А. М. Кузнецов, Метрики видимости на границе на бесконечности комплексной гиперболической плоскости, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2008, том 353, 70–92

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 353, 2008 г.

А. М. Кузнецов

МЕТРИКИ ВИДИМОСТИ НА ГРАНИЦЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Введение

На границе на бесконечности любого гиперболического пространства X имеется канонический класс метрик – метрики видимости, т.е. такие метрики $d = d(\xi, \xi')$, для которых выполнено соотношение

$$c_1 a^{-(\xi|\xi')_o} \leqslant d(\xi, \xi') \leqslant c_2 a^{-(\xi|\xi')_o}$$

для некоторых постоянных c_1, $c_2 > 0$, $a > 1$, фиксированной точки $o \in X$ и любых точек ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$. Здесь $(\xi|\xi')_o$ – произведение Громова точек ξ, ξ' относительно точки o. Легко видеть, что для вещественной гиперболической плоскости – пространства H^2 – (в модели единичного диска) угловая метрика является метрикой видимости. В данной работе мы доказываем, что естественно возникающая метрика Карно–Каратеодори границы на бесконечности комплексной гиперболической плоскости $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ является метрикой видимости для $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$.

Рассмотрим сферу $S_R \subset \mathbb{C}\mathrm{H}^2$ радиуса R с центром в фиксированной точке o. Риманову метрику, индуцированную на сфере S_R из объемлющего пространства $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$, обозначим через ds_R. Применив радиальную проекцию $S_R \to \partial_\infty \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, считаем, что все метрики ds_R заданы на $\partial_\infty \mathbb{C}\mathrm{H}^2$. Нормированный предел этих метрик обозначим через ds_∞:

$$ds_\infty = \lim_{R \to \infty} e^{-R} ds_R.$$

(ds_∞ не является римановой метрикой, поскольку ее значения бесконечны по некоторым направлениям.) Функция ds_∞ порождает метрику Карно–Каратеодори на $\partial_\infty \mathbb{C}\mathrm{H}^2$. Эту метрику мы называем *предельной сферической* и обозначаем через d_∞.

Главный результат работы можно сформулировать так:

Теорема 1.1. *Описанная выше предельная сферическая метрика d_∞ является метрикой видимости на $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$.*

Весьма вероятно, что аналогичный факт верен для любого симметрического пространства некомпактного типа ранга 1. Однако неясно как сформулировать соответствующую гипотезу даже для произвольных кокомпактных многообразий Адамара отрицательной секционной кривизны, не говоря уже о том, как ее доказать. Проблемным является уже первый шаг, т.е. выбор нормировки индуцированной римановой метрики S_R.

Опишем кратко структуру работы. В §2 вводятся обозначения и приводятся сведения, которые используются далее. В §3 описывается вспомогательная конструкция – так называемая предельная орисферическая метрика – и доказывается, что она билипшицево эквивалентна предельной сферической метрике d_∞. Предельная орисферическая метрика используется в заключительном §4, где доказывается теорема 1.1.

2. Обозначения и вспомогательные сведения

2.1. Обозначения. Зафиксируем точку $o \in \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$. Рассмотрим точку $\omega \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$. Пусть γ – натурально параметризованная прямая с началом в точке o, $\gamma(0) = o$, и с $\gamma(-\infty) = \omega$. Для любого числа $R \in \mathbb{R}$ через $H_{\omega,R}$ обозначим орисферу с центром в точке ω, проходящую через точку $\gamma(R)$. Риманову метрику, индуцированную на орисфере $H_{\omega,R}$ из объемлющего пространства $\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, обозначим через $ds_{\omega,R}$, внутреннюю метрику этой орисферы – через $d_{\omega,R}$.

Напомним, что каждая орисфера $H_{\omega,R}$ – это множество уровня функции Буземана:

$$H_{\omega,R} = \{p \in \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 : F_{o,\omega}(p) = R\}.$$

В наших обозначениях функция Буземана $F_{o,\omega}$ может быть записана в виде

$$F_{o,\omega}(p) = \lim_{t\to\infty} (|p\gamma(-t)| - |o\gamma(-t)|),$$

где $|xy|$ – расстояние между точками x и y.

Сферу с центром в точке o радиуса $R > 0$ обозначим через S_R, риманову метрику на ней, индуцированную из объемлющего пространства $\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, – через ds_R, внутреннюю метрику этой сферы – через d_R.

2.2. Сведения о многообразиях Адамара. Пусть M – многообразие Адамара, т.е. односвязное полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Предположим, что секционные кривизны $\mathcal{K}$ многообразия M защемлены: $-b^2 \leqslant \mathcal{K} \leqslant -a^2$, $a > 0$. Фиксируем точку $o \in M$. В работе мы пользуемся следующим результатом из [5]:

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{H}$ – орисфера в M с центром в точке ω; F – функция Буземана относительно ω. Обозначим через $\eta : M \to \mathcal{H}$ проекцию вдоль геодезических, идущих в направлении ω. Пусть γ – геодезический луч с началом на $\mathcal{H}$; μ – его проекция на $\mathcal{H}$, т.е. $\mu = \eta \circ \gamma$. Пусть угол τ между $\dot\gamma(0)$ и $\operatorname{grad}_{\gamma(0)} F$ удовлетворяет условию $\tau \leqslant \pi/2$. Обозначим через l длину кривой μ, через h – $\mathcal{H}$-расстояние между точками $\mu(0)$, $\mu(\infty)$ (т.е. расстояние в индуцированной из M внутренней метрике на орисфере). Тогда*

$$\frac{1}{b}\frac{\sin\tau}{1+\cos\tau} \leqslant h \leqslant l \leqslant \frac{1}{a}\frac{\sin\tau}{1+\cos\tau}.$$

Будем считать, что симметричная метрика пространства $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ нормирована таким образом, что ее секционная кривизна защемлена между -1 и -4: $-4 \leqslant \mathcal{K} \leqslant -1$. Тогда теорему 2.1 можно переформулировать для комплексной гиперболической плоскости следующим образом:

Теорема 2.2. *Фиксируем точку $o \in \mathbb{C}\mathrm{H}^2$ и рассмотрим орисферу $H_{\omega,R}$ с центром в некоторой точке $\omega \in \partial_\infty \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, $R \geqslant 0$. Пусть точка $\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, $\xi \neq \omega$. Точки пересечений луча $o\xi$ и прямой $\omega\xi$ с орисферой $H_{\omega,R}$ обозначим через A и B, соответственно. Угол $\angle_A(o,\omega)$ обозначим через τ. Тогда*

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \leqslant d_{\omega,R}(A,B) \leqslant \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}.$$

Зафиксируем точки $o \in \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, $\omega \in \partial_\infty\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ и прямую $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\mathrm{H}^2$ с $\gamma(0) = o$, $\gamma(-\infty) = \omega$. Известно, что в пространстве $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ можно ввести систему координат $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, в которой риманова метрика этого пространства записывается в виде (см. [3])

$$ds^2 = dt^2 + e^{2t}(dx^2 + dy^2) + e^{4t}(dz - x dy)^2,$$

причем точки прямой γ имеют координаты $\gamma(t) = (t, 0, 0, 0)$. Тогда орисфера $H_{\omega,R}$ задается в этих координатах уравнением $t = R$. Такую систему координат будем называть орисферической (относительно точки ω).

