А. В. Гичук, В. А. Тупчиев, Глобальная разрешимость задачи Коши для системы, описывающей одномерное течение плазмы, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1141–1164

Глобальная разрешимость задачи Коши для системы, описывающей одномерное течение плазмы

А. В. ГИЧУК, В. А. ТУПЧИЕВ
Институт атомной энергетики, г. Обнинск

УДК 517.95

Ключевые слова: задача Коши, функциональное решение.

Аннотация

Рассматривается система, описывающая одномерное течение ионизированного газа. Устанавливается глобальная теорема существования функционального решения задачи Коши для этой системы. Начальные данные — функции произвольной амплитуды.

Abstract

A. V. Gichuk, V. A. Tupchiev, Global solvability of the Cauchy problem for system describing one-dimensional plasma flow, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1141–1164.

The system describing one-dimensional flow of ionized gas is considered. The global existence theorem of functional solution is proved for Cauchy problem in this case. The initial data are functions with an arbitrary amplitude.

Рассмотрим систему электромагнитной газодинамики [1] в лагранжевых координатах:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p_x + \dfrac{1}{c} vjH = 0, \\ \left(w + \dfrac{u^2}{2}\right)_t + (up)_x - vjE = 0, \\ (vH)_t - (uH)_x - cE_x = 0, \\ (vE)_t - (uE)_x - cH_x + 4\pi vj = 0 \end{cases} \tag{1}$$

с уравнениями состояния

$$p = \frac{R\theta}{v}, \quad w = \int\limits_0^\theta C_v(\sigma)\, d\sigma,$$

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 4, с. 1141–1164.

где v — удельный объем, u — скорость, p — давление, w — удельная внутренняя энергия, θ — температура, $C_v(\theta)$ — удельная теплоемкость, E и H — напряженности электрического и магнитного полей, c — скорость света, j — плотность электрического тока, определяемая законом Ома

$$j = \sigma_0 \left(E + \frac{u}{c} H \right),$$

σ_0 — коэффициент электропроводности плазмы.

Примем обозначение

$$U = (v, u, e, vH, vE)^T,$$

где $e = w + u^2/2$ — удельная полная энергия.

Полагая

$$U^0(x) = \big(v^0(x), u^0(x), e^0(x), v^0(x)H^0(x), v^0(x)E^0(x)\big)^T,$$

$$e^0(x) = \int\limits_0^{\theta^0(x)} C_v(\sigma)\, d\sigma + \frac{u^0(x)^2}{2},$$

дополним систему (1) начальными данными

$$U|_{t=0} = U^0(x), \tag{2}$$

которые должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{gathered} \big(v^0(x) - v_\infty, u^0(x), \theta^0(x) - \theta_\infty, H^0(x), E^0(x)\big) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{R}_1) \cap \mathcal{L}_2(\mathbf{R}_1), \\ v^0(x) \geqslant m^0 > 0, \\ \theta^0(x) \geqslant m^0 > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $v_\infty = \lim\limits_{x\to\pm\infty} v^0(x)$, $\theta_\infty = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \theta^0(x)$.

Наша цель — доказать существование функционального решения [2] задачи Коши (1), (2) при некоторых естественных ограничениях на входные данные этой задачи в произвольной полосе

$$\Pi^T = \{(t,x):\ 0 < t \leqslant T,\ |x| < \infty\}.$$

Для неионизированного газа этот вопрос был решен в работах [3, 4]. В работах [5, 6] были рассмотрены изэнтропические пространственные задачи для газовой динамики и магнитной гидродинамики в эйлеровых координатах. В [6] содержится также развернутое определение функционального решения. Теория функциональных решений в наиболее полной форме дана в [7].

Таким образом, наша работа является дальнейшим расширением этого направления исследований задач механики сплошных сред.

1. Введем в систему (1) искусственную вязкость вида εU_{xx} и рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} v_t - u_x = \varepsilon v_{xx}, \\ u_t + p_x + \dfrac{1}{c} vjH = \varepsilon u_{xx}, \\ e_t + (up)_x - vjE = \varepsilon e_{xx}, \\ (vH)_t - (uH)_x - cE_x = \varepsilon (vH)_{xx}, \\ (vE)_t - (uE)_x - cH_x + 4\pi vj = \varepsilon (vE)_{xx}, \end{cases} \tag{4}$$

$$v_x = u = \theta_x = H = E = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm L, \tag{5}$$

$$U|_{t=0} = U^0(x,h), \tag{6}$$

где

$$U^0(x,h) = \int \omega_h(x-y) U^0(y, L-h)\, dy,$$
$$U^0(x, L-h) = [\chi(x+L-h) - \chi(x-L+h)] \left(U^0(x) - U_\infty\right) + U_\infty,$$
$$U_\infty = (v_\infty, 0, \theta_\infty, 0, 0),$$

причем $\chi(x)$ — функция Хевисайда, $\omega_h(y)$ — ядро сглаживания, свертка с которым — операция сглаживания — обладает известными свойствами, h — параметр сглаживания. Далее в тексте наличие у функции индекса h будет означать применение операции сглаживания.

Примем следующие условия $\mathfrak{A}$: функция $C_v(\theta) \in C^2(0,\infty)$ и такова, что

$$C_v(\theta) = \begin{cases} C_v^0 = \mathrm{const} & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ C_v^0 \theta^{-\nu} & \text{при} \quad 2\beta \leqslant \theta, \end{cases}$$

причем

$$\frac{dC_v(\theta)}{d\theta} < 0 \quad \text{и} \quad C_v(\theta) \geqslant C_v^0 \theta^{-\nu} \quad \text{при} \quad \beta \leqslant \theta \leqslant 2\beta,$$

где β — большой параметр и $\beta \geqslant 4 \max\{1, \theta_\infty\}$, а $0 < \nu < \frac{1}{3}$.

Таким образом, сформулирована регуляризированная задача (4)–(6).

Система уравнений (4) допускает обобщенную энтропийную пару

$$\Phi = \frac{u^2}{2\theta_\infty} + R\mathcal{P}(v, v_\infty) + \int\limits_{\theta_\infty}^{\theta} C_v(\sigma) \left(\frac{1}{\theta_\infty} - \frac{1}{\sigma}\right) d\sigma + \frac{v}{8\pi\theta_\infty} \left(E^2 + H^2\right),$$

$$\Psi = \frac{u}{\theta_\infty} (p - p_\infty) - \frac{c}{4\pi\theta_\infty} EH - \frac{u}{8\pi\theta_\infty} \left(E^2 + H^2\right),$$

где $\mathcal{P}(x,y) = \frac{x}{y} - 1 - \ln\frac{x}{y}$, которая на решении задачи (4)–(6) удовлетворяет уравнению

$$\Phi_t + \Psi_x + F = \varepsilon \Phi_{xx} - \varepsilon Q,$$

где

$$F = \frac{vj^2}{\sigma\theta},$$

$$Q = \frac{R}{v^2}v_x^2 + \frac{1}{\theta}u_x^2 + \frac{C_v(\theta)}{\theta^2}\theta_x^2 + \frac{v}{4\pi\theta_\infty}\left(E_x^2 + H_x^2\right).$$

Интегрируя это уравнение по x от $-L$ до L и по t от 0 до t с учетом (5), (6), получаем соотношение

$$\int\limits_{-L}^{L} \Phi\, dx + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-L}^{L} F\, dx\, d\tau + \varepsilon \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-L}^{L} Q\, dx d\tau = \int\limits_{-L}^{L} \Phi\left(U^0(x,h)\right)\, dx \leqslant N_\infty, \qquad (7)$$

$$N_\infty = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(U^0(x)\right)\, dx,$$

поскольку

$$\int\limits_{-L}^{L} \Phi\left(U_h^0(x, L-h)\right)\, dx \leqslant \int\limits_{-L}^{L} \Phi_h\left(U^0(x, L-h)\right)\, dx$$

в силу неравенства Иенсена,

$$\int\limits_{-L}^{L} \Phi_h\left(U^0(x, L-h)\right)\, dx \leqslant \int\limits_{-L}^{L} \Phi\left(U^0(x, L-h)\right)\, dx$$

в силу свойств операции сглаживания, а

$$\int\limits_{-L}^{L} \Phi\left(U^0(x, L-h)\right)\, dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(U^0(x)\right)\, dx,$$

причем последний интеграл сходится в силу условия (3).

