4^{10}d^{10}u^{80} < 58 \cdot 4^{10}d^{10}q^{81}$, что равносильно неравенству $q^{19} < 58 \cdot 4^{10}d^{10}$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \ge 3$. Если $d > 1$, то $d < q$ и $q > 11$, поэтому приходим к неверному неравенству $q^9 < 58 \cdot 4^{10}$.

Пусть S имеет тип E_7. Если $n \le 14$, то $\exp(L) \le \exp(L_{14}(\varepsilon q))$. Оценивая число $\exp(L_{14}(\varepsilon q))$, как выше, находим $\exp(L_{14}(\varepsilon q)) < 14p \cdot (1.5)^3(1.125)^3q^{64} < 68q^{65}$. Значит, $u^{48} < 23q^{65}$. Если $k_{13}(\varepsilon q) \in \omega(S)$, то в S есть элемент порядка не менее, чем $\frac{q^{12}}{2(q-\varepsilon 1,13)} \ge q^{11}/2$. По лемме 2.8 имеем $q^{11} < 3u^7$. Тогда $q^{75} < (q^{11})^{48/7} < 3^7u^{48} < 23 \cdot 3^7q^{65}$, откуда $q^{10} < 23 \cdot 3^7$; противоречие с $q \ge 3$. Значит, можно предполагать, что $(k_{13}(\varepsilon q), |K| \cdot |\overline{G}/S|) > 1$. Такое возможно, только если $n = 14$, поскольку 2 и $r_{13}(\varepsilon q)$ не смежны в $GK\bigl(L_{13}^\varepsilon(q)\bigr)$. Тогда из леммы 2.4 следует, что $k_7(\varepsilon q)k_{14}(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Поскольку $k_7(\varepsilon q)k_{14}(\varepsilon q) = \frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{(q-1,7)(q+1,7)}$, получаем неравенство $q^{12}/d < 2u^7$, где либо $d = 1$, либо $d = 7$ и $q > 7$. Следовательно, $q^{82} < (q^{12})^{48/7} < 2^7d^7u^{48} < 23 \cdot 2^7 \cdot d^7q^{65}$, откуда $q^{17} < 23 \cdot 2^7 \cdot d^7$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \ge 3$; если $d = 7$, то получаем противоречие с $q > 7$. Значит, $n = 15$ или $n = 16$.

Предположим, что $(k_{13}(\varepsilon q), |K| \cdot |\overline{G}/S|) = 1$. Из лемм 3.4 и 3.5 следует, что если число $r_i(\varepsilon q)$ большое по отношению к L, то существует $r_i(\varepsilon q)$, которое делит $|S|$, поэтому оно также является большим и по отношению к S. Тогда простые делители числа $k_{13}(\varepsilon q)$ все лежат либо в некотором множестве $R_j(u)$, либо в множестве $R_4(u) \cup R_8(u)$. Значит, $k_{13}(\varepsilon q) \le k_j(u) \le \Phi_j(u) \le 1.5u^6$ либо $k_{13}(\varepsilon q) \le k_4(u)k_8(u) \le (u^2+1)(u^4+1) < 1.5u^6$. Тогда $\frac{q^{12}}{2(q-\varepsilon 1,13)} < k_{13}(\varepsilon q) \le 1.5u^6$. Следовательно, $q^{96} < 3^8 \cdot (q-\varepsilon 1,13)^8u^{48} < 39 \cdot 3^8 \cdot (q-\varepsilon 1,13)^8q^{81}$, откуда $q^{15} < 39 \cdot 3^8 \cdot (q-\varepsilon 1,13)^8$. Если $(q-\varepsilon 1,13) = 1$, то получаем противоречие с $q \ge 3$. Если $(q-\varepsilon 1,13) = 13$, то $q > 13$ и снова приходим к неверному неравенству. Значит, можно предполагать, что некоторое число $r_{13}(\varepsilon q)$ делит $|K| \cdot |\overline{G}/S|$.

Предположим, что $n = 16$. Тогда в $\omega(L)$ есть число $k_5(\varepsilon q) \cdot k_{11}(\varepsilon q)$. Поскольку множества $\{r_5(\varepsilon q), r_{12}(\varepsilon q), r_{13}(\varepsilon q)\}$ и $\{r_{11}(\varepsilon q), r_{12}(\varepsilon q), r_{13}(\varepsilon q)\}$ — коклики в $GK(L)$, число $k_5(\varepsilon q) \cdot k_{11}(\varepsilon q)$ лежит в $\omega(S)$. Значит, $k_5(\varepsilon q) \cdot k_{11}(\varepsilon q) < 1.5u^7$. С другой стороны, $k_5(\varepsilon q) \cdot k_{11}(\varepsilon q) > \frac{q^{14}}{4(q-\varepsilon 1,5)(q-\varepsilon 1,11)}$. Стало быть, $q^{14} < 6(q-\varepsilon 1,5)(q-\varepsilon 1,11)u^7$, что равносильно неравенству $q^2 < (6(q-\varepsilon 1,5)(q-\varepsilon 1,11))^{1/7}u$. Тогда

$$q^{96} < 6^7(q-\varepsilon 1,5)^7(q-\varepsilon 1,11)^7u^{48} < 39 \cdot 6^7(q-\varepsilon 1,5)^7(q-\varepsilon 1,11)^7q^{81}.$$

