УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

М.Е. БОГОВСКИЙ

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 13 IV 1979)

В настоящей работе для ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, с компактными границами $\partial\Omega$ построено в явном виде семейство векторных полей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, которые являются решениями краевой задачи

(1) $\operatorname{div} \mathbf{v} = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega;$

(2) $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}$

из пространства Соболева с полунормой $L_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$, при произвольных заданных $f(x)$ из $L_p(\Omega)$ и $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ из пространства Соболева $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, удовлетворяющих в случае, когда Ω – ограниченная область, необходимому условию согласования

(3) $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,ds,$

где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, внешней по отношению к Ω.

При $p=2$ и $n=2, 3$ вопрос о разрешимости задачи (1), (2) изучался в ([1], [2]).

Для областей Ω с компактными границами из класса C^1 задача (1), (2) с помощью теоремы продолжения ([3]) $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \to W_p^1(\Omega)$ сводится к задаче о построении векторного поля $\mathbf{v}(x) \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$, удовлетворяющего уравнению (1) с произвольной заданной $f(x) \in L_p(\Omega)$, для которой в случае, когда Ω – ограниченная область, выполняется необходимое условие согласования

(4) $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = 0.$

Пространство Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ определяется здесь как пополнение $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ в норме

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathring{W}_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha \mathbf{v}\|_{L_p(\Omega)}.$$

Через $\hat{\mathring{W}}_p^l(\Omega)$ будем в дальнейшем обозначать пополнение в указанной норме пространства $\{\mathbf{v}(x): \ \mathbf{v}(x) \in C^\infty(\Omega) \cap L_p^l(\Omega), \ \operatorname{supp}|\mathbf{v}| \subset \Omega\}$.

Справедливы следующие две основные теоремы настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ представима в виде конечной суммы ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно некоторого содержащегося в ней шара, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$.*

Тогда найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p и Ω, такая, что для любой $f(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющей условию (4), существует векторное поле $\mathbf{v}(x) \in \hat{\mathring{W}}_p^1(\Omega)$, удовлетворяющее уравнению (1) и неравенству

(5) $\|\mathbf{v}\|_{\mathring{W}_p^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\Omega)}.$

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – неограниченная область с компактной границей, для которой найдется такая ограниченная область $\Omega' \supset \mathbf{R}^n \setminus \Omega$ с границей из C^1; что $\Omega \cap \Omega'$ удовлетворяет требованиям предыдущей теоремы, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$.*

Тогда найдется постоянная $C>0$, зависящая только от n, p и Ω, такая, что для любой $f(x)\in L_p(\Omega)$ существует векторное поле $\mathrm{v}(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, удовлетворяющее уравнению (1) *и неравенству* (5).

Доказательство теоремы 2 основывается на теореме 1. При доказательстве теоремы 1 векторное поле $\mathrm{v}(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, удовлетворяющее уравнению (1) и неравенству (5), построено в явном виде. Так, в случае, когда Ω – ограниченная область, звездная относительно открытого шара K, $\overline{K}\subset\subset\Omega$, это векторное поле имеет следующий вид:

$$(6)\qquad \mathrm{v}(x) = \int_\Omega f(y)\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_{|x-y|}^{\infty} q\left(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}\,d\xi\right\}dy,$$

где $q(x)$ – любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbf{R}^n)$ такая, что $\operatorname{supp} q\subset K$ и

$$\int_K q(x)\,dx = 1.$$

Точнее, имеет место

Лемма 1. *Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ – ограниченная область, звездная относительно открытого шара K, $\overline{K}\subset\Omega$, $n\geqslant 2$, $1<p<\infty$.*

Тогда векторное поле (6) *принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, удовлетворяет неравенству* (5) *с постоянной $C>0$, зависящей только от n, p и диаметров Ω и K. Если при этом для $f(x)$ выполнено условие* (4), *то векторное поле* (6) *удовлетворяет также и уравнению* (1).

При доказательстве леммы 1 используется теорема Зигмунда – Кальдерона ([4]) о сингулярных интегралах с переменными ядрами.

Из леммы 1 вытекает справедливость теоремы 1. Действительно, по предположению теоремы 1, область Ω имеет вид

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i,\qquad N\geqslant 1,$$

где для каждого $i=1,\dots,N$ ограниченная область Ω_i звездна относительно некоторого шара K_i, $\overline{K}_i\subset\Omega_i$.

