Vu Quok Phong, Yu. I. Lyubich, On the spectral mapping theorem for a one-parameter group of operators, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1989, Volume 178, 146–150

Ву Куок Фонг, Ю.И.Любич

К ТЕОРЕМЕ ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СПЕКТРОВ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ОПЕРАТОРОВ

I. Пусть A - линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Из операторного исчисления вытекает теорема об отображении спектров для однопараметрической группы $\exp(At)$ $(t\in\mathbb{R})$:

$$\sigma(\exp(At)) = \exp(\sigma(A)t) \quad (t\in\mathbb{R}). \tag{I}$$

Эта теорема играет важную роль в спектральной теории операторов и ее приложениях, в частности, к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах. Но для такого рода приложений важно иметь обобщение равенства (I) на случай неограниченного оператора A. Чтобы придать смысл выражению $\exp(At)$, потребуем, чтобы A порождал некоторую сильно непрерывную однопараметрическую группу $U(t)$ ограниченных операторов. Поскольку $\sigma(U(t))$ компактен, а множество $\exp(\sigma(A)t)$ может даже не быть замкнутым, если A неограничен, то вопрос заключается в справедливости при тех или иных условиях следующего равенства

$$\sigma(U(t)) = \overline{\exp(\sigma(A)t)}. \tag{2}$$

В последнее время появилось много публикаций, посвященных теореме об отображении спектров для однопараметрических групп. Из них мы отметим работы [I], [2], имеющие непосредственную связь с результатом данной заметки; в работе [I] равенство (2) было установлено для однопараметрических групп изометрий, а в [2] - для однопараметрических групп $U(t)$ с полиномиальным ростом ($\|U(t)\| = O(1+|t|^k)$). Мы покажем, что из теории операторов с отделимым спектром [3] выводится теорема об отображении спектров для неквазианалитических групп операторов в банаховом пространстве, а тем самым, и для случаев, рассмотренных в [I], [2].

2. Сильно непрерывная однопараметрическая группа $U(t)\,(t\in\mathbb{R})$ операторов в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ называется неквазианалитической, если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\|U(t)\|}{1+t^2}\,dt \tag{3}$$

сходится. Спектр генератора A такой группы лежит на мнимой оси. Спектр каждого из операторов $U(t)$ лежит на единичной окружности. Действительно, в силу (3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\|U(nt)\|}{n}=0,$$

т.е. спектральный радиус оператора $U(t)$ равен I, и то же самое верно для $U(t)^{-1}=U(-t)$.

ТЕОРЕМА. Равенство (2) имеет место, если A – генератор сильно непрерывной неквазианалитической группы $U(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем опираться на следующие результаты, установленные в [3].

Спектр оператора A отделим в том смысле, что: I) для каждого отрезка $\Delta\subset i\mathbb{R}$ существует соответствующее спектральное подпространство $L(\Delta)$, инвариантное относительно A; 2) на $L(\Delta)$ оператор A всюду определен и ограничен, и, более того

$$\sigma(A)\cap\Delta^{\circ}\subset\sigma(A|L(\Delta))\subset\sigma(A)\cap\Delta, \tag{4}$$

где $\Delta^{\circ}=\operatorname{int}\Delta$; 3) подпространство $L(\Delta)$ содержит каждое такое подпространство M, которое удовлетворяет этим двум условиям (в частности, $L(\Delta_1)\subseteq L(\Delta_2)$, если $\Delta_1\subset\Delta_2$); 4) если система $\{\Delta_\alpha\}$ такова, что $\{\Delta_\alpha^{\circ}\}$ является покрытием мнимой оси, то система подпространств $\{L(\Delta_\alpha)\}$ полна. Последний факт был установлен в [3] при помощи специально сконструированной последовательности ограниченных проекторов P_n, коммутирующих с A и удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty}P_n x=x,\quad \operatorname{Im}P_n\subset L(\Delta_n), \tag{5}$$

где $\Delta_n=[-in,in]$. Доказывая (2), можно принять $t=1$, после чего мы положим $A_n=A|L(\Delta_n)$, $U=U(1)$, $U_n=U|L(\Delta_n)$. Очевидно

$$U_n=\exp(A_n). \tag{6}$$

Из (4) следует, что

$$\sigma(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(A_n).$$

Поэтому

$$\exp(\sigma(A))=\bigcup_{n=1}^{\infty}\exp(\sigma(A_n))=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\exp(A_n)),$$

так как операторы A_n ограничены. Следовательно,

$$\overline{\exp(\sigma(A))} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\exp(A_n))}. \tag{7}$$

Мы покажем, что

$$\sigma(U) \subset \overline{\exp(\sigma(A))}. \tag{8}$$

Этого достаточно для требуемого равенства

$$\sigma(U) = \overline{\exp(\sigma(A))}, \tag{9}$$

так как включение, обратное к (8), справедливо для произвольной сильно непрерывной полугруппы [4].