Отсюда находим, что $q^{15} < 39 \cdot 6^7(q-\varepsilon 1, 5)^7(q-\varepsilon 1, 11)^7$. Если $(q-\varepsilon 1, 5) = (q-\varepsilon 1, 11) = 1$, то получаем противоречие с $q \geq 3$. Если $(q-\varepsilon 1, 11) = 1$ и $(q-\varepsilon 1, 5) = 5$, то $q \geq 9$ и тогда $9^{15} > 39 \cdot 6^7 \cdot 5^7$; противоречие. Наконец, если $(q-\varepsilon 1, 11) = 11$, то $q \geq 23$ и $23^{15} > 39 \cdot 6^7 \cdot 5^7 \cdot 11^7$; противоречие.

Предположим, что $n = 15$. Тогда $r_{15}(\varepsilon q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$, поэтому $R_{15}(\varepsilon q) \subseteq R_j(u)$, где $j \in \{7, 14, 9, 18\}$. Заметим, что если $r_i(u)$ смежно с $r_{15}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, то $i \in \{1, 2, j\}$. Поскольку $r_{13}(\varepsilon q)$ делит $|K| \cdot |\overline{G}/S|$, то числа $k_5(\varepsilon q)$, $k_7(\varepsilon q)$, $k_{11}(\varepsilon q)$, $k_{12}(\varepsilon q)$, $k_{14}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(r_5(\varepsilon q), S) \geq 4$ и, следовательно, $r_5(\varepsilon q)$ не принадлежит множеству $R_1(u) \cup R_2(u)$. Поскольку $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_{15}(\varepsilon q)$ в $GK(L)$ и в $GK(S)$, то $R_5(\varepsilon q) \subseteq R_j(u)$. Пусть $r_7(\varepsilon q) \in R_k(u)$. Тогда, с одной стороны, $r_7(\varepsilon q)$ смежно с $r_5(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, с другой стороны, $r_7(\varepsilon q)$ не смежно с $r_{15}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Получаем противоречие, так как смежность элементов из $R_j(u)$ и $R_k(u)$ зависит от чисел k и j, а не от представителей этих множеств.

Случай 6. Пусть $L = B_{10}(q)$ или $L = {}^2D_{10}(q)$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{10} \Phi_i(q^2) = (q^{16}-1) \cdot \Phi_3(q^2)\Phi_6(q^2) \cdot \Phi_5(q^2)\Phi_{10}(q^2) \cdot \Phi_7(q^2)\Phi_9(q^2)$$
$$\leq q^{16} \cdot 1.0125q^8 \cdot 1.0125q^{16} \cdot 1.125q^{12} \cdot 1.125q^{12} < 1.3q^{64}.$$

Предположим, что S имеет тип E_8. Тогда $\exp(S) \leq \exp(L) \leq 10p \cdot \prod_{i=1}^{10} \Phi_i(q^2) \leq 13q^{65}$, откуда $7q^{65} > u^{80}$. Поскольку $u \geq 3$, получаем, что $q \geq 5$. Заметим, что число $r_{20}(q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$. По лемме 2.4 $k_{20}(q)$ делит $k_j(u)$, где j — целое число такое, что 2 и $r_j(u)$ не смежны в $GK(S)$. Значит, $q^8/(2d) < \Phi_j(u) \leq 1.5u^8$, где $d = (5, q^2+1)$. Следовательно, $q^{80} < (3d)^{10}u^{80} < 7 \cdot (3d)^{10}q^{65}$. Тогда $q^{15} < 7 \cdot (3d)^{10}$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с неравенством $q \geq 3$. Если $d = 5$, то $q \neq 5$, поэтому $q \geq 7$. Поскольку $7^{15} > 7 \cdot (15)^{10}$, получаем противоречие.