Заметим теперь, что любая функция $f(x)\in L_p(\Omega)$, удовлетворяющая условию (4), может быть представлена в виде

$$(7)\qquad f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x),\qquad x\in\Omega,$$

где для каждого $i=1,\dots,N$ функция $f_i(x)\in L_p(\Omega)$, $\operatorname{supp} f_i\subset\overline{\Omega}_i$ и

$$\int_{\Omega_i} f_i(x)\,dx = 0.$$

Так, например, если $N=2$, то в (7) достаточно положить

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - \dfrac{\chi(x)}{\mu}\displaystyle\int_{\Omega_1} f(x)\,dx, & x\in\Omega_1,\\ 0, & x\in\Omega_2\setminus\Omega_1;\end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - \dfrac{\chi(x)}{\mu}\displaystyle\int_{\Omega_2\setminus\Omega_1} f(x)\,dx, & x\in\Omega_2\setminus\Omega_1,\\ 0, & x\in\Omega_1,\end{cases}$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция области $\Omega_1\cap\Omega_2$, а μ – мера этой области.

Пусть для $i = 1, \ldots, N$ векторные поля $\mathbf{v}_i(x)$ имеют вид (6) с $f_i(x)$ вместо $f(x)$. Продолжив $\mathbf{v}_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, нулем на всю область Ω, положим, сохраняя для продолжения прежнее обозначение,

$$(8) \qquad \mathbf{v}(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i(x), \qquad x \in \Omega.$$

Из (7) и леммы 1 следует тогда, что векторное поле (8) принадлежит пространству $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, удовлетворяет уравнению (1) и неравенству (5), в котором постоянная C зависит лишь от n, p и Ω.

Отметим, что при $N = 1$, т.е. в предположениях леммы 1, зависимость постоянной C от Ω выражается только лишь в зависимости C от отношения диаметра Ω к диаметру K, так что в случае, когда Ω является шаром, постоянная C оказывается не зависящей от его диаметра. Отметим также, что для неограниченных областей, удовлетворяющих требованиям теоремы 2, явный вид решения имеет уже несколько более сложную конструкцию, а чтобы получить в явном виде решение задачи (1), (2), достаточно воспользоваться явным видом продолжения $\mathbf{a}$ с $\partial\Omega$ в Ω.

При более сильных ограничениях на гладкость границы $\partial\Omega$ оказывается справедливой следующая

Теорема 3. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная или неограниченная область с компактной границей, удовлетворяющая равномерному условию конуса* ([3]), $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ – *произвольное целое число.*

Тогда найдется постоянная $C_0 > 0$, зависящая только от n, p, l, Ω, такая, что для любой $f(x) \in \mathring{W}_p^{l-1}(\Omega)$, удовлетворяющей в случае, когда область Ω ограничена, условию (4), *существует векторное поле $\mathbf{v}(x) \in \mathring{W}_p^l(\Omega)$, если Ω ограничена, и $\mathbf{v}(x) \in \hat{W}_p^l(\Omega)$, если Ω неограничена, удовлетворяющее уравнению* (1) *и неравенству*

$$(9) \qquad \|\mathbf{v}\|_{\mathring{W}_p^l(\Omega)} \leqslant C_0 \|f\|_{\mathring{W}_p^{l-1}(\Omega)}.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что для $f(x) \in \mathring{W}_p^{l-1}(\Omega)$ векторное поле (6) принадлежит $\mathring{W}_p^l(\Omega)$.

Замечание 1. Если граница области Ω из класса C^1, то теорема 3 для ограниченных областей будет верна также и при вещественных $l > 1$. Справедливость этого замечания вытекает из известных интерполяционных теорем и явного вида векторного поля (6).

Очевидно, что для $\mathbf{v}(x) \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ и $f(x) \in L_p(\Omega)$, связанных уравнением (1), всякое векторное поле $\mathbf{w}(x) \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ вида $\mathbf{w}(x) = \mathbf{v}(x) + \mathbf{u}(x)$, где $\mathbf{u}(x) \in \mathring{\mathcal{J}}_p^1(\Omega) = \{\mathbf{u}(x) : \mathbf{u}(x) \in \mathring{W}_p^1(\Omega),\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$, будет удовлетворять тому же уравнению $\operatorname{div} \mathbf{w} = f(x)$. Обозначим для $\mathbf{v}(x)$ и $f(x)$, связанных уравнением (1),

$$c_f = \inf_{\vec{u} \in \mathring{\mathcal{J}}_p^1(\Omega)} \|\mathbf{v} + \mathbf{u}\|_{\mathring{W}_p^1(\Omega)}.$$

Тогда из равномерной выпуклости пространства Соболева $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ при $1 < p < \infty$ ([3]) и замкнутости в $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ подпространства $\mathring{\mathcal{J}}_p^1(\Omega)$ вытекает (см. ([5]), стр. 110) справедливость следующего замечания.

