Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 74—75.

УДК 517.43

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

К. Х. Бойматов

В этой заметке при некоторых ограничениях устанавливается слабая эквивалентность функций распределений собственных чисел и s-чисел компактного оператора. Даны приложения к дифференциальным операторам, спектры которых могут не сгущаться ни к какому лучу.

1. Пусть σ_∞ обозначает класс вполне непрерывных операторов, заданных в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Обозначим через $\lambda_n(A)$, $s_n(A)$ ($n = 1, 2, 3\ldots$) соответственно собственные числа и s-числа оператора $A \in \sigma_\infty$, занумерованные в порядке невозрастания модулей. Напомним, что $s_n^2(A) \leqslant \lambda_n(A^*A)$.

Число θ_T для линейного оператора T с областью определения D_T будет обозначать раствор угла конуса $W_T = \{Tf, f), f \in D_T\}$.

Для оператора $A \in \sigma_\infty$ введем в рассмотрение функции

$$n(r, A) = \sum_{r \mid \lambda_n(A) \mid \geqslant 1} 1, \quad \tilde{n}(r, A) = \sum_{r s_n(A) \geqslant 1} 1.$$

Далее, для $p > 0$ положим $\sigma_p(H) = \{A \in \sigma_\infty(H), \sum s_n^p(A) < +\infty\}$.

2. Теорема 1. *Пусть диссипативный оператор $A \in \sigma_p$, где $p \leqslant \frac{\pi}{2}\theta_A^{-1}$, и выполняется условие $\tilde{n}(2r, A) = O(1)\,\tilde{n}(r, A)$. Тогда $\tilde{n}(r, A) \asymp n(r, A)$.*

Замечание. Пример оператора дробного интегрирования (см. [1], стр. 306) показывает, что условие $A \in \sigma_p$, $p \leqslant \frac{\pi}{2}\theta_A^{-1}$, в теореме 1 нельзя заменить на более слабое предположение $s_n(A) = O(n^{-1/2p})$, $p \leqslant \frac{\pi}{2}\theta_A^{-1}$.

3. Используя результаты § 2 статьи [2], доказательство теоремы сведем к случаю целого p. Без ограничения общности можно считать, что значения формы $z = (Af, f)$ лежат в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2p$. Так как $T = A^p$ — диссипативный оператор, из теоремы 2 статьи [2] вытекает, что $A = T^{1/p}$ в смысле [2]. Применяя еще раз результаты § 2 статьи [2], доказательство сведем к случаю $p = 1$ так, что при этом оператор $B = A^{-1}$ существует и $\operatorname{Re}(B + tE)^{-1} \geqslant 0$, $\operatorname{Im}(B + tE)^{-1} \geqslant 0$ для всех $t > 0$. Из последних неравенств имеем

$$|(B + tE)^{-1}|_1 \leqslant 2\int (t + \lambda)^{-1} dn(\lambda, A).$$

Отсюда и из равномерной ограниченности по $t \in R_1^+$ оператора $(B + tE)(\sqrt{B^*B} + tE)^{-1}$ получаем оценку

$$\int (\lambda + t)^{-1} d\tilde{n}(\lambda, A) \asymp \int (\lambda + t)^{-1} dn(\lambda, A),$$

так как в силу условия $\tilde{n}(2r, A) = O(1)\tilde{n}(r, A)$ из результатов статьи [3] вытекает, что $n(r, A) = O(\tilde{n}(r, A))$. Далее применяются тауберовы теоремы.

4. Пусть T, L — обратимые замкнутые операторы с дискретными спектрами; $T^* = T \geqslant 0$. Положим $N(\lambda, T) = n(\lambda, T^{-1})$, $N(\lambda, L) = n(\lambda, L^{-1})$, $k(\lambda, T) = \tilde{n}(\lambda, T^{-1})$. Предположим, что $D_T = D_L$ и для всех $u \in D_T$ выполняются неравенства

$$c_1 |Tu| \leqslant |Lu| \leqslant c_2 |Tu| \tag{1}$$

с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$. Так как функция $k(\lambda, L)$ совпадает с максимальной размерностью линейных многообразий M таких, что $|Lu| \leqslant \lambda |u|$ для всех $u \in M$, из неравенств (1) вытекают неравенства

$$N(c_2^{-1}\lambda, T) \leqslant k(\lambda, L) \leqslant N(c_1^{-1}\lambda, T).$$

Следовательно, если $N(2\lambda, T) = O(1)N(\lambda, T)$, то $N(\lambda, T) \asymp k(\lambda, L)$. Если к тому

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

же резольвента оператора T принадлежит классу σ_p, где $p \leqslant \frac{\pi}{2}\theta_L^{-1}$, и $\theta_L \leqslant \pi$, из теоремы 1 получим, что $N(\lambda, L) \asymp N(\lambda, T)$.

5. Пусть Ω — ограниченная область в R_n. Обозначим через $\overset{0}{H}_m(\Omega)$, где m — целое число, замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $|u|_m = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|_{L_2(\Omega)}$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. Пусть L обозначает замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора

$$L_0 = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(\cdot) D^\beta), \quad D_{L_0} = C^\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}_m(\Omega),$$

где $a_{\alpha\beta}(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$, для всех $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$. Предполагается что значения функции $z(x, s) = \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) s^\alpha s^\beta$ $(x \in \Omega, s \in R_n)$ образуют угол с раствором $\theta < \min\left(\frac{\pi m}{n}, \pi\right)$, причем $z(x, s) \neq 0$, если $s \neq 0$.

Теорема 2. *При сформулированных выше условиях оператор L имеет дискретный спектр, и $N(\lambda, L) \asymp \lambda^{n/2m}$.*

6. Рассмотрим в $L_2(R_1^+)$ оператор Штурма — Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dt^2} + q(t)$ с граничным условием $y(0) = 0$. Предполагается, что $|\operatorname{Im} q(t)| \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{4p} \operatorname{Re} q(t)$ и $|q(t)|^{0,5-p} \in L_1(R_1^+)$, где $p > 1/2$. Пусть $\varphi(2\lambda) = O(\varphi(\lambda))$, где $\varphi(\lambda) = \operatorname{mes}\{t \mid |q(t)| \leqslant \lambda\}$ и $q'(t) = o(|q(t)|^{1,5})$.

Теорема 3. *При сформулированных выше условиях оператор L имеет дискретный спектр, и $N(\lambda, L) \asymp \sqrt{\lambda}\varphi(\lambda)$.*

В связи с теоремой 3 отметим статьи [4] — [6], в которых также исследуется асимптотика спектра оператора Штурма — Лиувилля с комплексным потенциалом.

Автор благодарен А. Г. Костюченко и Г. В. Радзиевскому за постоянное внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

Математический институт
с Вычислительным центром АН Тадж. ССР

Поступило в редакцию
18 марта 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965. 2. Мацаев В. И., Палант Ю. А., Укр. матем. ж., 74, № 3 (1962), 329—337. 3. Маркус А. С., Параска В. И., Изв. Молд. ССР 7 (1965), 101—104. 4. Федорюк М. В., I, Дифф. уравнения 8, № 5 (1972) 811—816. 5. Федорюк М. В., Жданова Г. В., II, Дифф. уравнения 10, № 6 (1974), 1067—1073. 6. Челкак С. И., Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Л., 1974, 161—177.