Полученное неравенство (7) содержит важные интегральные оценки компонент решения вязкой задачи, которые в дальнейшем будут существенно использоваться.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $\mathfrak{A}$ и начальная функция $U^0(x,h)$ удовлетворяет указанным выше требованиям. Тогда в прямоугольнике*

$$\Pi_L = \{(t,x):\ 0 < t \leqslant T,\ |x| < L\}$$

существует и единственно классическое решение $U(t,x,\alpha)$ задачи (4)–(6) и $v(t,x,\alpha)$, $\theta(t,x,\alpha)$ положительны в Π_L, где $\alpha = \left(\varepsilon, h, L^{-1}, \beta^{-1}\right)$.

Доказательство теоремы проведем по схеме продолжения локального решения, разбираемой, например, в работе [8]. Центральное место в этом подходе занимает получение глобальных априорных оценок решения. С этой целью будем оценивать сверху правые части интегральных соотношений, записанных с использованием функций Грина, для чего понадобятся некоторые интегральные оценки компонент решения, оценки функций Грина и их производных.

Лемма 1.1. *В прямоугольнике* Π_L *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\int\limits_{-L}^{L} u^2\,dx \leqslant 2N_\infty\theta_\infty, \quad \int\limits_{-L}^{L} \mathcal{P}\,dx \leqslant \frac{N_\infty}{R}, \quad \int\limits_{-L}^{L} Y\,dx \leqslant N_\infty, \\ \int\limits_{-L}^{L} v\left(E^2+H^2\right)\,dx \leqslant 8\pi N_\infty\theta_\infty, \quad \int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} Q\,dxd\tau \leqslant \frac{N_\infty}{\varepsilon},\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$Y = \int\limits_{\theta_\infty}^{\theta} C_v(\sigma)\left(\frac{1}{\theta_\infty}-\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma.$$

Доказательство леммы вытекает из основного неравенства (7).

Лемма 1.2. *Функции Грина* $G^0(x,y,t)$ *и* $G(x,y,t)$ *первой и второй краевых задач для уравнения теплопроводности* $z_t = \varepsilon z_{xx}$ *в прямоугольнике* Π_L *удовлетворяют оценкам*

$$\begin{gathered}G^0(x,y,t) \leqslant Z(x-y,t), \\ G(x,y,t) \leqslant c_0 Z^*(x-y,t), \\ \left|G^0_y(x,y,t)\right| \leqslant \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon t}} Z^*(x-y,t), \\ \left|G_y(x,y,t)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} G^*(x,y,t),\end{gathered} \tag{9}$$

где $Z(x-y,t)$ *— фундаментальное решение уравнения теплопроводности* $z_t = \varepsilon z_{xx}$, а

$$Z^* = Z|_{\varepsilon\mapsto 2\varepsilon}, \quad G^* = G|_{\varepsilon\mapsto 2\varepsilon},$$

постоянная c_0 *не зависит от* ε.

Доказательство. Как известно, функции Грина краевых задач для уравнения теплопроводности включают в себя фундаментальное решение $Z(x-y,t)$ уравнения теплопроводности и функцию, имеющую вид потенциала двойного слоя. Свойства последней приводят к первой и второй оценкам (9). Оценки же производных функций Грина для существенно более общего случая приведены в [9].

Теперь, исходя из лемм 1.1 и 1.2, получим оценку удельного объема v. Введем обозначения:

$$M_z(t)=\max_{[-L,L]} z(t,x),\quad m_z(t)=\min_{[-L,L]} z(t,x),$$
$$M_z^0=M_z(0),\quad m_z^0=m_z(0).$$

Лемма 1.3. *В прямоугольнике* Π_L *справедлива оценка*

$$v(t,x)\leqslant \bar v, \tag{10}$$

где

$$\bar v = M_v^0 + 2c_0\sqrt[4]{\frac{2N_\infty^2 T}{\pi\varepsilon^3}}.$$

Доказательство. Запишем интегральное соотношение для первого уравнения системы (4):

$$v(t,x)=\int\limits_{-L}^{L} G(x,y,t)v^0(y)\,dy-\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} G_y(x,y,t-\tau)u(\tau,y)\,dy\,d\tau.$$

Учитывая оценки (7), (8) и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$v\leqslant M_v^0+\frac{c_0}{4\varepsilon\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{1}{t-\tau}\left[\int\limits_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{8\varepsilon(t-\tau)}}d\xi\right]^{1/2}\left(\int\limits_{-L}^{L}u^2\,d\xi\right)^{1/2}d\tau\leqslant$$
$$\leqslant M_v^0+c_0\sqrt[4]{\frac{N_\infty^2}{8\pi\varepsilon^3}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/4}}\leqslant M_v^0+2c_0\sqrt[4]{\frac{2N_\infty^2T}{\pi\varepsilon^3}}.$$

Лемма доказана.

Помимо прочих оценок сверху, необходимо также показать отделенность от нуля температуры и удельного объема. Это делается так же, как в [3].

Лемма 1.4. *В прямоугольнике* Π_L *справедливы следующие оценки снизу:*

$$m_\theta(t)\geqslant \bar m_\theta^0>0,\quad m_v(t)\geqslant \bar m_v^0>0, \tag{11}$$

где

$$\bar m_\theta^0=m_\theta^0\left(\frac{m_v^0}{\bar v}\right)^{\gamma-1},\quad \bar m_v^0=m_v^0\mathrm{e}^{-m_c},$$
$$m_c=\frac{1}{1-\gamma}\left(\ln\frac{2\beta}{m_\theta^0}+\frac{1}{\nu(2\beta)^\nu}\right).$$

Доказательство. Физическая энтропия

$$S=-R\ln\frac{\bar v}{v}-\int\limits_\theta^\infty\frac{C_v(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}$$

удовлетворяет на решении задачи (4)–(6) задаче

$$S_t = \varepsilon S_{xx} + \varepsilon Q_0 + F,$$
$$S_x|_{x=\pm L} = 0,$$
$$S|_{t=0} = S^0(x,h),$$

где

$$Q_0 = \frac{R}{v^2}v_x^2 + \frac{1}{\theta}u_x^2 + \frac{C_v(\theta)}{\theta^2}\theta_x^2.$$

Легко видеть, что $-S(t,x)$ удовлетворяет принципу максимума, откуда

$$-S(t,x) \leqslant \max_{[-L,L]}\left(-S^0(x,h)\right) \leqslant R\ln\frac{\bar v}{m_v^0} + \int\limits_{m_\theta^0}^{\infty}\frac{C_v(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{m_\theta(t)}^{m_\theta^0}\frac{C_v(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} \leqslant R\ln\frac{\bar v}{m_v^0}.$$

Полагая здесь, что $m_\theta^0 < \beta$, приходим к первому неравенству (11).