Предположим, что S имеет тип E_7. Тогда $t(r_5(q), L) = t(r_{10}(q), L) = 8$, $t(r_8(q), L) \geq 7$. Заметим, что если число $r_i(q)$ является большим по отношению к L, то $\varphi(i) \geq 4$. Следовательно, для каждого такого i можно считать, что $r_i(q)$ делит $|S|$. Тогда $t(r_5(q), S) \geq t(r_5(q), L) = 8$, $t(r_{10}(q), S) \geq t(r_{10}(q), L) = 8$, $t(r_8(q), S) \geq t(r_8(q), L) = 7$. Значит, числа $r_5(q)$ и $r_{10}(q)$ большие по отношению к S. Также заметим, что $r_5(q)$, $r_{10}(q)$ и $r_8(q)$ индуцируют полный подграф в $GK(L)$. По лемме 3.4 получаем, что $(k_5(q)k_{10}(q)k_8(q), |K|) = 1$. Тогда по лемме 3.5 можно считать, что $r_5(q)$, $r_{10}(q)$ и $r_8(q)$ индуцируют полный подграф в $GK(S)$. Поскольку числа $r_5(q)$ и $r_{10}(q)$ смежны в $GK(S)$, возможны два случая: $r_5(q)$ и $r_{10}(q)$ либо лежат в $R_4(u) \cup R_8(u)$, либо для некоторого j — в $R_j(u)$. В первом случае если $t(r_8(q), S) = 8$, то число $r_8(q)$ большое по отношению к S и, следовательно, $r_8(q) \in R_4(u) \cup R_8(u)$. Тогда $r_8(q)r_5(q)r_{10}(q)$ делит $k_4(u)k_8(u)$, откуда $r_8(q)r_5(q)r_{10}(q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Если $t(r_8(q), S) = 7$, то $r_8(q) \in R_3(\tau u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Заметим, что $r_3(\tau u)$ не смежно $r_8(u)$, поэтому $r_8(q)r_5(q)r_{10}(q)$ делит $k_3(\tau u)k_4(u)$ и, значит, $r_8(q)r_5(q)r_{10}(q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Пусть $r_5(q)$ и $r_{10}(q)$ лежат в $R_j(u)$. Тогда произведение $r_5(q)r_{10}(q)$ делит $k_j(u)$ и поэтому $r_8(q)r_5(q)r_{10}(q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие.

Случай 7. Пусть $L \in \{B_9(q), D_9^\varepsilon(q), D_{10}(q)\}$. По лемме 2.2 имеем

$$\prod_{i=1}^{9} \Phi_i(q^2) = (q^{16}-1)\cdot\Phi_3(q^2)\Phi_6(q^2)\cdot\Phi_5(q^2)\Phi_7(q^2)\Phi_9(q^2)$$
$$\le q^{16}\cdot 1.0125q^8\cdot 1.125q^8\cdot 1.125q^{12}\cdot 1.125q^{12} < 2q^{56}.$$

Из леммы 2.7 следует, что $\exp(L) \le 10p\cdot\prod_{i=1}^{9}\Phi_i(q^2) \le 20q^{57}$. Значит, если S имеет тип E_7, то получаем неравенство $7q^{57} > u^{48}$; если S имеет тип E_8, то получаем неравенство $10q^{57} > u^{80}$.

Предположим, что $(k_{16}(q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) = 1$. Тогда $k_{16}(q) \in \omega(S)$. Если S имеет тип E_8, то получаем неравенство $q^8/2 \le 2u^8$. Следовательно, $q^{80} < 4^{10}u^{80} \le 10\cdot 4^{10}q^{57}$, что неверно при $q \ge 3$. Если S имеет тип E_7, то в силу леммы 2.4 получаем, что $t(r_{16}(q), S) \ge t(L)-1 \ge 6$. Тогда $(k_{16}(q), v(u^2-1)) = 1$ и, следовательно, $q^8/2 < 6u^6$ по лемме 3.6. Значит, имеем $q^{64} < 12^8u^{48} < 7\cdot 12^8q^{57}$, откуда $q^7 < 7\cdot 12^8$. Следовательно, $q < 23$. Заметим, что из неравенства $q^8/2 < 6u^6$ следует, что $u > q$. Предположим, что $u/q \ge 2$. Тогда $(u/q)^{48} \ge 2^{48} > 7\cdot 19^9 \ge 7\cdot q^9$; противоречие с неравенством $7q^{57} > u^{48}$. Пусть $q < u < 2q$. Рассмотрим число $r = r_{16}(q)$ в зависимости от q, как в табл. 2. Из таблицы видим, что во всех случаях $e(r,u) \ge 48$, поэтому r не может делить $|S|$; противоречие.

Таблица 2. Числа $r_{16}(q)$

(q,r), $r = r_{16}(q)$	$(u, e(r,u))$ для $q < u < 2q$
$(3, 193)$	$(4, 48)$, $(5, 192)$
$(5, 11489)$	$(7, 5744)$, $(8, 5744)$, $(9, 5744)$
$(7, 169553)$	$(8, 84776)$, $(9, 84776)$, $(11, 169552)$, $(13, 169552)$
$(9, 21523361)$	$(11, 21523360)$, $(13, 1266080)$, $(16, 672605)$, $(17, 316520)$
$(11, 6304673)$	$(13, 573152)$, $(16, 71644)$, $(17, 17911)$, $(19, 1576168)$
$(13, 407865361)$	$(16, 25491585)$, $(17, 10196634)$, $(19, 4798416)$, $(23, 10196634)$, $(25, 50983170)$
$(17, 18913)$	$(19, 6304)$, $(23, 18912)$, $(25, 3152)$, $(27, 788)$, $(29, 9456)$, $(31, 18912)$, $(32, 9456)$
$(19, 15073)$	$(23, 7536)$, $(25, 7536)$, $(27, 314)$, $(29, 7536)$, $(31, 2512)$, $(32, 314)$, $(37, 15072)$