Ясно, что в орисферических координатах риманова метрика орисферы $H_{\omega,R}$ записывается в виде

$$ds^2_{\omega,R} = e^{2R}(dx^2 + dy^2) + e^{4R}(dz - xdy)^2.$$

2.3. Сведения из теории гиперболических пространств. Необходимые нам сведения о гиперболических пространствах можно найти, например, в [1, 2]. Приведем определения основных понятий.

Пусть X – метрическое пространство. Фиксируем базисную точку $o \in X$ и для $x, x' \in X$ положим

$$(x|x')_o = \frac{|xo| + |x'o| - |xx'|}{2},$$

где $|xx'|$ – расстояние между точками x и x'. Эта величина называется произведением Громова. Геодезическое метрическое пространство называется δ-гиперболическим, если для любого треугольника $\triangle xyz \subset X$ из того, что $y' \in xy$, $z' \in xz$ и $|xy'| = |xz'| \leqslant (y|z)_x$, следует, что $|y'z'| \leqslant \delta$.

Если пространство X является δ-гиперболическим, то для любых точек $o, x, y, z \in X$ выполняется следующее неравенство:

$$(x|y)_o \geqslant \min\{(x|z)_o, (y|z)_o\} - \delta.$$

Оно называется δ-неравенством. Верно и обратное: если для некоторой точки $o \in X$ геодезического пространства X и любых точек $x, y, z \in X$ выполняется δ-неравенство, то X – δ'-гиперболическое пространство с постоянной $\delta' > 0$, зависящей только от δ. Это позволяет с помощью δ-неравенства определить свойство пространства быть δ-гиперболическим не только для геодезических, но и для произвольных метрических пространств.

Рассмотрим последовательность точек $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i \in X$. Назовем ее сходящейся на бесконечности, если

$$\lim_{i,j\to\infty} (x_i|x_j)_o = \infty.$$

Как легко видеть, это свойство не зависит от выбора точки o. На множестве таких последовательностей введем отношение эквивалентности: считаем, что $\{x_i\} \sim \{x'_i\}$, если

$$\lim_{i\to\infty}(x_i|x'_i)_o = \infty.$$

Из условия гиперболичности следует, что это – действительно отношение эквивалентности. Граница на бесконечности $\partial_\infty X$ гиперболического пространства X – это множество классов эквивалентности последовательностей, сходящихся на бесконечности.

На этом множестве вводится произведение Громова следующим образом: пусть $\xi, \xi' \in \partial_\infty X$. Тогда

$$(\xi|\xi')_o = \inf \lim_{i,j\to\infty} \inf (x_i|x'_j)_o,$$

где инфимум берется по всем $\{x_i\} \in \xi$, $\{x'_i\} \in \xi'$. При этом для любых точек $\xi, \eta, \zeta \in \partial_\infty X$ выполняется δ-неравенство:

$$(\xi|\eta)_o \geqslant \min((\xi|\zeta)_o, (\eta|\zeta)_o) - \delta.$$

Метрика d на $\partial_\infty X$ называется метрикой видимости, если существуют такие $o \in X$, $a > 1$, $c_1, c_2 > 0$, что

$$c_1 a^{-(\xi|\xi')_o} \leqslant d(\xi, \xi') \leqslant c_2 a^{-(\xi|\xi')_o}$$

для всех ξ, $\xi' \in \partial_\infty X$. Известно, что для любого гиперболического пространства X и любой точки $o \in X$ существуют метрики видимости на границе $\partial_\infty X$ для любого достаточно малого параметра a.

Нам понадобится хорошо известная формула для угла параллельности на (вещественной) гиперболической плоскости H^2:

$$|ab| = -\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

где $ab\xi$ – треугольник в H^2 с вершиной $\xi \in \partial_\infty \mathrm{H}^2$; $\angle ba\xi = \pi/2$; $\angle ab\xi = \alpha$.

2.4. Некоторые вычисления в группе Гейзенберга с метрикой Карно–Каратеодори. Группой Гейзенберга G называется группа матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где x, y, $z \in \mathbb{R}$. Таким образом, группа G отождествляется с координатным пространством $\mathbb{R}^3$. Подстановкой проверяется, что решения уравнения

$$dz = xdy$$

определяют распределение E двумерных касательных плоскостей на G, инвариантное при левых сдвигах группы. Метрикой Карно–Каратеодори на группе Гейзенберга называется метрика, расстояния в которой определяются как инфимум длин допустимых кривых, соединяющих точки; при этом кривая является допустимой, если она кусочно-гладкая и в каждой своей точке касается распределения E. Длина ее касательного вектора считается по евклидовой метрике $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Пример. Найдем расстояние от начала координат o до точки $A = (x, y, xy/2)$ в группе Гейзенберга с описанной выше метрикой Карно–Каратеодори, x, $y \in \mathbb{R}$. Метрику обозначим через d_{KK}. Пусть

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{y}{x}t, \frac{y}{2x}t^2\right).$$

Эта парабола соединяет точки o и A и в каждой своей точке касается распределения E, т.е. является допустимой. Длина любой допустимой кривой равна евклидовой длине ее проекции на плоскость $z = 0$. Но такая проекция параболы – это отрезок, соединяющий начало координат с точкой $(x, y, 0)$. Его евклидова длина равна $\sqrt{x^2 + y^2}$. Поскольку отрезок есть кратчайшая в евклидовой метрике, парабола γ является кратчайшей в метрике d_{KK}. Таким образом,

$$d_{KK}(o, A) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Замечание 1. В условиях примера рассмотрим дополнительную точку $B = (x, y, z)$. Тогда $d_{KK}(o, A) \leqslant d_{KK}(o, B)$.

Левый сдвиг группы Гейзенберга является изометрией относительно метрики Карно–Каратеодори. В вышеописанных координатах x, y, z он имеет вид

$$(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c + ay)$$

для некоторой точки $(a, b, c) \in G$.

Пользуясь орисферическими координатами, определим “левый сдвиг” на всем пространстве $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ формулой

$$L_{abc}(t,x,y,z) = (t, x+a, y+b, z+c+ay).$$

Тогда

$$\begin{aligned} dL_{abc}ds^2 &= dt^2 + e^{2t}(d(x+a)^2 + d(y+b)^2) \\ &\quad + e^{4t}(d(z+c+ay) - (x+a)d(y+b))^2 \\ &= dt^2 + e^{2t}(dx^2+dy^2) + e^{4t}(dz + ady - xdy - ady)^2 \\ &= dt^2 + e^{2t}(dx^2+dy^2) + e^{4t}(dz - xdy)^2 = ds^2. \end{aligned}$$

Таким образом, левый сдвиг является изометрией всего пространства $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$, сохраняющей любую орисферу с центром в точке ω. Тогда он оставляет неподвижной и предельную точку ω.

3. Предельные сферические и орисферические метрики на $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$

3.1. Построение предельных сферической и орисферической метрик. Фиксируем точку $o \in \mathbb{C}\mathrm{H}^2$. Введем в пространстве $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ орисферическую систему координат относительно точки $\omega \in \partial_\infty\mathbb{C}\mathrm{H}^2$. Тогда индуцированная риманова метрика орисферы $H_{\omega,R}$ записывается в виде

$$ds^2_{\omega,R} = e^{2R}(dx^2+dy^2) + e^{4R}(dz - xdy)^2.$$

При разных R метрики орисфер заданы на разных орисферах, однако с помощью естественного изоморфизма мы можем рассматривать все орисферические метрики на проколотой границе $\partial_\infty\mathbb{C}\mathrm{H}^2 \setminus \{\omega\}$. При этом двумерные распределения E, заданные вдоль каждой орисферы уравнением $dz = xdy$, согласованы друг с другом для различных орисфер. Тем самым определено двумерное распределение вдоль $\partial_\infty\mathbb{C}\mathrm{H}^2 \setminus \{\omega\}$, которое мы также обозначаем E.