Далее, так как

$$\frac{1}{R}\int\limits_{m_\theta^0}^{\infty}\frac{C_v(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} \leqslant \frac{C_v^0}{R}\left(\ln\frac{2\beta}{m_\theta^0} + \frac{1}{\nu(2\beta)^\nu}\right) = m_c,$$

то $\ln\frac{\bar v}{m_v(t)} \leqslant \ln\frac{\bar v}{m_v^0} + m_c$ и верна вторая оценка (11). Лемма доказана.

Далее, в леммах 1.5–1.8, получим оставшиеся интегральные оценки. Для этого воспользуемся идеями из [10], развитыми в работах [3, 4].

Лемма 1.5. *В прямоугольнике Π_L выполняется неравенство*

$$M_w(t) \leqslant N_0 J^{1/3}(t) + N_1, \tag{12}$$

где

$$J(t) = \int\limits_{-L}^{L} w_\xi^2(t,\xi)\,d\xi,$$

$$N_0 = 3^{2/3}\left(\frac{1}{2}\left(N_\infty\theta_\infty + 2LC_v^0\theta_\infty\left(1 + \ln\frac{2\beta}{\theta_\infty} + \frac{1}{\nu(2\beta)^\nu}\right)\right)\right)^{1/3}$$
$$N_1 = \frac{1}{2L}\left(N_\infty\theta_\infty + 2LC_v^0\theta_\infty\left(1 + \ln\frac{2\beta}{\theta_\infty} + \frac{1}{\nu(2\beta)^\nu}\right)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi = w(t,x) - \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} w(t,\xi)\,d\xi.$$

Так как

$$\int\limits_{-L}^{L} \psi(t,\xi)\,d\xi = 0,$$

то при каждом t в Π_L существует точка $x_0(t)$, такая что $\psi(t,x_0(t)) = 0$, и поэтому справедливо равенство

$$|\psi|^{3/2} = \frac{3}{2}\int\limits_{x_0}^{x} |\psi|^{1/2}\operatorname{sgn}\psi\psi_\xi\,d\xi,$$

из которого, в свою очередь, вытекает неравенство

$$|\psi|^{3/2} \leqslant \frac{3}{2}\biggl(\int\limits_{-L}^{L}|\psi|\,d\xi\biggr)^{1/2}\biggl(\int\limits_{-L}^{L} w_\xi^2\,d\xi\biggr)^{1/2}. \tag{13}$$

Используя (8), получаем оценку

$$\int\limits_{-L}^{L} w\,dx \leqslant N_\infty\theta_\infty + 2LC_v^0\theta_\infty\left(1 + \ln\frac{2\beta}{\theta_\infty} + \frac{1}{\nu(2\beta)^\nu}\right) = \eta$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{-L}^{L}|\psi|\,d\xi \leqslant 2\int\limits_{-L}^{L} w(t,\xi)\,d\xi \leqslant 2\eta.$$

Теперь, полагая

$$N_0 = 3^{2/3}\Bigl(\frac{\eta}{2}\Bigr)^{1/3}, \quad N_1 = \frac{\eta}{2L},$$

из неравенства (13) получаем (12). Лемма доказана.

Лемма 1.6. *В прямоугольнике Π_L при каждом t*

$$\begin{aligned}&\textit{либо}\ \ M_\theta \leqslant \beta,\\ &\textit{либо}\ \ M_\theta^2(t) \leqslant \mu J(t) + \mu^{\frac{2}{3\nu-1}}N,\end{aligned} \tag{14}$$

где $\mu > 0$ — произвольно малая величина, а N — постоянная, определяемая данными задачи (4)–(6).

Доказательство. В силу условия $\mathfrak{A}$

$$C_v(\theta)\theta \leqslant w, \tag{15}$$

$$w = \begin{cases} C_v^0\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ C_v^0\beta + \int\limits_\beta^\theta C_v(\sigma)\,d\sigma, & \beta \leqslant \theta \leqslant 2\beta, \\ w_0(\beta) + C_v^0\theta^{1-\nu}\dfrac{1}{1-\nu}, & \theta \geqslant 2\beta, \end{cases} \tag{16}$$

где $w_0(\beta) = C_v^0\beta + \int\limits_\beta^{2\beta} C_v(\sigma)\,d\sigma - C_v^0\frac{(2\beta)^{1-\nu}}{1-\nu}$. В силу предположения, что $\beta \geqslant 4$, имеем

$$1 - \frac{\beta^{-\nu}}{1-\nu} > 0, \quad w_0(\beta) \geqslant 0$$

и

$$w \geqslant C_v^0\frac{\theta^{1-\nu}}{1-\nu}, \ \text{ при } \ \theta \geqslant \beta.$$

Таким образом, получаем оценки

$$\theta \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{C_v^0}w & \text{при } 0 \leqslant w \leqslant C_v^0\beta, \\ \zeta(\nu)w^{\frac{1}{1-\nu}} & \text{при } C_v^0\beta \leqslant w, \end{cases} \tag{17}$$

где $\zeta(\nu) = \left(\frac{1-\nu}{C_v^0}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}$, а также оценки в Π_L на решении задачи (4)–(6) при каждом t:

$$\begin{aligned} &\text{либо} \ \ M_\theta(t) \leqslant \beta, \\ &\text{либо} \ \ M_\theta(t) \leqslant \zeta(\nu)M_w^{\frac{1}{1-\nu}}(t), \ \ \text{если} \ \ M_\theta(t) \geqslant \beta. \end{aligned} \tag{18}$$

С другой стороны, с учетом неравенства

$$(a+b)^r \leqslant 2^{r-1}\left(a^r + b^r\right) \ \ \text{при} \ \ r > 1, \ a > 0, \ b > 0,$$

полагая $r = \frac{2}{1-\nu}$, $a = N_0J^{1/3}(t)$, $b = N_1$ и принимая во внимание (12), получаем неравенство

$$M_w^{\frac{2}{1-\nu}}(t) \leqslant 2^{\frac{1+\nu}{1-\nu}}\Big(N_0^{\frac{2}{1-\nu}}J^{\frac{2}{3(1-\nu)}}(t) + N_1^{\frac{2}{1-\nu}}\Big).$$

Применим неравенство Юнга к первому слагаемому в правой части этого неравенства и получим

$$N_0^{\frac{2}{1-\nu}}J^{\frac{2}{3(1-\nu)}} \leqslant \frac{\delta^p}{p}J^{\frac{2p}{3(1-\nu)}} + \frac{\delta^{-q}}{q}N_0^{\frac{2q}{1-\nu}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, δ — произвольно малое положительное число. Теперь, полагая

$$p = \frac{3(1-\nu)}{2} \ \ \text{и} \ \ \mu = \frac{2^{\frac{2}{1-\nu}}}{3(1-\nu)}\zeta^2\delta^{\frac{3(1-\nu)}{2}},$$

получим неравенство

$$M_w^{\frac{2}{1-\nu}}(t) \leqslant \zeta^{-2}\left(\mu J(t) + \mu^{\frac{2}{3\nu-1}} N\right),$$

где N зависит от N_0, N_1 и ν.

Из этого неравенства и второй части (18) получаем неравенство (14). Лемма доказана.