Предположим, что $(k_{16}(q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) \ne 1$. Заметим, что если $L = D_{10}(q)$, то в $\omega(L)$ есть элемент порядка $k_5(q)k_{10}(q)$. Если $L \in \{B_9(q), D_9^\varepsilon(q)\}$, то для некоторого $\tau \in \{+,-\}$ в L есть элемент порядка $k_8(q)k_5(\tau q)$. По лемме 2.4 получаем, что $(k_5(q)k_{10}(q)k_8(q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) = 1$. Значит, если $L = D_{10}(q)$, то в $\omega(S)$ есть элемент порядка $k_5(q)k_{10}(q) = \frac{q^{10}-1}{(q^2-1)(q^2-1,5)} > q^8/d$, где $d = (q^2-1, 5)$. Если $L \ne D_{10}(q)$, то в $\omega(S)$ есть элемент порядка $k_8(q)k_5(\tau q) = \frac{(q^4+1)}{2}\cdot\frac{(q^5-\tau 1)}{(q-\tau 1)(q-\tau 1,5)} > q^8/(4d)$. Рассуждая, как выше, находим, что если S имеет тип

E_8, то $q^{80} < (8d)^{10}u^{80} \le 10(8d)^{10}q^{57}$. Значит, выполнено неравенство $q^{23} < 10(8d)^{10}$. Если $d = 1$, то это неравенство неверно при $q \ge 3$; если $d = 5$, то $q \ge 9$ и снова неравенство неверно; противоречие.

Предположим, что группа S имеет тип E_7. По лемме 3.4 находим, что $r_{16}(q)$ делит $|\overline{G}/S|$. Следовательно, $u = v^k \ge 2^{17} > 1000$. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что в S есть элемент порядка, не меньшего, чем $q^8/(4d)$, где $d = (5, q^2-1)$, и взаимного простого с $v(u^2-1)$. Тогда $q^8 < 24du^6$ по лемме 3.6. Следовательно, $q^{64} < 24d^8u^{48} < 7 \cdot 24d^8q^{57}$. Значит, $q^7 < 7\cdot(24d)^8$, что противоречит неравенству $q > 1000$.

Случай 8. Пусть $L = L_n(\varepsilon q)$, где $n = 11$ или $n = 12$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$. По лемме 2.7 заключаем, что $\exp(L) \le \exp(L_{12}(\varepsilon q))$. Оценим сверху число $\exp(L_{12}(\varepsilon q))$. Во-первых, заметим, что $|\Phi_1(\varepsilon q)\Phi_2(\varepsilon q)\Phi_4(\varepsilon q)\Phi_8(\varepsilon q)| = q^8 - 1 < q^8$. Далее, по лемме 2.2 если $i \in \{3,5\}$, то $|\Phi_i(\varepsilon q)\Phi_{2i}(\varepsilon q)| < 1.125q^{2i-2}$. Наконец, $|\Phi_{12}(\varepsilon q)| < q^4$, и если $i \in \{7,9,11\}$, то $|\Phi_i(\varepsilon q)| < 1.5q^{\varphi(i)}$. Отсюда находим, что $\exp(L_{12}(\varepsilon q)) < 12p\cdot(1.125)^2(1.5)^3q^{46} < 52q^{47}$. Следовательно, если S имеет тип E_8, то получаем неравенство $u^{80} < 26q^{49}$; если S имеет тип E_7, то получаем неравенство $u^{48} < 18q^{49}$.

Предположим, что $(k_{11}(\varepsilon q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) = 1$. Тогда $k_{11}(\varepsilon q) \in \omega(S)$. По лемме 2.8 получаем, что $k_{11}(\varepsilon q) < 2u^8$, если S имеет тип E_8, и $k_{11}(\varepsilon q) < 1.5u^7$, если S имеет тип E_7. Следовательно, $q^{10} < 4(q-\varepsilon 1, 11)u^8$ или $q^{10} < 3(q-\varepsilon 1, 11)u^7$ соответственно. Тогда $q^{100} < 26\cdot 4^{10}(q-\varepsilon 1, 11)^{10}q^{47}$ либо $q^{68} < 18\cdot 3^7(q-\varepsilon 1, 11)^7q^{47}$. Если $(q-\varepsilon 1, 11) = 1$, то получаем противоречие с $q \ge 3$, если $(q-\varepsilon 1, 11) = 11$, то получаем противоречие с $q > 11$.

Пусть $(k_{11}(\varepsilon q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) > 1$. Тогда $n = 12$, поскольку 2 и $r_{11}(\varepsilon q)$ не смежны в $GK\big(L_{11}^{\varepsilon}(q)\big)$. Из леммы 2.4 следует, что $k_5(\varepsilon q)k_7(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Заметим, что $k_5(\varepsilon q)k_7(\varepsilon q) > \frac{q^{10}}{4(q-\varepsilon 1,7)(q-\varepsilon 1,5)}$ по лемме 2.2. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем неравенства $q^{100} < 26\cdot 8^{10}(q-\varepsilon 1,7)^{10}(q-\varepsilon 1,5)^{10}q^{47}$ или $q^{68} < 18\cdot 6^7(q-\varepsilon 1,7)^7(q-\varepsilon 1,5)^7q^{47}$. Эти неравенства равносильны неравенствам $q^{53} < 26\cdot 8^{10}(q-\varepsilon 1,7)^{10}(q-\varepsilon 1,5)^{10}$ и $q^{21} < 13\cdot 6^7(q-\varepsilon 1,7)^7(q-\varepsilon 1,5)^7$ соответственно. Если $(q-\varepsilon 1,7) = (q-\varepsilon 1,5) = 1$, то получаем противоречие с $q \ge 3$. Если $(q-\varepsilon 1,7) = 7$ или $(q-\varepsilon 1,5) = 5$, то $q \ge 9$. Тогда $9^{53} > 26\cdot(8\cdot 35)^{10}$ и $9^{21} > 18\cdot(6\cdot 35)^7$; противоречие.