С учетом сказанного определим функцию ds_ω как предел нормированных орисферических римановых метрик $ds_{\omega,R}$ при $R \to \infty$:

$$ds^2_\omega = \lim_{R\to\infty} e^{-2R} ds^2_{\omega,R}.$$

(Из вида метрики $ds^2_{\omega,R}$ следует, что предел существует.) Функция ds_ω формально определена на всех векторах касательного пространства, однако, как видно из построения, она не является римановой метрикой: в каждой точке $\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 \setminus \{\omega\}$ функция ds_ω конечна для векторов, касающихся распределения E (и считается для них по метрике $ds^2 = dx^2 + dy^2$), и обращается в бесконечность для любого другого вектора.

Обозначим через d_ω внутреннюю метрику границы на бесконечности, порожденную функцией ds_ω. Из описания метрики ds_ω следует, что метрика d_ω является метрикой Карно–Каратеодори.

Нормируем риманову метрику ds^2_R, индуцированную на сфере S_R из объемлющего пространства $\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, множителем e^{-2R}. Несмотря на то, что каждая метрика ds_R задана на своей сфере S_R, с помощью проекции относительно точки o мы будем рассматривать все метрики ds_R на одном и том же пространстве $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$.

Обозначим через ds_∞ предел этих метрик при $R \to \infty$:

$$ds^2_\infty = \lim_{R\to\infty} e^{-2R} ds^2_R.$$

В данном выше выражении все метрики ds_R рассматриваются на пространстве $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, и поэтому предел имеет смысл. Его существование доказывается ниже. Обозначим через d_∞ внутреннюю метрику пространства $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, порожденную функцией ds_∞. Метрика d_∞ называется предельной сферической метрикой.

Под термином “контактная структура” для метрики Карно–Каратеодори мы понимаем распределение E.

Предложение 1. *Предельная сферическая метрика d_∞ является метрикой Карно–Каратеодори. Более того, для любой точки $\omega \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ контактные структуры метрик d_∞ и d_ω совпадают на пространстве $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 \setminus \{\omega\}$.*

Прежде, чем давать доказательство, получим выражения для собственных чисел и собственных векторов оператора кривизны.

В точке $\gamma(t) = (t, 0, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, рассмотрим базис (очевидно, ортогональный) $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Для вектора $v \in T_o H_{\omega,0}$ рассмотрим геодезическую вариацию $\gamma_s(t) = (t, \exp sv)$, где экспонента берется в группе Гейзенберга. Тогда $\gamma_0(0) = o$, и точки вида $\gamma_s(R)$ лежат на орисфере $H_{\omega,R}$. При любом левом сдвиге L группы Гейзенберга каждая геодезическая $\gamma_s(t)$ переходит в геодезическую $\gamma^L_s(t)$, асимптотическую точке ω при $t \to -\infty$, и точки $\gamma_s^L(R)$ лежат на той же орисфере $H_{\omega,R}$.

Из сказанного выше следует, что поля $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$, которые порождают все левые сдвиги, являются касательными геодезической вариации, все геодезические которой асимптотичны точке ω. Поэтому они являются полями Якоби вдоль геодезической γ. Эти поля являются решениями уравнения Якоби

$$\nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial t}V = -\mathcal{R}\left(V, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}$$

с краевыми условиями: $V(0)$ равняется $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ или $\partial/\partial z$ в точке $\gamma(0)$, а $|V(t)| \to 0$ при $t \to -\infty$.

Имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\circ\gamma(t)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\circ\gamma(t)\right| = e^t \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial}{\partial z}\circ\gamma(t)\right| = e^{2t}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Прямым вычислением получаем, что нормированные поля $e^{-t}\cdot\partial/\partial x$, $e^{-t}\cdot\partial/\partial y$, $e^{-2t}\cdot\partial/\partial z$ параллельны вдоль γ:

$$\nabla_{\partial/\partial t}\left(e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \nabla_{\partial/\partial t}\left(e^{-t}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \nabla_{\partial/\partial t}\left(e^{-2t}\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0.$$

Отсюда, решая уравнение Якоби, находим

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} = -4\frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, векторы $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ вдоль γ являются собственными для оператора кривизны с собственными числами 0, -1, -1, -4, соответственно, причем последние три числа являются секционными кривизнами пространства по двумерным направлениям $(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$, $(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$, $(\partial/\partial t, \partial/\partial z)$, соответственно. Это, конечно, согласуется с тем, что пространство $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ – симметрическое, поэтому (см., например, [6]) его тензор кривизны параллелен:

$$\nabla\mathcal{R} \equiv 0.$$

В частности, направление любого собственного вектора оператора кривизны сохраняется при параллельных переносах вдоль кривой γ, и секционные кривизны в плоскостях, порожденных парами векторов $(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$, $(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$, $(\partial/\partial t, \partial/\partial z)$, не меняются.

Рассмотрим поле Якоби X вдоль γ с начальными условиями

$$X(0) = 0, \quad \nabla_{\partial/\partial t} X(0) = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Эти начальные условия гарантируют, что направление этого поля параллельно вдоль γ, и поэтому поле X можно представить в виде $X(t) = x(t)e^{-t} \cdot \partial/\partial x$, где скалярная функция $x(t)$ определяет длину поля в каждой точке. Решая уравнение Якоби с начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, получаем, что $x(t) = \operatorname{sh} t$. Таким образом, в каждой точке $\gamma(t)$ длина векторного поля $X(t)$ равна $\operatorname{sh} t$. Решая уравнения Якоби с аналогичными начальными условиями

$$\nabla_{\partial/\partial t} Y(0) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_{\partial/\partial t} Z(0) = \frac{\partial}{\partial z},$$

находим

$$|X(t)| = |Y(t)| = \operatorname{sh} t, \ |Z(t)| = \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}.$$

Доказательство предложения 1. Обозначим через $\omega' \in \partial_\infty \mathbb{C}\mathrm{H}^2$ точку, противоположную точке ω относительно точки o. Докажем, что контактная структура у метрик d_ω и d_∞ в точке ω' одна и та же.

В любой точке $\gamma(R)$ касательные пространства к сфере S_R и орисфере $H_{\omega,R}$ совпадают. Поэтому базисом касательного пространства к сфере в точке $\gamma(R)$ являются поля Якоби $X(R)$, $Y(R)$, $Z(R)$. Формулы для них уже получены. Нормируем римановы метрики на сферах множителем e^{-2R}. Тогда для координатных полей получаем следующие выражения:

$$|X(t)| = |Y(t)| = \frac{\operatorname{sh} t}{e^{-t}}, \quad |Z(t)| = \frac{\operatorname{sh} 2t}{2e^{-t}}.$$

При $R \to \infty$ получаем, что в наших координатах поля $X(R)$ и $Y(R)$ ограниченны, а поле $Z(R)$ – нет. При нормировке орисферических метрик ровно те же выражения получаются для базисных полей в касательном пространстве орисферы $H_{\omega,R}$ в точке $\gamma(R)$.