Следствие 1.6.1. *В прямоугольнике* Π_L *справедлива оценка*

$$\int\limits_0^t M_\theta^2(\tau)\,d\tau \leqslant \mu \int\limits_0^t J(\tau)\,d\tau + \left(\mu^{\frac{2}{3\nu-1}} N + \beta^2\right) T. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть A_+ — множество на интервале $(0,t)$, где $M_\theta(t) \geqslant \beta$ и, следовательно, где $M_\theta(t)$ удовлетворяет (14), а $A_- = (0,t)\backslash A_+$ — его дополнение. Тогда справедливы неравенства

$$\int\limits_{A_-} M_\theta^2(\tau)\,d\tau \leqslant \beta^2 T,$$

$$\int\limits_{A_+} M_\theta^2(\tau)\,d\tau \leqslant \mu \int\limits_{A_+} J(\tau)\,d\tau + \mu^{\frac{2}{3\mu-1}} NT,$$

складывая которые получим (19). Следствие доказано.

Лемма 1.7. *В прямоугольнике* Π_L *выполняется неравенство*

$$M_{E^2+H^2}^2 \leqslant \lambda J_1(t) + \frac{N_2}{\lambda^2} + N_3, \tag{20}$$

где

$$J_1(t) = \int\limits_{-L}^{L} \left(E^2 + H^2\right)\left(E_\xi^2 + H_\xi^2\right) d\xi,$$

$\lambda > 0$ *— произвольно малая величина,* N_2, N_3 *— постоянные, определяемые данными задачи (4)–(6).*

Доказательство. Аналогично лемме 1.5 рассмотрим функцию

$$\psi = E^2 + H^2 - \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} \left(E^2 + H^2\right) d\xi$$

и придем к неравенству

$$|\psi|^{3/2} \leqslant \frac{3}{2}\Bigg(\int\limits_{-L}^{L} |\psi|\,d\xi\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{-L}^{L} \left(E^2 + H^2\right)_\xi^2 d\xi\Bigg)^{1/2}. \tag{21}$$

Используя (8), имеем

$$\int\limits_{-L}^{L} |\psi|\, d\xi \leqslant 2 \int\limits_{-L}^{L} \left(E^2+H^2\right)\, d\xi \leqslant \frac{16\pi\theta_\infty N_\infty}{\bar{m}_v^0}.$$

Теперь, полагая

$$a = 3^{2/3}\left(\frac{8\pi\theta_\infty N_\infty}{\bar{m}_v^0}\right)^{1/3}, \quad b = \frac{8\pi\theta_\infty N_\infty}{L\bar{m}_v^0},$$

из неравенства (21) получаем

$$M_{E^2+H^2}(t) \leqslant a\left(\int\limits_{-L}^{L} \left(E^2+H^2\right)_\xi^2 d\xi\right)^{1/3} + b.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и дважды применяя неравенство Юнга, получаем

$$M^2_{E^2+H^2}(t) \leqslant \frac{8a^6}{3\delta^2} + \frac{2\delta}{3}\int\limits_{-L}^{L} \left(E^2+H^2\right)_\xi^2 d\xi + 2b^2,$$

где $\delta > 0$ — произвольно малое положительное число. Далее, полагая

$$\lambda = \frac{8\delta}{3}, \quad N_2 = \frac{32a^6}{27}, \quad N_3 = 2b^2$$

и учитывая, что

$$\left(E^2+H^2\right)_x^2 \leqslant 4\left(E^2E_x^2 + H^2H_x^2 + E^2H_x^2 + H^2E_x^2\right) = 4\left(E^2+H^2\right)\left(E_x^2+H_x^2\right),$$

получаем (20). Лемма доказана.

Лемма 1.8. *В прямоугольнике Π_L справедлива оценка*

$$\int\limits_{-L}^{L}\left(\left(e + \frac{v}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)\right)^2 + u^4 + \left(\frac{v}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)\right)^2\right) dx + \frac{\varepsilon}{6}\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} w_x^2\, dx\, d\tau +$$
$$+ 5\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} u^2u_x^2\, dx\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L}\left(\frac{v}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)\right)_x^2 dx\, d\tau +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} v\left(E_x^2+H_x^2\right)\left(e + \frac{v}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)\right) dx\, d\tau +$$
$$+ 2\sigma_0\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L}\left(\frac{1}{c}H^2vu^4 + \frac{1}{8\pi}v^2E^2\left(E^2+H^2\right)\right) dx\, d\tau \leqslant K, \qquad (22)$$

где K — постоянная, определяемая данными задачи (4)–(6).

Доказательство. Умножая второе уравнение системы (4) на $4u^3$ и интегрируя полученное равенство по x от $-L$ до L, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L} u^4 dx + 4\int\limits_{-L}^{L} p_x u^3 dx + \frac{4\sigma_0}{c}\int\limits_{-L}^{L} u^3 v\left(EH + \frac{u}{c}H^2\right)dx = \\ = 4\varepsilon\int\limits_{-L}^{L} u_{xx}u^3 dx = -12\varepsilon\int\limits_{-L}^{L} u^2 u_x^2\, dx.$$

Используя неравенство Юнга, приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L} u^4 dx + 6\varepsilon\int\limits_{-L}^{L} u^2 u_x^2\, dx + \frac{2\sigma_0}{c}\int\limits_{-L}^{L} vu^4 H^2 dx \leqslant \\ \leqslant \frac{6}{\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L} (pu)^2 dx + \frac{\sigma_0}{c}\int\limits_{-L}^{L} vu^2\left(1+E^4\right)\, dx. \quad (23)$$

Введем обозначения

$$W = e + \frac{v}{8\pi}\left(E^2+H^2\right),$$
$$W_{em} = v\left(E^2+H^2\right).$$

Комбинируя уравнения системы (4), получим следующие вспомогательные уравнения:

$$W_t + \left(up - \frac{u}{8\pi}\left(E^2+H^2\right) - \frac{c}{4\pi}EH\right)_x = \varepsilon W_{xx} - \varepsilon\frac{v}{4\pi}\left(E_x^2+H_x^2\right),$$
$$(W_{em})_t - \left(u\left(E^2+H^2\right)+2cEH\right)_x + 8\pi vjE = \varepsilon(W_{em})_{xx} - \varepsilon 2v\left(E_x^2+H_x^2\right). \quad (24)$$

Умножая первое уравнение (24) на $2W$, интегрируя полученное равенство по x от $-L$ до L и используя неравенство Юнга, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L} W^2 dx + \varepsilon\int\limits_{-L}^{L} W_x^2 dx + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-L}^{L} Wv\left(E_x^2+H_x^2\right)\, dx \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L} (pu)^2 dx + \frac{1}{32\pi^2\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L}\left(u\left(E^2+H^2\right)+2cEH\right)^2 dx.$$

Применяя неравенство Юнга к последнему слагаемому последнего неравенства, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L} W^2 dx + \varepsilon\int\limits_{-L}^{L} W_x^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-L}^{L} Wv\left(E_x^2+H_x^2\right)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L}(pu)^2 dx + \frac{1}{8\pi^2\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L}\left(u^2+c^2\right)\left(E^4+H^4\right)\,dx. \quad (25)$$