Случай 9. Пусть $L = D_7^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Из леммы 2.2 следует, что

$$\Phi_7(\varepsilon q)\prod_{i=1}^{6}\Phi_i(q^2) = (q^8-1)\cdot\Phi_3(q^2)\Phi_6(q^2)\cdot\Phi_5(q^2)\Phi_7(\varepsilon q)$$
$$\le q^8\cdot 1.0125q^8\cdot 1.125q^8\cdot 1.5q^6 < 2q^{30}.$$

Тогда $\exp(L) \le 7p\cdot\Phi_7(\varepsilon q)\prod\limits_{i=1}^{6}\Phi_i(q^2) \le 14q^{31}$. Значит, если S имеет тип E_7, то получаем неравенство $5q^{31} > u^{48}$; если S имеет тип E_8, то получаем неравенство $7q^{31} > u^{80}$. В частности, $q \ge 5$.

Покажем, что в $\omega(S)$ есть элемент порядка не меньше, чем $q^6/(2d)$, где $d = (q-\varepsilon 1, 7)$. Предположим, что число $k_7(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K|\cdot|\overline{G}/S|$. Тогда в S есть элемент порядка $k_7(\varepsilon q)$ и $k_7(\varepsilon q) \ge q^6/(2d)$, как и требовалось. Пусть $(k_7(\varepsilon q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) \ne 1$. Тогда по лемме 2.4 получаем, что $(k_4(q)k_{12}(q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) = 1$ и поэтому $k_4(q)k_{12}(q) \in \omega(S)$. Поскольку

$$k_4(q)k_{12}(q) = (1/2)\Phi_4(q)\Phi_{12}(q) = (q^6+1)/2 > q^6/(2d),$$

порядок $k_4(q)k_{12}(q)$ требуемый. По лемме 2.8, если S имеет тип E_8, то $q^6/(2d) \leq 2u^8$. Тогда $q^{60} \leq (4d)^{10}u^{80} < 7(4d)^{10}q^{31}$ откуда $q^{29} < 7(4d)^{10}$. Поскольку $q \geq 5$, то $q^{29} \geq 125^{10}/5 > 7(4d)^{10}$; противоречие. Если S имеет тип E_7, то по лемме 2.8 $q^6/(2d) \leq 1.5u^7$. Тогда $q^{41} < (q^6)^{48/7} \leq (3d)^7u^{48} < 5(3d)^7q^{31}$, откуда $q^{10} < 5(3d)^7$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \geq 3$. Если $d = 7$, то $q \geq 13$ и $q^{10} \geq 13^{10} > 5(21)^7$; противоречие.

Случай 10. Пусть $L = B_7(q)$ или $L = D_8(q)$. Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{7}\Phi_i(q^2) = (q^8-1)\cdot\Phi_3(q^2)\Phi_6(q^2)\cdot\Phi_5(q^2)\Phi_7(q^2)$$
$$< q^8\cdot 1.0125q^8\cdot 1.125q^8\cdot 1.125q^{12} < 1.3q^{36}.$$

Тогда $\exp(L) \leq 8p\cdot\prod_{i=1}^{7}\Phi_i(q^2) \leq 11q^{37}$. Значит, если S имеет тип E_7, то получаем неравенство $4q^{37} > u^{48}$; если S имеет тип E_8, то получаем неравенство $6q^{37} > u^{80}$.

Заметим, что $r_i(q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$ для некоторого $i \in \{7, 14\}$. По лемме 2.4 имеем, что $k_i(q)$ делит $k_j(u)$, где j — целое число такое, что 2 и $r_j(u)$ не смежны в $GK(S)$. Тогда $k_i(q) \geq \frac{q^6}{2d}$, где $d = (q-\tau 1, 7)$ для некоторого $\tau \in \{+,-\}$. С другой стороны, $k_j(u) \leq \Phi_j(u)$, и, следовательно, если S имеет тип E_7, то $k_j(u) \leq 1.5u^6$, иначе $k_j(u) \leq 1.5u^8$. Поскольку $k_i(q) \leq k_j(u)$, получаем неравенства $q^6 < 3du^6$ и $q^6 < 3du^8$ соответственно.

Пусть S имеет тип E_8. Тогда $q^{60} < (3d)^{10}u^{80} \leq 6(3d)^{10}q^{37}$ и, следовательно, $q^{23} < 6(3d)^{10}$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \geq 3$. Если $d = 7$, то $q \geq 13$ и $13^{23} > 6\cdot 21^{10}$; противоречие.