Таким образом, контактные структуры предельных сферической и орисферической метрик совпадают в точке ω'.

Рассмотрим теперь произвольную точку $\xi' \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 \setminus \{\omega\}$. Докажем, что контактная структура в точке ξ' у метрик d_∞ и d_ω одна и та же. Рассмотрим точку ξ, противоположную точке ξ' относительно точки o. По доказанному выше контактные структуры метрик d_∞ и d_ξ совпадают в точке ξ'. Согласно [4, лемма 9.6] контактная структура предельных орисферических метрик d_ξ и d_ω одна и та же в любой точке из $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 \setminus \{\omega, \xi\}$. □

3.2. Билипшицева эквивалентность предельных сферической и орисферической метрик. Сначала докажем техническую лемму:

Лемма 3.1. *Фиксируем точку $o \in \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, точку $\omega \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, величину $R > 0$. Пусть $A \in H_{\omega,R}$ – точка на орисфере. Обозначим угол $\angle_o(A,\omega)$ через β, угол $\angle_A(o,\omega)$ – через α. Тогда, если $\beta \geqslant \pi/2$, то $\operatorname{tg}\alpha/2 \leqslant e^{-R}$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\{\omega_i\}$, лежащую на геодезической $o\omega$ и такую, что $\omega_i \to \omega$ при $i \to \infty$.

Для треугольников $oA\omega_i$ рассмотрим их треугольники сравнения, лежащие в пространстве постоянной кривизны -1. Обозначим их через $\widetilde{o}\widetilde{A}\widetilde{\omega}_i$. Углы каждого такого треугольника сравнения не меньше, чем у соответствующего исходного треугольника. Обозначим через α_i угол $\angle_A(o,\omega_i)$, и пусть $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta}_i$ – соответствующие углы треугольника сравнения. Тогда $\widetilde{\beta}_i \geqslant \beta \geqslant \pi/2$, $\widetilde{\alpha}_i \geqslant \alpha_i$. Если бы углы $\widetilde{\beta}_i$ были прямыми, при $i \to \infty$, то углы $\widetilde{\alpha}_i$ сходились бы к углу параллельности α в “бесконечном” треугольнике $\widetilde{o}\widetilde{A}\widetilde{\omega}$, где $\widetilde{\omega}$ – бесконечно удаленная точка в пространстве постоянной кривизны -1, такая, что $\widetilde{\omega}_i \to \omega$. Для этого угла параллельности была бы верна формула $|\widetilde{o}\widetilde{A}| = |oA| = -\ln\operatorname{tg}\widetilde{\alpha}/2$.

В нашем случае углы $\widetilde{\beta}_i$ неострые, и верно неравенство

$$|oA| \leqslant -\ln\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\alpha}}{2}.$$

(Оно легко получается, если вспомнить, как выводится формула для угла параллельности.) Кроме того, $|oA| \geqslant R$ (R – по построению является расстоянием от точки o до орисферы $H_{\omega,R}$, поэтому расстояние от o до произвольной точки $A \in H_{\omega,R}$ не меньше R), $\alpha_i \to \alpha$, $\alpha_i \leqslant \widetilde{\alpha}_i$,

$\widetilde{\alpha}_i \to \widetilde{\alpha}$, поэтому в пределе

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\widetilde{\alpha}}{2} \leqslant e^{-|oA|} \leqslant e^{-R}. \quad \square$$

Следствие 3.1. *Фиксируем точку $o \in \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, точку $\omega \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, величину $R > 0$. Выберем точку $\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ так, чтобы $\angle_o(\omega, \xi) \geqslant \pi/2$. Обозначим через A, B точки пересечения орисферы $H_{\omega,R}$ и геодезических $o\xi$, $\xi\omega$, соответственно. Тогда $d_{\omega,R}(A, B) \leqslant e^{-R}$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1, $\operatorname{tg}\alpha/2 \leqslant e^{-R}$, где α – угол $\angle_A(o, \omega)$. Применяя теорему 2.2, получаем требуемую оценку. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $v \in T_\xi \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ – вектор, касательный к распределению контактной структуры E в точке $\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, причем $\angle_o(\omega, \xi) \geqslant \pi/2$. Тогда*

$$ds_\infty(v) \leqslant ds_\omega(v) \leqslant C ds_\infty(v),$$

где в качестве постоянной C можно взять число e.

Прежде, чем приступать к доказательству, приведем удобное для нас альтернативное определение вектора, лежащего в контактной структуре E метрик d_ω и d_∞ на $\partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$. Опишем представление векторов на бесконечности с помощью полей Якоби.

Рассмотрим точку $\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ и геодезический луч $\gamma \subset \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ в направлении ξ. Поскольку пространство $\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ – симметрическое, собственные векторы оператора кривизны $\mathcal{R}(\cdot, \dot\gamma)\dot\gamma$ параллельны вдоль γ. Ортогональный базис собственных векторов оператора кривизны $\mathcal{R}(\cdot, \dot\gamma(t))\dot\gamma(t)$ с собственным значением -1, т.е. соответствующих секционной кривизне -1, обозначаем через $X(t) = X(\gamma(t))$, $Y(t) = Y(\gamma(t))$. Собственный вектор, соответствующее кривизне -4, обозначаем через $Z(t) = Z(\gamma(t))$. Считаем, что поля X, Y параллельны вдоль γ и что

$$|X(t)| = |Y(t)| = |Z(t)| = 1$$

для всех t.

Заметим, что любое параллельное вдоль геодезической γ поле раскладывается с постоянными коэффициентами по полям X, Y, Z.

Пусть N – поле с параллельными *направлениями* вдоль геодезической γ, лежащее в каждой точке $\gamma(t)$ этой геодезической в двумерном пространстве, образованном полями $X(t)$, $Y(t)$. Положим $N(t) = f(t)N_0(t)$, где $|N_0(t)| = 1$ для всех t. Тогда $|N(t)| = f(t)$.

Рассмотрим другое поле M с параллельными направлениями вдоль геодезической γ. Тогда в каждой точке $\gamma(t)$ этой геодезической поле M представляется в виде $M(t) = g(t)M_0(t)$, где $|M_0(t)| = 1$. Предположим также, что в каждой точке $\gamma(t)$ поле M также лежит в плоскости векторов $X(t)$, $Y(t)$.

Поля M и N назовем *эквивалентными*, если в любой точке $\gamma(t)$ их направления совпадают, $M_0(t) = N_0(t)$, а отношение их длин при $t \to \infty$ стремится к единице: $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 1$.

Например, если $M_0(t) = N_0(t)$ и $f(t) = A \operatorname{sh} t$, $g(t) = Be^t$ при любом t, то поля M и N эквивалентны при $A = 2B$.

Определим отношение эквивалентности для полей вдоль разных геодезических. Пусть ρ – другая геодезическая, идущая в направлении ξ, M – поле с параллельными направлениями вдоль ρ, которое в каждой точке s этой геодезической представляется в виде $M(s) = g(s)M_0(s)$. Пусть $M(s)$ при любом s лежит в плоскости векторов $X(s)$, $Y(s)$, где ортонормированные параллельные вдоль ρ поля X, Y определены, как выше.