Аналогично второе соотношение (24) приводится к неравенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L} W_{em}^2\,dx + \frac{3\varepsilon}{2}\int\limits_{-L}^{L}(W_{em})_x^2\,dx + 4\varepsilon\int\limits_{-L}^{L} W_{em}v\left(E_x^2+H_x^2\right)\,dx +$$
$$+16\pi\sigma_0\int\limits_{-L}^{L} vE^2W_{em}\,dx \leqslant \frac{8}{\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L} u^2\left(E^4+H^4\right)\,dx +$$
$$+\frac{8c^2}{\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L}\left(E^4+H^4\right)\,dx + \frac{8\pi\sigma_0}{c}\int\limits_{-L}^{L} v^2\left(u^2+1\right)\left(E^4+H^4\right)\,dx. \quad (26)$$

Дифференцируя по x выражение для W, получим

$$W_x = w_x + uu_x + \frac{1}{8\pi}(W_{em})_x,$$

откуда следует неравенство

$$w_x^2 \leqslant 3W_x^2 + 3u^2u_x^2 + \frac{3}{64\pi^2}(W_{em})_x^2,$$

интегрируя которое по x от $-L$ до L, имеем

$$\int\limits_{-L}^{L} w_x^2\,dx \leqslant 3\int\limits_{-L}^{L} W_x^2\,dx + 3\int\limits_{-L}^{L} u^2u_x^2\,dx + \frac{3}{64\pi^2}\int\limits_{-L}^{L}(W_{em})_x^2\,dx.$$

Умножая последнее неравенство, (23), (25) и (26) соответственно на $\frac{\varepsilon}{3}$, 1, 1, $\frac{1}{64\pi^2}$ и складывая, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L}\left(W^2+u^4+\left(\frac{1}{8\pi}W_{em}\right)^2\right)dx + 5\varepsilon\int\limits_{-L}^{L} u^2u_x^2\,dx + \frac{\varepsilon}{3}\int\limits_{-L}^{L} w_x^2\,dx +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-L}^{L}\left(\frac{1}{8\pi}W_{em}\right)_x^2 dx + \frac{\varepsilon}{16\pi^2}\int\limits_{-L}^{L} W_{em}v\left(E_x^2+H_x^2\right)\,dx +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-L}^{L} Wv\left(E_x^2+H_x^2\right)\,dx + 2\sigma_0\int\limits_{-L}^{L} v\left(\frac{1}{c}u^4H^2+\frac{1}{8\pi}W_{em}E^2\right)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L}(pu)^2dx + \frac{\sigma_0}{c}\int\limits_{-L}^{L} vu^2\left(1+E^4\right)\,dx +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2\varepsilon}\int\limits_{-L}^{L}\left(u^2+c^2\right)\left(E^4+H^4\right)\,dx + \frac{\sigma_0}{8\pi c}\int\limits_{-L}^{L} v^2\left(u^2+1\right)\left(E^4+H^4\right)\,dx.$$

Используя оценки (8), (10), (11), оценим правую часть этого неравенства:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-L}^{L}\left(W^2+u^4+\left(\frac{1}{8\pi}W_{em}\right)^2\right)\,dx+\ldots\leqslant K_0M_\theta^2(t)+K_1M_{E^2+H^2}^2(t)+K_2, \tag{27}$$

где

$$K_0=\frac{16}{\varepsilon}N_\infty\theta_\infty\left(\frac{R}{\bar{m}_v^0}\right)^2,$$
$$K_1=\frac{N_\infty\theta_\infty+Lc^2}{2\pi^2\varepsilon}+\frac{2N_\infty\theta_\infty\sigma_0\bar{v}}{c}+\frac{\sigma_0\bar{v}^2\left(N_\infty\theta_\infty+L\right)}{4\pi c},$$
$$K_2=\frac{2N_\infty\theta_\infty\sigma_0\bar{v}}{c}.$$

Проинтегрируем (27) по t и, используя оценки (19), (20), получим

$$\int\limits_{-L}^{L}\left(W^2+u^4+\left(\frac{1}{8\pi}W_{em}\right)^2\right)\,dx+5\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L}u^2u_x^2\,dx\,d\tau+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon}{3}-K_0\mu\right)\int\limits_0^t J(\tau)\,d\tau+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L}\left(\frac{1}{8\pi}W_{em}\right)_x^2dx\,d\tau+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon(\bar{m}_v^0)^2}{16\pi^2}-K_1\lambda\right)\int\limits_0^t J_1(\tau)\,d\tau+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L}Wv\left(E_x^2+H_x^2\right)\,dx\,d\tau+$$
$$+2\sigma_0\int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L}v\left(\frac{1}{c}u^4H^2+\frac{1}{8\pi}W_{em}E^2\right)dx\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-L}^{L}\left(W^2+u^4+\left(\frac{1}{8\pi}W_{em}\right)^2\right)\Bigg|_{t=0}dx+$$
$$+K_0\left(\mu^{\frac{2}{3\nu-1}}N+\beta^2\right)T+K_1\left(\frac{N_2}{\lambda^2}+N_3\right)T+K_2T,$$

откуда, положив

$$\mu = \frac{\varepsilon}{6K_0}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon\left(\bar{m}_v^0\right)^2}{16\pi^2 K_1}$$

и обозначив правую часть через K, приходим к (22). Лемма доказана.

И наконец, перейдем к последней лемме, в которой на основе доказанного завершим получение априорных оценок.

Лемма 1.9. *В прямоугольнике Π_L справедливы оценки*

$$|u(t,x)| \leqslant \bar{u}, \quad e(t,x) \leqslant \bar{e}, \quad |v(t,x)E(t,x)| \leqslant \bar{E}, \quad |v(t,x)H(t,x)| \leqslant \bar{H}, \tag{28}$$

где

$$\bar{u} = M^0_{|u|} + \frac{4\sigma_0 \bar{H}^2}{3c^2 \bar{m}_v^0} \sqrt[4]{\frac{T^3}{8\pi\varepsilon}}\, \sqrt{2N_\infty \theta_\infty} + \frac{\sigma_0 T}{c\bar{m}_v^0} \bar{E}\bar{H} + C_2,$$

$$\bar{e} = M_e^0 + \frac{c_0\sigma_0}{\left(\bar{m}_v^0\right)^2} \bar{v}\bar{E}\left(\bar{E} + \frac{1}{c}\bar{u}\bar{H}\right) + C_2 2^{-\frac{1}{4(1-\nu)}}\,\bar{u},$$

$$\bar{E} = M_v^0 M^0_{|E|} + 2c_0 \sqrt[4]{\frac{T}{\pi\varepsilon^3}} \sqrt{K + \frac{2(8\pi)^2 K}{\left(\bar{m}_v^0\right)^2} + 2Lc^4} + \\ + \frac{16\pi\sigma_0\bar{v}}{3} \sqrt[4]{\frac{T^3}{2\pi\varepsilon}} \sqrt{2N_\infty\theta_\infty\left(\frac{4\pi}{\bar{m}_v^0} + \frac{\bar{H}^2}{c^2\left(\bar{m}_v^0\right)^2}\right)},$$

$$\bar{H} = M_v^0 M^0_{|H|} + 2c_0 \sqrt[4]{\frac{T}{\pi\varepsilon^3}} \sqrt{K + \frac{2(8\pi)^2 K}{\left(\bar{m}_v^0\right)^2} + 2Lc^4},$$

$$C_2 = \frac{Rc_0\zeta(\nu)}{\bar{m}_v^0}\left(\frac{2^{5-6\nu}K^2T^{1-2\nu}}{\pi\varepsilon^{3-2\nu}}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)^{3-2\nu}\right)^{\frac{1}{4(1-\nu)}}.$$