Пусть S имеет тип E_7. Тогда $q^{48} < (3d)^8u^{48} \leq 4(3d)^8q^{37}$ и, следовательно, $q^{11} < 4(3d)^8$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \geq 3$. Если $d = 7$, то $q \geq 13$ и $13^{11} > 4\cdot 21^8$; противоречие.

Случай 11. Пусть $L = L_n(\varepsilon q)$, где $7 \leq n \leq 10$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$. По лемме 2.2 имеем

$$\prod_{i=1}^{10}|\Phi_i(\varepsilon q)| = (q^8-1)\cdot|\Phi_3(\varepsilon q)\Phi_6(\varepsilon q)\cdot\Phi_5(\varepsilon q)\Phi_{10}(\varepsilon q)\cdot\Phi_7(\varepsilon q)\Phi_9(\varepsilon q)|$$
$$\leq q^8\cdot 1.125q^4\cdot 1.125q^8\cdot 1.5q^6\cdot 1.5q^6 < 3q^{32}.$$

Тогда $\exp(L) < 10p\cdot 3q^{32} \leq 30q^{33}$. Из неравенства $\exp(S) \leq \exp(L)$ находим, что если S имеет тип E_8, то справедливо неравенство $u^{80} < 15q^{33}$; если S имеет тип E_7, то получаем неравенство $u^{48} < 10q^{33}$.

Предположим, что S имеет тип E_8. Если $n = 7$, то $r_7(\varepsilon q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$, поэтому по лемме 2.4 $k_7(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Если $n \geq 8$, то пары чисел $\{r_7(\varepsilon q), r_4(q)\}$ и $\{r_7(\varepsilon q), r_8(q)\}$ лежат в кокликах размера 3 в $GK(L)$, поэтому либо $k_7(\varepsilon q) \in \omega(S)$, либо $k_4(q)k_8(q) \in \omega(S)$. Поскольку $k_7(\varepsilon q) \geq \frac{q^6}{2(q-\varepsilon 1,7)} > q^5/2$ и $k_4(q)k_8(q) = (q^2+1)(q^4+1)/4 > q^6/4 > q^5/2$, то в $\omega(S)$ есть элемент не меньше, чем $q^5/2$. Из леммы 2.8 следует, что $q^5 < 4u^8$. Тогда $q^{50} < 4^{10}u^{80} < 15\cdot 4^{10}q^{33}$ и, следовательно, $q^{17} < 15\cdot 4^{10}$, что неверно при $q \geq 3$.

Предположим, что S имеет тип E_7. Заметим, что из неравенства $10q^{33} > u^{48}$ следует, что $q > u$, поэтому $q \geq 5$.

Предположим, что $(k_7(\varepsilon q), |K|\cdot|\overline{G}/S|) = 1$. Тогда $k_7(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Поскольку $k_7(\varepsilon q) > q^6/(2d)$, где $d = (q-\varepsilon 1, 7)$, то из леммы 2.8 получаем, что $q^6 < 3du^7$.

Тогда $q^{41} < (q^6)^{(48/7)} < (3d)^7u^{48} \le 10(3d)^7q^{33}$ и, следовательно, $q^8 < 10(3d)^7$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \ge 5$. Если $d = 7$, то либо $q = 13$, либо $q \ge 25$. При $q \ge 25$ имеем $q^8 \ge 25^8 > 10(21)^7$, поэтому можно предполагать, что $q = 13$. Из неравенства $q^6 < 3du^7$ находим, что $u^7 > 13^6/21 > 2 \cdot 10^5$, поэтому $u \ge 7$. Тогда $10 \cdot 14^{33} > 10q^{33} > u^{48} \ge 7^{48}$. Отсюда следует неверное неравенство $10 \cdot 2^{33} > 7^{15}$; противоречие.

Предположим, что $(k_7(\varepsilon q), |K| \cdot |\overline{G}/S|) > 1$. Поскольку 2 и $r_7(\varepsilon q)$ не смежны в $GK(L_7^\varepsilon(q))$, лемма 2.4 влечет, что $n > 7$. Тогда $(k_4(q)k_8(q), |K| \cdot |\overline{G}/S|) = 1$ и поэтому $k_4(q)k_8(q) \in \omega(S)$. Поскольку $k_4(q)k_8(q) > q^6/4$, то $q^6 < 6u^7$. Тогда $q^{41} < 6^7u^{48} < 10 \cdot 6^7q^{33}$ и, следовательно, $q^8 < 10 \cdot 6^7$. Отсюда находим, что $q = 5$. Выше получили, что $u < q$, следовательно, $u \le 4$. Заметим, что $313 \in R_8(5)$, поэтому $313 \in \pi(S)$. С другой стороны, $e(313, 4) = 78$ и $e(313, 3) = 39$; противоречие.

Случай 12. Пусть $L \in \{B_4(q), B_5(q), B_6(q), D_5^\varepsilon(q), D_6^\varepsilon(q), {}^2D_4(q)\}$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Напомним, что в этом случае q может быть четным, если $L = B_4(q)$. Поскольку $|\pi(L)| \ge |\pi(S)| \ge 14$, получаем, что $q \ge 3$.