Поля N и M назовем эквивалентными, если существует такая естественная параметризация геодезической ρ, при которой расстояние

$$|\rho(t)\gamma(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

и (в этой же параметризации!) поля M и N сходятся. Под сходимостью полей мы понимаем следующее. Обозначим через $M_\gamma(\gamma(t))$ результат параллельного переноса вектора $M(\rho(t))$ в точку $\gamma(t)$ вдоль кратчайшей, соединяющей точки $\rho(t)$ и $\gamma(t)$. Поля M и N назовем сходящимися, если при $t \to \infty$ направления полей $N(\gamma(t))$ и $M_\gamma(\gamma(t))$ сходятся, а отношение их длин стремится к единице.

Под вектором в точке $\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ мы будем понимать класс полей Якоби с параллельными направлениями вдоль геодезических, идущих в направлении ξ, с эквивалентностью, введенной выше. При этом мы рассматриваем только те поля, которые в каждой точке лежат в плоскости векторов X, Y. Заметим, что требование к полю с параллельным направлением быть полем Якоби накладывает дополнительное условие, а именно функция длины f любого поля должна удовлетворять условию $f'' = f$ (для поля вдоль геодезической γ выражение имеет вид $f''(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$). Таким образом, множество векторов в точке ξ – двумерное пространство. (Одна размерность – это направление, из двух констант, возникающих при решении $f'' = f$, в результате эквивалентности тоже остается одна: $Ae^t + Be^{-t} \sim Ae^t$.) Легко видеть, что это пространство – векторное, т.е. отношение эквивалентности согласовано с операциями векторного пространства. Описанное пространство естественно отождествляется со слоем E_ξ контактной структуры в точке ξ.

Доказательство леммы 3.2. Описанное выше представление пространства E_ξ удобно для того, чтобы находить длину его векторов в предельных метриках ds_ω и ds_∞.

Прежде всего, поскольку контактные структуры метрик совпадают и $v \in E_\xi$, длина этого вектора конечна как в метрике ds_ω, так и в метрике ds_∞.

Рассмотрим геодезические $\rho = o\xi$ и $\gamma = \omega\xi$. Параметризуем их длиной дуги следующим образом: пусть $\gamma(t)$ – точка пересечения геодезической $\omega\xi$ и орисферы $H_{\omega,t}$, $\rho(t)$ – точка пересечения геодезической $o\omega$ и сферы S_t. При этом считаем, что $t \geqslant 0$. Для геодезической γ указанная параметризация однозначно распространяется на все $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что расстояние $|\rho(t)\gamma(t)|$ может не стремиться к нулю. ($|\rho(t)\gamma(t)| \to 0$ только если точка $\xi = \omega'$ – противоположная относительно o точке ω, в этом случае $|\rho(t)\gamma(t)| \equiv 0$.)

Рассмотрим орисферу H_ξ с центром в точке ξ, проходящую через точку $\gamma(0)$. Эта орисфера касается орисферы $H_{\omega,0}$ в точке $\gamma(0)$, остальные ее точки лежат вне оришара, ограниченного орисферой $H_{\omega,0}$. Поэтому орисфера H_ξ пересекается с лучом $o\xi$. Обозначим точку пересечения через c, расстояние $|oc|$ – через θ. Тогда $H_\xi = H_{\xi,-\theta}$. Заметим, что $\theta \leqslant 1$. Действительно, $|oc| \leqslant |o\gamma(0)|$, поскольку точка $c \in H_\xi$ является ближайшей к точке o. Применяя следствие 3.1 при $R \to 0$, получаем, что

$$|o\gamma(0)| \leqslant d_{\omega,0}(o, \gamma(0)) \leqslant 1.$$

Докажем, что $\hat{\rho}(t) = \rho(t+\theta)$ – нужная нам параметризация луча $o\xi$, т.е. $|\rho(t+\theta)\gamma(t)| \to 0$ при $t \to \infty$. Пусть $b = \gamma(0)$, $c = \rho(\theta)$, $d = \gamma(t)$, g – точка пересечения луча $o\xi$ и орисферы с центром в точке ξ, проходящей через точку d, $h = \rho(t)$.

Найдем расстояние $|og|$:

$$|og| = |oc| + |cg| = \theta + |bd| = \theta + t,$$

следовательно $g = \rho(t+\theta)$. Поскольку точки $d = \gamma(t)$ и $g = \rho(t+\theta)$ лежат на одной и той же орисфере с центром в ξ, имеем $|\rho(t+\theta)\gamma(t)| \to_{t\to\infty} 0$.

Вдоль геодезических $\gamma(t)$, $\hat{\rho}(t)$ рассмотрим поля Якоби U, V из класса эквивалентности вектора $v \in E_\xi$. Обозначим через $U(t)$ значение поля U в точке $\gamma(t)$, $V(t+\theta)$ – значение поля V в точке $\hat{\rho}(t) = \rho(t+\theta)$.

Фиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$. При достаточно больших t имеем

$$(1-\varepsilon)|V(t+\theta)| \leqslant |U(t)| \leqslant (1+\varepsilon)|V(t+\theta)|.$$

По построению при любом t вектор $U(t)$ касается орисферы с центром в точке ω, проходящей через точку $\gamma(t)$, а вектор $V(t+\theta)$ – сферы с центром в точке o, проходящей через точку $\rho(t+\theta)$. Поэтому

$$ds_{\omega,t}(U(t)) = |U(t)|, \quad ds_{t+\theta}(V(t+\theta)) = |V(t+\theta)|.$$

По определению функции ds_ω и ds_∞ – это нормированные пределы соответствующих метрик, поэтому при достаточно больших t будет выполнено:

$$e^{-t} ds_{\omega,t}(U(t)) - \varepsilon \leqslant ds_\omega(v) \leqslant e^{-t} ds_{\omega,t}(U(t)) + \varepsilon,$$

$$e^{-t-\theta} ds_{t+\theta}(V(t+\theta)) - \varepsilon \leqslant ds_\infty(v) \leqslant e^{-t-\theta} ds_{t+\theta}(V(t+\theta)) + \varepsilon.$$

Осталось объединить представленные выше выкладки:

$$ds_\infty(v) \leqslant e^{-\theta} \frac{1}{1-\varepsilon}(ds_\omega(v) + \varepsilon) + \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} e^{-\theta} ds_\omega(v),$$

$$ds_\omega(v) \leqslant e^{\theta}(1+\varepsilon)(ds_\infty(v) + \varepsilon) + \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} e^{\theta} ds_\infty(v).$$

Таким образом, в пределе $ds_\omega(v) = e^\theta ds_\infty(v)$. Осталось вспомнить, что $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. □

Теорема 3.1. *Метрики d_ω и d_∞ билипшицево эквивалентны на множестве*

$$D = \{\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 : \angle_o(\xi, \omega) \geqslant \pi/2\}.$$

Доказательство. Метрики d_ω и d_∞ – внутренние относительно функций ds_ω^2 и ds_∞^2 соответственно. Применим лемму 3.2. □

Замечание 2. На самом деле предыдущие рассуждения показывают, что $ds_\omega = e^\theta ds_\infty$ на множестве

$$D_\varepsilon = \{\xi \in \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 : \angle_o(\xi, \omega) \geqslant \varepsilon\}$$

для любого $\varepsilon > 0$, где постоянная $\theta = \theta(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Доказательство основной теоремы 1.1

Цель этого раздела – доказать, что предельная сферическая метрика d_∞ является метрикой видимости, т.е. удовлетворяет условию

$$C_1 e^{-(\xi|\xi')_o} \leqslant d_\infty(\xi,\xi') \leqslant C_2 e^{-(\xi|\xi')_o}$$

для некоторых положительных постоянных C_1 и C_2, базовой точки $o \in \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ и всех ξ, $\xi' \in \xi\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$.