Доказательство. Запишем уравнение для vH в интегральной форме:

$$vH = \int\limits_{-L}^{L} G^0 v^0 H^0 dy - \int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} G_y^0 (uH + cE)\,dy\,d\tau.$$

Отсюда с учетом оценки (9), неравенств Коши–Буняковского и Юнга, а также (22) получаем следующую цепочку неравенств:

$$|vH| \leqslant M_v^0 M^0_{|H|} + \frac{c_0}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{8\varepsilon(t-\tau)}} (uH + cE)\,dy \leqslant M_v^0 M^0_{|H|} + \\ + \frac{c_0}{2\sqrt[4]{\pi\varepsilon^3}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/4}} \left[\int\limits_{-L}^{L} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}}\,dy\right]^{1/2} \left(\int\limits_{-L}^{L} (uH + cE)^2 dy\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M_v^0 M_{|H|}^0 + \frac{c_0}{2\sqrt[4]{\pi\varepsilon^3}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/4}} \Biggl(\int\limits_{-L}^{L} \left(u^4 + H^4 + c^4 + E^4\right)\, dy \Biggr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M_v^0 M_{|H|}^0 + 2c_0 \sqrt[4]{\frac{T}{\pi\varepsilon^3}} \sqrt{K + \frac{2(8\pi)^2 K}{(\bar m_v^0)^2} + 2Lc^4}.$$

Из уравнения для vE получаем

$$vE = \int\limits_{-L}^{L} G^0 v^0 E^0 dy - \int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} G_y^0 (uE + cH)\, dy\, d\tau - 4\pi \int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} G^0 vj\, dy\, d\tau.$$

Дальнейшая процедура получения оценки для vE отличается от предыдущей неоднородностью:

$$4\pi \Biggl| \int\limits_0^t\int\limits_{-L}^{L} G^0 vj\, dy\, d\tau \Biggr| \leqslant \frac{2\pi\sigma_0 \bar v}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} \left(E + \frac{u}{c} H\right)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\pi\sigma_0\bar v}{\sqrt[4]{2\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt[4]{t-\tau}} \Biggl(\int\limits_{-L}^{L} \left(E^2 + \frac{\bar H^2}{c^2 (\bar m_v^0)^2} u^2 \right) dy \Biggr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{16\pi\sigma_0\bar v}{3} \sqrt[4]{\frac{T^3}{2\pi\varepsilon}} \sqrt{2N_\infty\theta_\infty \left(\frac{4\pi}{\bar m_v^0} + \frac{\bar H^2}{c^2(\bar m_v^0)^2} \right)}.$$

Теперь перейдем к получению оценки для скорости:

$$|u| \leqslant M_{|u|}^0 + \frac{c_0}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{8\varepsilon(t-\tau)}} p\, dy +$$

$$+ \frac{\sigma_0 \bar H}{2c\bar m_v^0\sqrt{\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}} \left(\bar E + \frac{\bar H}{c} u \right)\, dy \leqslant M_{|u|}^0 +$$

$$+ C_1 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{1}{2r}}} \Biggl[\int\limits_{-L}^{L} \frac{\sqrt r}{\sqrt{8\pi\varepsilon(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{r(x-y)^2}{8\varepsilon(t-\tau)}} dy \Biggr]^{1/r} \Biggl(\int\limits_{-L}^{L} p^q dy \Biggr)^{1/q} + \frac{\sigma_0 T}{c\bar m_v^0} \bar E \bar H +$$

$$+ \frac{\sigma_0 \bar H^2}{c^2 \bar m_v^0 \sqrt[4]{8\pi\varepsilon}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt[4]{t-\tau}} \Biggl[\int\limits_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon(t-\tau)}} dy \Biggr]^{1/2} \Biggl(\int\limits_{-L}^{L} u^2 dy \Biggr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M_{|u|}^0 + C_1 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{1}{2r}}} \Biggl(\int\limits_{-L}^{L} p^q dy \Biggr)^{1/q} + \frac{\sigma_0 T}{c\bar m_v^0} \bar E \bar H + \frac{4\sigma_0 \bar H^2}{3c^2 \bar m_v^0} \sqrt[4]{\frac{T^3}{8\pi\varepsilon}} \sqrt{2N_\infty\theta_\infty},$$

где

$$C_1 = \frac{c_0 2^{\frac{3}{2r}-\frac{3}{2}}}{\left(r\pi^{r-1}\varepsilon^{2r-1}\right)^{1/2r}}, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1, \quad r>1.$$

Выберем $q = 2(1-\nu)$, тогда $r = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$. Теперь с учетом (17) и (22) приходим к оценке

$$\left(\int\limits_{-L}^{L} p^q dy\right)^{1/q} \leqslant \frac{R\zeta(\nu)}{\bar{m}_v^0}\left(\int\limits_{-L}^{L} w^2 dy\right)^{1/q} \leqslant \frac{R\zeta(\nu)}{\bar{m}_v^0} K^{\frac{1}{2(1-\nu)}}. \tag{29}$$

Отсюда сразу следует оценка скорости в (28).

Опираясь на полученные оценки и учитывая (29), несложно получить оценку для удельной энергии e. Лемма доказана.

Доказательство (теоремы 1). Таким образом, получены оценки в норме $C(\Pi_L)$ решения задачи (4)–(6), позволяющие продолжить локальное классическое решение задачи (4)–(6) на весь прямоугольник Π_L. Существование и единственность локального решения устанавливается методом последовательных приближений с помощью оценок (9) сначала для интегральных уравнений, а затем методом тепловых потенциалов доказывается, что полученное решение — классическое решение задачи (4)–(6).

2. В этом разделе мы установим существование функционального решения задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть* $C_v(\theta) = C_v^0 = \mathrm{const}$ *и начальные данные* $U^0(x)$ *удовлетворяют* (3). *Тогда задача Коши* (1), (2) *имеет функциональное решение, определенное в полосе* Π^T *любой высоты* T.

Доказательство. Не останавливаясь здесь на определении функционального решения задачи (1), (2), данном в [2], мы сформулируем только требования к семейству приближенных решений $\{U(t,x,\alpha)\}$, которые обеспечивают сходимость некоторой обобщенной подпоследовательности этого семейства к функциональному решению задачи (1), (2).

Это следующие условия $\mathfrak{B}$.

1. Невязка

$$\delta_\alpha = \left|\varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}_2^+} \mathbf{g}_{xx}(t,x)U(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt + \int\limits_{\mathbf{R}_2^+} g_t^3(t,x)\,\left(w - C_v^0\theta\right)\big|_{(t,x,\alpha)}\,dx\otimes dt\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{\mathbf{R}_1} \mathbf{g}(0,x)\left(U^0(x)-U^0(x,h)\right)\,dx\right|,$$

где $g^i(t,x)$ при $i=1,\dots,5$ — дважды гладкие финитные функции, стремится к нулю при $\alpha\to 0$.

2. Справедливы равномерные оценки:

$$\int_K |U(t,x,\alpha)|\, dx \otimes dt \leqslant C,$$

где K — компакт в $\mathbf{R}_2^+$, а постоянная C не зависит от α.

В качестве множества $\{U(t,x,\alpha)\}$ возьмем семейство классических решений краевой задачи (4)–(6), зависящее от параметра $\alpha = \left(\varepsilon, h, L^{-1}, \beta^{-1}\right)$ и продолженное константой U_∞ на $\Pi^T \setminus \Pi_L$.