Пусть $\lambda \overline{\in} \overline{\exp(\sigma(A))}$. Нужно показать, что $\lambda \overline{\in} \sigma(U)$. Сразу можно считать $|\lambda| = 1$. Достаточно установить неравенство

$$\| Ux - \lambda x \| \geqslant const \cdot \| x \| \quad (x \in \mathcal{B}).$$

Действительно, в этом случае $Im(U - \lambda I) = \mathcal{B}$ так как, если бы в точке λ дефектное число было отлично от нуля, то оно было бы таким же в окрестности этой точки [5], а тогда в спектр $\sigma(U)$ вошли бы точки ζ с $|\zeta| \neq 1$.

В силу (7), существует окрестность V точки λ, такая, что $\overline{V}$ не пересекается со спектрами операторов $\exp(A_n)$. Таким образом, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует окрестность компакта $\sigma(A_n)$, $\exp$-образ замыкания которой не пересекается с V. Мы можем считать, что граница Γ_n этой окрестности состоит из конечного числа круговых дуг. Рассмотрим в $L(\Delta_n)$ оператор

$$T_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{R_n(\zeta)}{\exp(\zeta) - \lambda} \, d\zeta \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

где $R_n(\zeta) = (A_n - \zeta I)^{-1}$. Очевидно, операторы T_n ограничены. Более того, $\sup\limits_n \| T_n \| = C < \infty$, и $T_n = (\exp(A_n) - \lambda I)^{-1}$. Следовательно,

$$\| \exp(A_n) x - \lambda x \| \geqslant C^{-1} \| x \| \quad (x \in L(\Delta_n)). \tag{11}$$

Так как, согласно (5), $P_n x \in L(\Delta_n)$, то из (11) следует

$$\| \exp(A_n) P_n(x) - \lambda P_n(x) \| \geqslant C^{-1} \| P_n x \| \quad (x \in \mathcal{B}).$$

Согласно (6), это неравенство можно переписать следующим образом

$$\| U P_n x - \lambda P_n x \| \geqslant C^{-1} \| P_n x \| \quad (x \in \mathcal{B}).$$

Устремляя $n \to \infty$, получим в силу (5), что

$$\|Ux - \lambda x\| \geqslant C^{-1} \|x\| \quad (x \in \mathcal{B}),$$

что и требовалось доказать.

Укажем некоторые следствия доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть A – генератор сильно непрерывной неквазианалитической группы $U(t)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

I) $1 \overline{\in} \sigma(U(1))$;

2) $\sigma(A) \cap 2\pi i \mathbb{Z} = \emptyset$ и $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(A - 2\pi i n I)^{-1}\| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2) доказано в [6]. Чтобы доказать 2) $\Longrightarrow$ I) заметим, что условие 2) влечет равномерную отделенность $2\pi i \mathbb{Z}$ от $\sigma(A)$. Таким образом, $1 \overline{\in} \overline{exp(\sigma(A))}$, и 2) $\Longrightarrow$ I) в силу нашей теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – генератор сильно непрерывной неквазианалитической группы и пусть $\sigma(A) \cap 2\pi i \mathbb{Z} = \emptyset$. Тогда для каждой 2π-периодической функции $f(t)$ уравнение $dx/dt = Ax + f(t)$ имеет единственное периодическое решение.

Для доказательства достаточно повторять рассуждения из [7], используя нашу теорему при построении резольвенты $(U(1)-I)^{-1}$.

Литература

I. E v a n s D.E. On the spectrum of a one-parameter strongly continuous representations. - Math.Scand., 1976, v.39, p.80-82.

2. A r e n d t W., G r e i n e r G. Lect.Notes in Math., 1986, v.1184, p.90-93.

3. Л ю б и ч Ю.И., М а ц а е в В.И. Об операторах с отделимым спектром. - Матем.сб., I962, т.56, № 4, с.433-468.

4. Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., I962.

5. К р е й н М.Г., К р а с н о с е л ь с к и й М.А., М и л ь м а н Д.П. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. - Сб. тр. ин-та Матем. АН УССР, I948, № II, с.97-II2.

6. P r u s s J. On the spectrum of -semigroups. - Trans. Amer.Math.Soc., 1984, v.284, p.847-857.

7. Д а л е ц к и й Ю.Л., К р е й н М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.М.,I970.

Vu Quok Phong, Yu.I.Lyubich. On the spectral mapping theorem for a one-parameter group of operators.

Summary

Let A be the generator of a strongly continuous non-quasi-analytic one-parameter group of operators $U(t)$ (A can be unbounded). Then the spectral mapping theorem is established in the following form: $\sigma(U(t)) = \overline{\exp(\sigma(A)t)}$.