По лемме 2.2 имеем

$$\prod_{i=1}^{6} \Phi_i(q^2) = (q^8 - 1)\Phi_3(q^2)\Phi_6(q^2)\Phi_5(q^2) \le q^8 \cdot 1.0125q^8 \cdot 1.125q^8 < 1.2q^{24}.$$

Из леммы 2.7 следует, что $\exp(L) < 12p \cdot 1.2q^{24} \le 14.4q^{25}$. Значит, если S имеет тип E_8, то $7.2q^{25} > u^{80}$; если S имеет тип E_7, то $4.8q^{25} > u^{48}$. Поскольку $u \ge 2$, то $q > 3$.

Заметим, что $r_i(q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$ для некоторого $i \in \{5, 8, 10, 12\}$. По лемме 2.4 имеем, что $k_i(q)$ делит $k_j(u)$, где j — целое число такое, что 2 и $r_j(u)$ не смежны в $GK(S)$. Из леммы 2.2 следует, что $k_i(q) \ge \frac{q^4}{2d}$, где $d = (q - \tau 1, 5)$ для некоторого $\tau \in \{+, -\}$. С другой стороны, $k_j(u) \le \Phi_j(u)$, и, следовательно, если S имеет тип E_7, то $k_j(u) \le 1.5u^6$, иначе $k_j(u) \le 1.5u^8$. Поскольку $k_i(q) \le k_j(u)$, получаем неравенства $q^4 < 3du^6$ и $q^4 < 3du^8$ соответственно.

Если S имеет тип E_8, то $q^{40} < (3d)^{10}u^{80} < 7.2 \cdot (3d)^{10}q^{25}$, откуда находим, что $q^{15} < 7.2 \cdot (3d)^{10}$. Если $d = 1$, то $q^{15} > 7.2 \cdot 3^{10}$ при $q \ge 3$, так что этот случай невозможен. Если $d = 5$, то $(q - \tau 1, 5) = 5$, откуда либо $q = 4$, либо $q \ge 9$. Поскольку $9^{15} > 7.2 \cdot (15)^{10}$, можно считать, что $q = 4$. В этом случае не выполнено неравенство $7.2q^{25} > u^{80}$; противоречие.

Предположим, что S имеет тип E_7. Сначала рассмотрим случай $q = 4$. Из неравенства $4.8q^{25} > u^{48}$ находим, что $u = 2$. Заметим, что $127 \in R_7(u)$, однако $7 = e(127, 4)$, стало быть, этот случай невозможен. Значит, можно считать, что $q \ge 5$. Поскольку $q^{32} < (3d)^8u^{48} < 4.8 \cdot (3d)^8q^{25}$, то $q^7 < 4.8 \cdot (3d)^8$. Если $d = 1$, то $q^7 > 4.8 \cdot 3^8$ при $q \ge 5$; противоречие. Если $d = 5$, то $(q - \tau 1, 5) = 5$, откуда либо $q = 9, 11, 16, 19$, либо $q \ge 29$. Если $q \ge 29$, то $29^7 > 4.8 \cdot 15^8$; противоречие. Если $q = 16$, то $L = B_4(q)$ и $(k_5(\tau q), |B_4(q)|) = 1$; противоречие. Пусть $q = 11$. Тогда $k_i(q) = k_5(11) = 3221$. Поскольку $1.5u^6 > k_i(q)$, то $u \ge 4$. Если $q = 9$, то $v \ne 3$, поэтому $u \ge 4$. Значит, если $q = 9, 11$, то $u^{48} \ge 4^{48} > 4.8 \cdot 11^{25} \ge 4.8q^{25}$; противоречие.

Рассмотрим оставшийся случай $q = 19$. Из неравенства $24761 = k_{10}(19) < 1.5u^6$ находим, что $u \ge 7$. Тогда $u^{48} \ge 7^{48} > 4.8 \cdot 19^{25}$; противоречие.

Случай 13. Пусть $L = L_n(\varepsilon q)$, где $n = 5$ или $n = 6$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$. Тогда $\exp(L) \le \exp(L_6(\varepsilon q))$. Оценим сверху число $\exp(L_6(\varepsilon q))$. Во-первых, заметим, что $|\Phi_1(\varepsilon q)\Phi_2(\varepsilon q)\Phi_4(\varepsilon q)| = q^4 - 1 < q^4$. Далее, по лемме 2.2 имеем $|\Phi_3(\varepsilon q)\Phi_6(\varepsilon q)| < 1.125q^4$. Наконец, $|\Phi_5(\varepsilon q)| < 1.5q^4$, откуда $\exp(L_6(\varepsilon q)) < 6p \cdot 1.125 \cdot 1.5 \cdot q^{12} < 11q^{13}$. Следовательно, если S имеет тип E_8, то получаем неравенство $u^{80} < 6q^{13}$; если S имеет тип E_7, то получаем неравенство $u^{48} < 4q^{13}$.