Пусть L велико настолько, что имеет место следующая цепочка вложений:

$$\operatorname{supp} \mathbf{g}(t,x) \subset K \subset \Pi_X \subset [0,T] \times [-L,L], \quad \Pi_X = \{(t,x)\colon\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant X\}.$$

Справедливость оценок $\mathfrak{B}_2$ вытекает непосредственно из оценок (8). Действительно,

$$\int_{\Pi_X} |u|\, dx \otimes dt \leqslant \int_0^T \int_{-X}^X |u|\, dx dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left(\int_{-X}^X dx \right)^{1/2} \left(\int_{-X}^X u^2\, dx \right)^{1/2} dt \leqslant 2T\sqrt{X N_\infty \theta_\infty} = C^{(1)}.$$

Выражение для внутренней энергии можно представить в виде

$$w(\theta) = \theta_\infty \left(Y(\theta) + C_v^0 \right) + \theta_\infty \int_{\theta_\infty}^{\theta} \frac{C_v(\sigma)\, d\sigma}{\sigma}.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\theta \leqslant 2\theta_\infty$, тогда

$$w(\theta) = \int_0^\theta C_v(\sigma)\, d\sigma \leqslant \int_0^{2\theta_\infty} C_v(\sigma)\, d\sigma = 2\theta_\infty C_v^0.$$

2) $\theta > 2\theta_\infty$, тогда, поскольку

$$\theta_\infty \int_{\theta_\infty}^{\theta} \frac{C_v(\sigma)\, d\sigma}{\sigma} \leqslant \theta_\infty \int_{\theta_\infty}^{\theta} \frac{C_v(\sigma)\, d\sigma}{2\theta_\infty} \leqslant \frac{1}{2} w(\theta),$$

получим неравенство

$$w(\theta) \leqslant 2\theta_\infty \left(Y(\theta) + C_v^0 \right).$$

Объединяя эти случаи, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Pi_X} w\,dx\otimes dt \leqslant 2\theta_\infty \int\limits_0^T \left(\int\limits_{-L}^{L} Y\,dx + 2XC_v^0 \right) dt \leqslant 2\theta_\infty T\left(N_\infty + 2XC_v^0\right).$$

Окончательно для полной энергии получаем оценку

$$\int\limits_{\Pi_X} e\,dx\otimes dt \leqslant \int\limits_{\Pi_X} w\,dx\otimes dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{-L}^{L} u^2 dxdt \leqslant 3\theta_\infty TN_\infty + 4\theta_\infty TXC_v^0 = C^{(2)}.$$

Далее, оценим v через $\mathcal{P}(v, v_\infty)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi - \ln\xi}{\xi}.$$

Ее производная $\varphi'(\xi) = \ln\xi - 1$, откуда видно, что $\varphi(\xi)$ достигает в точке $\xi = \mathrm{e}$ своего минимального значения $(\mathrm{e}-1)/\mathrm{e}$. Таким образом, имеем:

$$\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \leqslant \frac{\xi - \ln\xi}{\xi}.$$

Отсюда, полагая $\xi = v/v_\infty$, получаем неравенство

$$v \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} v_\infty \left(\mathcal{P}\left(v, v_\infty\right) + 1\right).$$

Интегрируя это неравенство в Π_X, получим оценку для удельного объема:

$$\int\limits_{\Pi_X} v\,dx\otimes dt \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} v_\infty \int\limits_0^T \left(\int\limits_{-L}^{L} \mathcal{P}\,dx + 2X \right) dt \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} v_\infty T \left(\frac{N_\infty}{R} + 2X \right) = C^{(3)}.$$

Осталось получить оценки для vE и vH. Оценим интеграл от vE:

$$\int\limits_{\Pi_X} |vE|\,dx\otimes dt \leqslant \left(\int\limits_{\Pi_X} v\,dx\otimes dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^T\int\limits_{-L}^{L} vE^2\,dx\,dt \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2\pi N_\infty \theta_\infty T C^{(3)}} = C^{(4)}.$$

Интеграл от vH, очевидно, оценивается той же константой.

Положим $C = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} C^{(i)}$, C не зависит от α. Свойство $\mathfrak{B}_2$ доказано.

Перейдем к свойству $\mathfrak{B}_1$. В силу $\mathfrak{B}_2$ и условий, наложенных на функцию $\mathbf{g}$, интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}_2^+} \mathbf{g}_{xx}(t,x) U(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt$$

сходится и, следовательно, соответствующее слагаемое в невязке имеет порядок $O(\varepsilon)$. Последнее же слагаемое

$$\int\limits_{\mathbf{R}_1} \mathbf{g}(0,x)\left(U^0(x) - U^0(x,h)\right)\,dx$$

в силу свойств операции сглаживания имеет порядок $o(h)$.

Оценим оставшееся слагаемое. Заметим, что в силу условия $\mathfrak{A}$ разность $w - C_v^0\theta$ отлична от нуля лишь при $\theta \geqslant \beta$. Таким образом, поскольку

$$\left|w - C_v^0\theta\right| \leqslant 2C_v^0\theta,$$

остается установить, что интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \theta(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt,$$

где $\Omega = \{(t,x)\colon\ \theta(t,x,\alpha) \geqslant \beta,\ (t,x)\in\Pi_X\}$, стремится к нулю при $\alpha\to 0$.

Лемма 2.1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\int\limits_{\Pi_X} \theta(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt \leqslant \frac{C^{(0)}}{\varepsilon}, \tag{30}$$

где $C^{(0)}$ не зависит от α.

Доказательство. Используя неравенство (15), запишем

$$\int\limits_{\Pi_X} \theta\,dx\otimes dt \leqslant \int\limits_{\Pi_X} \frac{w(t,x,\alpha)}{C_v\left(\theta(t,x,\alpha)\right)}\,dx\otimes dt \leqslant \int\limits_0^T \frac{dt}{C_v\left(M_\theta(t)\right)} \int\limits_{-X}^{X} w(t,x,\alpha)\,dx,$$

откуда получаем

$$\int\limits_{\Pi_X} \theta(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt \leqslant 2\theta_\infty\left(N_\infty + 2XC_v^0\right)\int\limits_0^T \frac{dt}{C_v\left(M_\theta(t)\right)}. \tag{31}$$

Введем величину $\theta_0 = \frac{1}{2LC_v^0}\int\limits_{-L}^{L} W^0(x)\,dx$. Заметим, что $\theta_0\to\theta_\infty$ при $L\to\infty$. Покажем, что при достаточно больших L на интервале $(-L,L)$ при каждом t из прямоугольника Π_L найдутся значения x, такие что $\theta(t,x,\alpha)\leqslant\theta_0$. Действительно, в противном случае из неравенства

$$\int\limits_{-L}^{L} W(t,x,\alpha)\,dx \leqslant \int\limits_{-L}^{L} W^0(x)\,dx,$$

получаемого интегрированием первого уравнения (24), с учетом того, что $\beta \geqslant 4\max\{1,\theta_\infty\}$ и θ_0 близко к θ_∞, следует

$$\int_{-L}^{L}\int_{\theta_0}^{\theta} C_v(\sigma)\,d\sigma dx \leqslant 0,$$

что выполняться не может.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(\theta/\theta_0) = \int_1^{\theta/\theta_0} \sqrt{C_v\left(\theta_0\sigma\right)Y\left(\theta_0\sigma\right)}\,\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Если $M_\theta(t)$ принимает такие значения, что

$$M_\theta(t) \geqslant \frac{2\max\{\theta_0,\theta_\infty\}}{a}, \quad a = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}},$$