Допустим, что это неверно; тогда найдутся такие последовательности $\{\xi_i\}, \{\xi_i'\} \subset \partial_\infty \mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$, что

$$\left|\ln \frac{d_\infty(\xi_i,\xi_i')}{e^{-(\xi_i|\xi_i')_o}}\right| \to \infty.$$

Метрическая топология пространства $(\partial_\infty\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2, d_\infty)$ совпадает со стандартой топологией пространства $\partial_\infty\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2 = S^3$ и поэтому компактна. Не ограничивая общности, считаем, что $\xi_i \to \xi$, $\xi_i' \to \xi'$.

Допустим сначала, что $\xi \neq \xi'$. Тогда

$$d_\infty(\xi_i,\xi_i') \geqslant \varepsilon = \frac{d_\infty(\xi,\xi')}{2}$$

для всех достаточно больших i. С другой стороны, в силу ограниченности метрики d_∞ существует постоянная C такая, что $d_\infty(\xi,\xi') \leqslant C$ для любых ξ, $\xi' \in \partial_\infty\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$.

Оценим величину $e^{-(\xi|\xi')_o}$. Произведение Громова положительно, поэтому $e^{-(\xi|\xi')_o} \leqslant 1$. Тогда $(\xi_i|\xi_i')_o \to \infty$ согласно нашему предположению. Но тогда для предельных величин имеем $(\xi|\xi')_o = \infty$. Это равносильно тому, что $\xi = \xi'$, что противоречит нашему предположению.

Поэтому остается рассмотреть более трудный и интересный случай $\xi = \xi'$. Можем считать, что точки ξ_i и ξ_i' близки, и, пользуясь билипшицевой эквивалентностью, рассматривать вместо сферической метрики d_∞ орисферическую d_ω, где точка $\omega \in \partial_\infty\mathbb{C}\,\mathrm{H}^2$ – диаметрально противоположна ξ относительно точки o. Введем орисферическую систему координат, описанную в §3. Тогда $\xi = (0,0,0)$. Пользуясь тем, что левые сдвиги группы Гейзенберга – это изометрии относительно метрики d_ω, применим левый сдвиг к каждой паре ξ_i,

ξ_i' точек последовательностей так, чтобы все точки последовательности ξ_i' сдвинулись в начало координат, которое по-прежнему обозначаем через ξ. Обозначим через η (сдвинутую) точку ξ_i при большом i. Таким образом, достаточно доказать, что

$$\left|\ln \frac{d_\omega(\xi,\eta)}{e^{-(\xi|\eta)_o}}\right| \leqslant C$$

для некоторой константы $C > 0$ при всех η, достаточно близких к ξ. Для доказательства мы сначала рассмотрим два специальных случая, к которым сводится общий случай.

1. Точка η имеет координаты $\eta = (x, y, xy/2)$. Тогда, согласно [4, p. 34], треугольник $\triangle(\xi, o, \eta)$ находится во вполне геодезическом подпространстве в $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ кривизны -1. Пусть $\tau = \angle_o(\xi, \eta)$. Рассмотрим такие точки $a \in o\xi$, $b \in o\eta$, что $|oa| = |ob| = t$. Пусть $p = |ab|$ – расстояние между точками a и b.

Согласно гиперболической теореме косинусов в пространстве кривизны -1 имеем

$$\operatorname{ch} p = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t \cos\tau.$$

Поскольку расстояние $d_\omega(\eta, \xi)$ мало, то и угол τ мал. Пользуясь разложением $\cos\tau = 1 - \tau^2/2 + o(\tau^2)$, получаем

$$\operatorname{ch} p = 1 + (\tau^2/2 + o(\tau^2)) \operatorname{sh}^2 t,$$

$\operatorname{ch} p = 2\operatorname{sh}^2(p/2) + 1$. Поэтому

$$\operatorname{sh}^2(p/2) = (\tau^2/4 + o(\tau^2)) \operatorname{sh}^2 t.$$

Найдем величину $(\xi|\eta)_o$. Это такое t, при котором расстояние p равно константе гиперболичности δ пространства $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$. То есть

$$\operatorname{sh}(\delta/2) = (\tau/2 + o(\tau)) \operatorname{sh}((\xi|\eta)_o).$$

При η достаточно близком к ξ выполняется:

$$\frac{1}{2} e^{(\xi|\eta)_o} \leqslant \operatorname{sh}((\xi|\eta)_o) \leqslant e^{(\xi|\eta)_o},$$

поэтому

$$\frac{\tau}{8\operatorname{sh}(\delta/2)} \leqslant \frac{\tau/2 + o(\tau)}{2\operatorname{sh}(\delta/2)} \leqslant e^{-(\xi|\eta)_o} \leqslant \frac{\tau/2 + o(\tau)}{\operatorname{sh}(\delta/2)} \leqslant \frac{\tau}{\operatorname{sh}(\delta/2)}.$$

Оценим теперь расстояние $d_\omega(\xi,\eta)$. Используя пример 1, мы видим, что $d_\omega(\xi,\eta)=\sqrt{x^2+y^2}$, где, напомним, $\xi=(0,0,0)$, а $\eta=(x,y,xy/2)$. Парабола из примера 1 (обозначим ее через ρ) является кратчайшей, соединяющей точки ξ и η. Обозначим через ρ' кривую на орисфере $H_{\omega,0}$, заданную в рассматриваемых координатах теми же уравнениями, что и кривая ρ. Вспоминая вид римановой метрики

$$ds^2_{\omega,0}=dx^2+dy^2+(dz-xdy)^2,$$

для которой метрика $d_{\omega,0}$ является внутренней, мы видим, что длина кривой ρ' также есть $L_{\omega,0}(\rho')=\sqrt{x^2+y^2}$. Обозначим через c точку пересечения геодезической $\omega\eta$ и орисферы $H_{\omega,0}$.

Докажем, что кривая ρ' является кратчайшей, соединяющей точки c и o на орисфере $H_{\omega,0}$. Пусть ψ – кратчайшая на орисфере $H_{\omega,0}$ относительно метрики $d_{\omega,0}$, соединяющая точки o и c. Спроектируем ее на плоскость $z=0$. Тогда евклидова длина этой проекции не превосходит длины кривой ψ в метрике $d_{\omega,0}$. (Для любого касательного вектора $v=\dot\psi(t)$ квадрат его длины в метрике $d_{\omega,0}$ есть $v_x^2+v_y^2+\sigma^2$, где $\sigma\geqslant 0$, а для проекции – только $v_x^2+v_y^2$.) Но евклидова длина проекции не меньше, чем евклидова длина отрезка, соединяющего концевые точки $(0,0,0)$ и $(x,y,0)$. Последняя равна $\sqrt{x^2+y^2}$. Мы видим, что кривая ρ' является кратчайшей на орисфере $H_{\omega,0}$ и

$$d_{\omega,0}(o,c)=\sqrt{x^2+y^2}=d_\omega(\xi,\eta).$$

Применяя теорему 2.2, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\tau}{2}\leqslant d_{\omega,0}(o,c)\leqslant\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}.$$

Следовательно, при малых углах τ имеем

$$\frac{\tau}{8}\leqslant\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\leqslant d_{\omega,0}(o,c)\leqslant\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\leqslant\tau.$$