Предположим, что $(k_5(\varepsilon q), |K| \cdot |\overline{G}/S|) = 1$, в частности, $k_5(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Тогда $k_5(\varepsilon q) < 2u^8$, если S имеет тип E_8, и $k_5(\varepsilon q) < 1.5u^7$, если S имеет тип E_7. Поскольку $k_5(\varepsilon q) \geq \frac{q^4}{2(q-\varepsilon 1,5)}$, то $q^4 < 4(q-\varepsilon 1,5)u^8$ и $q^4 < 3(q-\varepsilon 1,5)u^7$ соответственно. Тогда $q^{40} < 6 \cdot 4^{10}(q-\varepsilon 1,5)^{10}q^{13}$ либо $q^{27} < 4 \cdot 3^7(q-\varepsilon 1,5)^7q^{13}$. Если $(q-\varepsilon 1,5) = 1$, то получаем противоречие с $q \geq 3$; если $(q-\varepsilon 1,5) = 5$, то получаем противоречие с $q > 5$.

Предположим, что $(k_5(\varepsilon q), |K| \cdot |\overline{G}/S|) > 1$. Поскольку 2 и $r_5(\varepsilon q)$ не смежны в $GK\big(L_5^\varepsilon(q)\big)$, получаем, что $n = 6$. Из леммы 2.4 следует, что $k_3(\varepsilon q)k_6(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Заметим, что $k_3(\varepsilon q)k_6(\varepsilon q) = (q^4+q^2+1)/d > q^4/d$, где либо $d = 1$, либо $d = 3$ и $q \geq 5$.

Рассуждая, как в предыдущем абзаце, имеем неравенство $q^{40} < 6 \cdot 2^{10}d^{10}q^{13}$ либо $q^{27} < 4 \cdot 1.5^7d^7q^{13}$. Если $d = 1$, то получаем противоречие с $q \geq 3$; если $d = 3$, то получаем противоречие с $q \geq 5$.

Поскольку все возможные случаи разобраны, теорема доказана.

Благодарность. Автор выражает благодарность М. А. Гречкосеевой за ценные комментарии к рукописи, а также признательность рецензенту, ценные замечания которого помогли улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.

2. *Горшков И. Б.* Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 57–63.

3. *Mazurov V., Shi W.* A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 3. P. 285–288.

4. *Васильев А. В., Старолетов А. М.* Почти распознаваемость по спектру простых исключительных групп лиева типа // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 6. С. 669–692.

5. *Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V.* On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 5. P. 741–759.

6. *Staroletov A.* On almost recognizability by spectrum of simple classical groups // Int. J. Group Theory. 2017. V. 6, N 4. P. 7–33.

7. *Bang A. S.* Taltheoretiske Undersgelser // Tidsskrift Math. 1886. V. 4, N 5. P. 70–80, 130–137.

8. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.

9. *Roitman M.* On Zsigmondy primes // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125, N 7. P. 1913–1919.

10. *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2001.

11. *Vasil′ev A. V.* On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 318–374.

12. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.

13. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.

14. *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V., Zvezdina M. A.* Recognition of symplectic and orthogonal groups of small dimensions by spectrum // J. Algebra Appl. 2019. V. 18, N 12. P. 1950230, 33 pp.

15. *Testerman D. M.* A_1-type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups // J. Algebra. 1995. V. 177, N 1. P. 34–76.

16. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.

17. *Yang N., Grechkoseeva M., Vasil'ev A.* On the nilpotency of the solvable radical of a finite group isospectral to a simple group // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 3. P. 447–470.

18. *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8 // Comm. Algebra. 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.

19. *Заварницин А. В.* Конечные группы с пятикомпонентным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 57–64.

20. *Gorenstein D., Lyons R.* Local structure of finite groups of characteristic 2 type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983. V. 42.

21. *Brandl R., Shi W.* The characterization of $PSL(2,q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. V. 163, N 1. P. 109–114.

22. *Заварницин А. В.* Веса неприводимых $SL_3(q)$-модулей в характеристике определения // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 319–328.

23. *Алеева М. Р.* О композиционных факторах конечных групп с множеством порядков элементов, как у группы $U_3(q)$ // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 249–267.

24. *Гречкосеева М. А., Звездина М. А.* О распознаваемости по спектру групп $L_4(q)$ и $U_4(q)$ // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1300–1330.

25. *Lytkin Y. V.* On finite groups isospectral to the simple groups $S_4(q)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. V. 15. P. 570–584.

26. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^m+1 и 2^m+2 над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.

27. *Васильев А. В., Горшков И. Б., Гречкосеева М. А., Кондратьев А. С., Старолетов А. М.* О распознаваемости по спектру конечных простых групп типов B_n, C_n и ${}^2D_n$ при $n=2^k$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 58–73.

28. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* Распознаваемость по спектру для простых классических групп в характеристике 2 // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1264–1276.

29. *Grechkoseeva M. A. Shi W. J.* On finite groups isospectral to finite simple unitary groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. V. 10. P. 31–37.

30. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.

31. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.

Поступила в редакцию 27 августа 2020 г.
После доработки 6 ноября 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Старолетов Алексей Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
staroletov@math.nsc.ru