то в силу сделанного выше замечания существует точка x_0, такая что $\theta\left(t,x_0\right)=\theta_0$. Это означает, что

$$\psi = \int_{x_0}^{x} \psi_\xi d\xi,$$

и поэтому с учетом (8) имеем

$$|\psi| \leqslant \left(\int_{-L}^{L} Y\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{-L}^{L} C_v(\theta)\left(\frac{\theta_\xi}{\theta}\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{N_\infty}\left(\int_{-L}^{L} C_v(\theta)\left(\frac{\theta_\xi}{\theta}\right)^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, при $\theta \geqslant \frac{2\max\{\theta_0,\theta_\infty\}}{a}$ имеем

$$|\psi| \geqslant C_v(\theta)\int_1^{\theta/\theta_0}\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta_\infty}\sigma - 1 - \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_\infty}\sigma\right)}\,\frac{d\sigma}{\sigma} \geqslant C_v(\theta)\int_1^{\theta/\theta_0}\sqrt{\frac{a\theta_0}{\theta_\infty}\sigma - 1}\,\frac{d\sigma}{\sigma} \geqslant$$

$$\geqslant C_v(\theta)\int_{2\theta_\infty/a\theta_0}^{\theta/\theta_0}\sqrt{\frac{a\theta_0}{2\theta_\infty}\sigma}\,\frac{d\sigma}{\sigma} \geqslant \sqrt{\frac{2a}{\theta_{\ \infty}}}C_v(\theta)\sqrt{\theta} - 2C_v^0.$$

Из этих неравенств при $M_\theta(t) \geqslant \frac{2\max\{\theta_0,\theta_\infty\}}{a}$ вытекает неравенство

$$C_v^2\left(M_\theta(t)\right)M_\theta(t) \leqslant \frac{N_\infty\theta_\infty}{a}\int_{-L}^{L} C_v(\theta)\left(\frac{\theta_\xi}{\theta}\right)^2 d\xi + \frac{4\theta_\infty\left(C_v^0\right)^2}{a}. \tag{32}$$

Если последнее неравенство выполняется на множестве B_+, то на $B_- = [0,T]\setminus B_+$ имеем

$$C_v^2\left(M_\theta(t)\right)M_\theta(t) \leqslant \frac{2\left(C_v^0\right)^2\max\{\theta_0,\theta_\infty\}}{a}. \tag{33}$$

Интегрируя (32), (33) по соответствующим множествам и применяя оценку (8), получим

$$\int_0^T C_v^2\left(M_\theta(t)\right) M_\theta(t)\,dt \leqslant \frac{{N_\infty}^2\theta_\infty}{a\varepsilon} + 2\left(C_v^0\right)^2 T\frac{\max\{\theta_0,\theta_\infty\}+2\theta_\infty}{a}. \tag{34}$$

Непосредственно из условий $\mathfrak{A}$ получаем, что

$$\frac{1}{C_v\left(M_\theta\right)} \leqslant \frac{1}{C_v^0}, \quad 0\leqslant M_\theta\leqslant\beta,$$

$$\frac{1}{C_v^3\left(M_\theta\right)} \leqslant \frac{M_\theta}{\left(C_v^0\right)^3}, \quad M_\theta\geqslant\beta.$$

На множестве $A_-=\{t\colon\ M_\theta(t)\leqslant\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ имеем оценку

$$\int_{A_-}\frac{dt}{C_v\left(M_\theta(t)\right)}\leqslant\frac{T}{C_v^0}.$$

На множестве $A_+=[0,T]\setminus A_-$ с учетом (34) находим, что

$$\int_{A_+}\frac{dt}{C_v\left(M_\theta(t)\right)}\leqslant\frac{1}{(C_v^0)^3}\int_{A_+}C_v^2\left(M_\theta(t)\right)M_\theta(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{{N_\infty}^2\theta_\infty}{\left(C_v^0\right)^3 a\varepsilon}+2T\frac{\max\{\theta_0,\theta_\infty\}+2\theta_\infty}{C_v^0 a}.$$

Складывая последние два неравенства, получаем оценку

$$\int_0^T\frac{dt}{C_v\left(M_\theta(t)\right)}\leqslant\frac{{N_\infty}^2\theta_\infty}{\left(C_v^0\right)^3 a\varepsilon}+T\frac{2\max\{\theta_0,\theta_\infty\}+4\theta_\infty+a}{C_v^0 a},$$

из которой с учетом (31) вытекает оценка (30). Лемма доказана.

Следствие 2.1.1. *Пусть Ω — множество, определенное выше. Тогда выполняются неравенства*

$$\operatorname{mes}(\Omega)\leqslant\frac{C^{(0)}}{\varepsilon\beta},\quad\int_\Omega\theta(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{1}{\varepsilon\beta}\right),$$

где $\omega(\eta)$ при $\eta\to0$.

Доказательство. Из (30) вытекает, что

$$\beta\operatorname{mes}(\Omega)\leqslant\int_\Omega\theta(t,x,\alpha)\,dx\otimes dt\leqslant\frac{C^{(0)}}{\varepsilon}$$

и $\mathrm{mes}(\Omega) \to 0$, если $\frac{1}{\varepsilon\beta} \to 0$, но тогда в силу абсолютной непрерывности сходящегося интеграла

$$\varepsilon \int\limits_{\Pi_X} \theta(t, x, \alpha)\, dx \otimes dt \leqslant C^{(0)}$$

имеем

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega} \theta(t, x, \alpha)\, dx \otimes dt \leqslant \omega\left(\frac{1}{\varepsilon\beta}\right)$$

при малых $\frac{1}{\varepsilon\beta}$. Следствие доказано.

Теперь легко получить оценку невязки:

$$\delta_\alpha \leqslant O(\varepsilon) + O(1)\frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{1}{\varepsilon\beta}\right) + o(h).$$

При условии, что $\frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{1}{\varepsilon\beta}\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\beta \to \infty$, невязка $\delta_\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$. Теорема доказана.

Авторы благодарны В. В. Синкину за помощь в работе.

Литература

[1] Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. — М.: ГИФМЛ, 1958.

[2] Галкин В. А. Функциональные решения законов сохранения // ДАН СССР. — 1990. — Т. 310, № 4. — С. 834–839.

[3] Тупчиев В. А. О разрешимости в целом задачи Коши для системы газовой динамики // ДАН РАН. — 1995. — Т. 342, № 6. — С. 747–749.

[4] Тупчиев В. А. Глобальная разрешимость задачи Коши для системы, описывающей одномерное течение газа, лишенного вязкости и теплопроводности // Мат. моделирование. — 1996. — Т. 8, № 8. — С. 51–68.

[5] Тупчиев В. А. О разрешимости в целом задачи Коши для системы уравнений газовой динамики, описывающей баротропное пространственное течение // ЖВМ и МФ. — 1996. — Т. 36, № 7. — С. 161–173.

[6] Тупчиев В. А. Глобальная разрешимость задачи Коши для баротропной системы магнитной гидродинамики // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 10.

[7] Галкин В. А. Теория функциональных решений квазилинейных систем законов сохранения и ее приложения // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — Издательство МГУ, 1997, вып. 20.

[8] Эйдельман С. Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964.

[9] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

[10] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1983.

Статья поступила в редакцию в мае 1997 г.