Замечание 2. В предположениях теорем 1, 2 для любой $f(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющей в случае, когда Ω ограничена, условию (4), существует и притом единственное решение $\mathbf{v}(x) \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ уравнения (1) такое, что $\|\mathbf{v}\|_{\mathring{W}_p^1(\Omega)} = c_f$.

Сделанное замечание очевидным образом переносится на случай задачи (1), (2), когда $\partial\Omega$ из класса C^1, и на случай $l \geqslant 2$, когда область Ω удовлетворяет равномерному условию конуса ([3]).

Из замечания 2 следует, в частности, что для областей Ω, удовлетворяющих требованиям теорем 1, 2, линейный непрерывный оператор div: $\mathring{W}_p^1(\Omega)/\mathring{\mathcal{J}}_p^1(\Omega) \to L_p(\Omega)$ является гомеоморфизмом фактор-пространства $\mathring{W}_p^1(\Omega)/\mathring{\mathcal{J}}_p^1(\Omega)$ на $L_p(\Omega)$, когда Ω неограничена, и тот же линейный оператор является гомеоморфизмом $\mathring{W}_p^1(\Omega)/\mathring{\mathcal{J}}_p^1(\Omega)$ на $\tilde{L}_p(\Omega) = \{f(x): f(x)\in L_p(\Omega), \int_\Omega f(x)dx = 0\}$, когда Ω ограничена.

Замечание 3. Требования к гладкости границы в теореме 1, вообще говоря, ослабить нельзя. Точнее, если ограниченная область Ω является не менее чем счетной суммой областей, каждая из которых звездна относительно некоторого содержащегося в ней шара, то утверждение теоремы 1 может оказаться уже неверным. Действительно, для всякой ограниченной области Ω из разрешимости в $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ уравнения (1) для любой $f(x)\in L_p(\Omega)$, удовлетворяющей условию (4), следует выполнение для той же области Ω неравенства типа Пуанкаре с $p'=p/(p-1)$

$$(10)\ \| g(x) - \frac{1}{m\Omega}\int_\Omega g(x)dx\|_{L_{p'}(\Omega)} \leqslant C'\|\operatorname{grad} g\|_{L_{p'}(\Omega)}$$

для всех $g(x)\in W_{p'}^1(\Omega)$ с постоянной $C' > 0$, зависящей только от n, p, Ω. Однако известны примеры областей указанного типа (см. ([6]), стр. 494), для которых (10) не может выполняться для всех $g(x)\in W_{p'}^1(\Omega)$.

Замечание 4. Если ограниченная область $\Omega\subset \mathbf{R}^n$, удовлетворяет равномерному условию конуса ([3]), то для любой $f(x)\in \mathring{C}^\infty(\Omega)$, удовлетворяющей условию (4), существует решение $\mathbf{v}(x)\in \mathring{C}^\infty(\Omega)$ уравнения (1) такое, что при любых $n \geqslant 2$, $l \geqslant 1$, $1<p<\infty$ выполняется неравенство (9) с той же, что и в теореме 3, постоянной $C_0 > 0$, зависящей только от n, p, l и Ω.

Отметим также одно важное приложение теоремы 3, которое можно сформулировать как теорему о соленоидальном продолжении векторных полей из $W_p^l(\Omega)$ с сохранением класса. А именно, имеет место

Теорема 4. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, причем сама Ω и область $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ удовлетворяют равномерному условию конуса ([3]), и пусть Ω' – любая область, для которой $\bar{\Omega}\subset\Omega'$, $1<p<\infty$, $n\geqslant 2$, $l\geqslant 1$ – целое число.*

Тогда для любого соленоидального векторного поля $\mathbf{v}(x)\in W_p^l(\Omega)$ найдется соленоидальное векторное поле $\mathbf{w}(x)\in \mathring{W}_p^l(\Omega')$ такое, что $\mathbf{w}(x) = \mathbf{v}(x)$ в Ω и выполняется неравенство

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathring{W}_p^l(\Omega')} \leqslant C_1 \|\mathbf{v}\|_{W_p^l(\Omega)}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n, p, l и Ω, Ω'.

Теорема 4 доказывается с помощью теоремы 3.

Автор выражает искреннюю признательность проф. В.Н. Масленниковой за внимание к работе и ценное обсуждение.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы, Москва

Поступило
24 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *О.А. Ладыженская*, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., "Наука", 1970. [2] *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 59, Л., "Наука", 1976. [3] *R.A. Adams*, Sobolev Spaces, 1975. [4] *A.P. Calderón, A. Zygmund*, Am. J. Math., v. 78 (1956). [5] *A. Wilansky*, Functional Analysis, 1964. [6] *Р. Курант, Д. Гильберт*, Методы математической физики, т. 2, М.-Л., ГИТТЛ, 1951.