Таким образом, в данном частном случае

$$\frac{\operatorname{sh}(\delta/2)}{8}\leqslant\frac{d_\omega(\xi,\eta)}{e^{-(\xi|\eta)_o}}\leqslant 8\operatorname{sh}(\delta/2).$$

Положим $K_1=\max\{8\operatorname{sh}(\delta/2),8/\operatorname{sh}(\delta/2)\}$. Тогда

$$\frac{1}{K_1}\leqslant\frac{d_\omega(\xi,\eta)}{e^{-(\xi|\eta)_o}}\leqslant K_1.$$

2. Пусть теперь $\eta = (0, 0, z)$. Будем действовать так же, как в первом случае. Как следует из работы [4, с. 34], треугольник $\triangle o\xi\eta$ лежит во вполне геодезическом подпространстве постоянной кривизны -4. Гиперболическая теорема косинусов в этом случае имеет вид

$$\operatorname{ch} 2p = \operatorname{ch}^2 2t - \operatorname{sh}^2 2t \cos\tau.$$

С помощью вычислений, аналогичных приведенным выше, получаем

$$\frac{\tau}{8\operatorname{sh}\delta} \leqslant \frac{\tau/2 + o(\tau)}{2\operatorname{sh}\delta} \leqslant e^{-2(\xi|\eta)_o} \leqslant \frac{\tau/2 + o(\tau)}{\operatorname{sh}\delta} \leqslant \frac{\tau}{\operatorname{sh}\delta}.$$

Здесь, как и раньше, τ есть угол $\angle_o(\xi, \eta)$.

Найдем расстояние $d_\omega(\xi, \eta)$. Как мы уже знаем, длина допустимой кривой в метрике d_ω равна евклидовой длине ее проекции на плоскость $z = 0$. Кроме того, известен (и легко проверяется непосредственно) следующий факт: для любой точки на оси z проекция любой допустимой кривой, соединяющей начало координат с этой точкой, ограничивает фигуру ориентированной евклидовой площади, равной z. Поэтому проекция искомой кратчайшей есть окружность длины $2\sqrt{\pi z}$, и мы получаем

$$d_\omega(\xi, \eta) = 2\sqrt{\pi z}.$$

Пусть точка c как и раньше есть проекция точки η на орисферу $H_{\omega,0}$ относительно точки ω. Найдем расстояние $d_{\omega,0}(o, c)$. Точки o и c можно соединить вертикальным отрезком, лежащим на прямой $x = y = 0$. Из вида римановой метрики $ds^2_{\omega,0}$ легко видеть, что вертикальная прямая $x = y = 0$ является геодезической. Поэтому указанный отрезок является кратчайшим при достаточно малых z и, следовательно, $d_{\omega,0}(o, c) = z$, значит

$$d^2_\omega(\xi, \eta) = 4\pi d_{\omega,0}(o, c).$$

Применяя теорему 2.2, при достаточно малых углах τ получаем

$$\frac{\tau}{8} \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \leqslant d_{\omega,0}(o, c) \leqslant \operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \leqslant \tau.$$

Таким образом, в данном частном случае имеем:

$$\frac{1}{2}\pi\operatorname{sh}\delta \leqslant \frac{d^2_\omega(\xi, \eta)}{e^{-2(\xi|\eta)_o}} \leqslant 32\pi\operatorname{sh}\delta.$$

Положим
$$K_2 = \max\left\{\sqrt{32\pi \operatorname{sh}\delta}, \sqrt{\frac{2}{\pi \operatorname{sh}\delta}}\right\}.$$
Тогда
$$\frac{1}{K_2} \leqslant \frac{d_\omega(\xi,\eta)}{e^{-(\xi|\eta)_o}} \leqslant K_2.$$

3. Наконец, рассмотрим общий случай $\eta = (x,y,z)$. Введем дополнительную точку $\zeta = (x,y,xy/2)$. Пусть $K = \max(K_1, K_2)$.

Условие
$$\frac{1}{D} \leqslant \frac{A}{B} \leqslant D$$
для краткости будем обозначать $A \asymp_D B$.

Тогда из уже рассмотренных случаев получаем:
$$e^{-(\xi|\zeta)_o} \asymp_K d_\omega(\xi,\zeta);$$
$$e^{-(\zeta|\eta)_o} \asymp_K d_\omega(\zeta,\eta).$$
Чтобы получить второе выражение, достаточно применить левый сдвиг к точкам ζ, η так, чтобы их координаты по осям x и y стали нулевыми.

Лемма 4.1. *Рассмотрим группу Гейзенберга с метрикой Карно–Каратеодори d. Пусть $\xi = (0,0,0)$ – начало координат, $\eta = (x,y,z)$, $\zeta = (x,y,xy/2)$. Тогда $d(\xi,\eta) \geqslant d(\xi,\zeta)$ и $d(\xi,\eta) \geqslant \frac{1}{2}d(\zeta,\eta)$.*

Доказательство. Точки η и ζ лежат на вертикальной (параллельной оси z) прямой, причем расстояние $d(\xi,\zeta) = \sqrt{x^2+y^2}$ реализуется на известной нам параболе из примера 1. Длина в метрике Карно–Каратеодори любой допустимой кривой равна евклидовой длине ее ортогональной проекции на плоскость $z = 0$. Для параболы из примера 1 эта проекция – отрезок. Поэтому расстояние от ξ до любой другой точки на вертикальной прямой, проходящей через точку ζ, не может быть меньше, чем, $d(\xi,\zeta)$. Следовательно, $d(\xi,\eta) \geqslant d(\xi,\zeta)$.

Докажем, что $2d(\xi,\eta) \geqslant d(\zeta,\eta)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $d(\zeta,\eta) \leqslant 2d(\xi,\zeta)$. Тогда $d(\xi,\eta) \geqslant d(\xi,\zeta) \geqslant \frac{1}{2}d(\zeta,\eta)$.

2. Пусть $d(\zeta,\eta) \geqslant 2d(\xi,\zeta)$. Тогда
$$d(\eta,\zeta) \leqslant d(\xi,\eta) + d(\xi,\zeta) \leqslant d(\xi,\eta) + \frac{1}{2}d(\zeta,\eta).$$

Поэтому $\frac{1}{2}d(\zeta,\eta) \leqslant d(\xi,\eta)$. $\square$

Поскольку величины $(\xi|\eta)_o$, $(\xi|\zeta)_o$, $(\zeta|\eta)_o$ образуют δ-тройку, т.е. две наименьшие из них отличаются не более, чем на постоянную гиперболичности δ пространства $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$, то величины $e^{-(\xi|\eta)_o}$, $e^{-(\xi|\zeta)_o}$, $e^{-(\zeta|\eta)_o}$ образуют мультипликативную e^δ-тройку. Это значит, что две наибольшие из них отличаются не более, чем в $D = e^\delta$ раз.

Для доказательства теоремы осталось рассмотреть три случая.

1. Пусть $e^{-(\xi|\eta)_o}$ и $e^{-(\zeta|\eta)_o}$ – самые большие в тройке. Тогда

$$e^{-(\xi|\eta)_o} \asymp_D e^{-(\zeta|\eta)_o} \quad \text{и} \quad e^{-(\xi|\zeta)_o} \leqslant e^{-(\xi|\eta)_o}, \quad e^{-(\xi|\zeta)_o} \leqslant e^{-(\zeta|\eta)_o}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} d_\omega(\xi,\eta) &\leqslant d_\omega(\xi,\zeta) + d_\omega(\zeta,\eta) \\ &\leqslant K(e^{-(\xi|\zeta)_o} + e^{-(\zeta|\eta)_o}) \\ &\leqslant 2Ke^{-(\zeta|\eta)_o} \leqslant 2KDe^{-(\xi|\eta)_o}. \end{aligned}$$

В другую сторону, пользуясь леммой 4.1, получаем

$$d_\omega(\xi,\eta) \geqslant \frac{1}{2}d_\omega(\zeta,\eta) \geqslant \frac{1}{2K}e^{-(\zeta|\eta)_o} \geqslant \frac{1}{2KD}e^{-(\xi|\eta)_o}.$$

2. Пусть величины $e^{-(\xi|\eta)_o}$ и $e^{-(\xi|\zeta)_o}$ – самые большие в тройке. Тогда

$$e^{-(\xi|\eta)_o} \asymp_D e^{-(\xi|\zeta)_o} \quad \text{и} \quad e^{-(\zeta|\eta)_o} \leqslant e^{-(\xi|\eta)_o}, \quad e^{-(\zeta|\eta)_o} \leqslant e^{-(\xi|\zeta)_o}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} d_\omega(\xi,\eta) &\leqslant d_\omega(\xi,\zeta) + d_\omega(\zeta,\eta) \\ &\leqslant K(e^{-(\xi|\zeta)_o} + e^{-(\zeta|\eta)_o}) \\ &\leqslant 2Ke^{-(\xi|\zeta)_o} \leqslant 2KDe^{-(\xi|\eta)_o}. \end{aligned}$$

В другую сторону, пользуясь леммой 4.1, получаем

$$d_\omega(\xi,\eta) \geqslant d_\omega(\xi,\zeta) \geqslant \frac{1}{K}e^{-(\xi|\zeta)_o} \geqslant \frac{1}{KD}e^{-(\xi|\eta)_o}.$$

3. Пусть $e^{-(\xi|\eta)_o}$ – наименьшая величина в тройке. Тогда

$$e^{-(\xi|\zeta)_o} \asymp_D e^{-(\zeta|\eta)_o} \quad \text{и} \quad e^{-(\xi|\eta)_o} \leqslant e^{-(\xi|\zeta)_o}, \quad e^{-(\xi|\eta)_o} \leqslant e^{-(\zeta|\eta)_o}.$$

Значит

$$d(\xi,\eta) \geqslant d(\xi,\zeta) \geqslant \frac{1}{K} e^{-(\xi|\zeta)_o} \geqslant \frac{1}{K} e^{-(\xi|\eta)_o}.$$

Докажем соответствующее неравенство в другую сторону. Обозначим через τ угол $\angle_o(\xi,\eta)$. Рассмотрим точки $a \in o\xi$, $b \in o\eta$ на геодезических $o\xi$ и $o\eta$, равноудаленные от точки o, $|oa| = |ob|$. Выложим треугольник oab на плоскость кривизны -1 так, чтобы угол τ и длины сторон $|oa|$ и $|ob|$ сохранились. Тогда длина стороны $|ab|$ не может увеличиться. Поэтому (соответствующие точки в пространстве кривизны -1 отметим волной)

$$(\widetilde{a}|\widetilde{b})_{\widetilde{o}} \geqslant (a|b)_o.$$

Значит в пределе при $a \to \xi$, $b \to \eta$ получаем:

$$e^{-(\widetilde{\xi}|\widetilde{\eta})_{\widetilde{o}}} \leqslant e^{-(\xi|\eta)_o}.$$

Таким образом,

$$e^{-(\xi|\eta)_o} \geqslant e^{-(\widetilde{\xi}|\widetilde{\eta})_{\widetilde{o}}} \geqslant \frac{\tau}{8\,\mathrm{sh}(\delta/2)}.$$

Пользуясь теоремой 2.2, имеем $d_{\omega,0}(o,c) \leqslant \mathrm{tg}\,\tau/2$, где o, c – точки пересечения орисферы $H_{\omega,0}$ и геодезических $\omega\xi$, $\omega\eta$, соответственно. Точки ξ и η близки, угол τ мал, и мы можем считать, что $\mathrm{tg}\,\tau/2 \leqslant \tau$.

Обозначим через d точку пересечения этой же орисферы $H_{\omega,0}$ и геодезической $\omega\zeta$. Заметим, что $d_{\omega,0}(o,d) \leqslant d_{\omega,0}(o,c)$. Действительно, имеем $d_{\omega,0}(o,d) = \sqrt{x^2+y^2}$. Риманова метрика орисферы $H_{\omega,0}$ в нашей системе координат записывается в виде

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x\,dy)^2.$$

Если бы расстояние $d_{\omega,0}(o,c)$ мерялось по евклидовой метрике $ds^2 = dx^2 + dy^2$, оно было бы равно $\sqrt{x^2+y^2}$. В нашем случае из-за дополнительного слагаемого оно может только увеличиться.

Как уже было показано в случае постоянной кривизны -1, $d_{\omega,0}(o,d) = d_\omega(\xi,\zeta)$. Соберем все неравенства вместе:

$$e^{-(\xi|\eta)_o} \geqslant \frac{\tau}{8\,\mathrm{sh}(\delta/2)} \geqslant \frac{d_{\omega,0}(o,c)}{8\,\mathrm{sh}(\delta/2)} \geqslant \frac{d_\omega(\xi,\zeta)}{8\,\mathrm{sh}(\delta/2)}.$$

Далее,

$$d_\omega(\zeta,\eta) \leqslant Ke^{-(\zeta|\eta)_o} \leqslant KDe^{-(\xi|\zeta)_o} \leqslant K^2Dd_\omega(\xi,\zeta),$$

поэтому

$$d_\omega(\xi,\eta) \leqslant d_\omega(\xi,\zeta) + d_\omega(\zeta,\eta) \leqslant (1+K^2D)d_\omega(\xi,\zeta).$$

Окончательно получаем

$$e^{-(\xi|\eta)_o} \geqslant \frac{d_\omega(\xi,\zeta)}{8\,\mathrm{sh}(\delta/2)} \geqslant \frac{d_\omega(\xi,\eta)}{8(1+K^2D)\,\mathrm{sh}(\delta/2)}.$$

Теорема 1.1 доказана. □

Литература

1. M. Bonk, O. Schramm, *Embeddings of Gromov hyperbolic spaces*, Geom. Funct. Anal. **10**, No. 2 (2000), 266–306.
2. S. Buyalo, V. Schroeder, *Elements of asymptotic geometry* (готовится к печати).
3. P. Pansu, *L^p-cohomology and pinching.* — In: Rigidity in dynamics and geometry. (Cambridge, 2000), Springer, Berlin 2002, pp. 379–389.
4. P. Pansu, *Metriques de Carnot–Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un*, Ann. of Math. **129** (1989), 1–60.
5. E. Heintze, H. Im Hof, *Geometry of horospheres*, J. Diff. Geom. **12** (1977), 481–491.
6. Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982.

Kuznetsov A. M. Visibility metrics on the boundary at infinity for the complex hyperbolic plane.

We construct limiting spherical and horospherical metrics at the boundary at the infinity of the complex hyperbolic plane and prove that the limiting spherical metric is both the Carnot–Caratheodory metric and the visibility metric simultaneously.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: kasheftin@gmail.ru

1 сентября 2006 г.