Н. Д. ИВАНОВА, В. Е. ФЁДОРОВ, К. М. КОМАРОВА

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА, ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ В ОКРЕСТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

Исследован класс нелинейных обратных задач с неизвестными параметрами, зависящими от времени, для абстрактных уравнений соболевского типа в банаховых пространствах. В задаче наряду с условием Коши рассматривается обобщенное условие Шоуолтера. Доказаны теоремы существования и единственности слабого и гладкого решений. Общие результаты использованы при исследовании нелинейной эволюционной обратной задачи для линеаризованной системы Осколкова, моделирующей динамику вязкоупругой жидкости.

Ключевые слова: *нелинейная обратная задача, вырожденная полугруппа операторов, система уравнений Осколкова, вязкоупругая жидкость.*

Введение

Рассмотрим обратную задачу для системы уравнений

$$(1-\chi\nabla^2)v_t(x,t) = \nu\nabla^2 v(x,t) - (\tilde{v}\cdot\nabla)v(x,t) - (v\cdot\nabla)\tilde{v}(x,t) -$$

$$-r(x,t) + q_1(t)(1-\chi\nabla^2)v(x,t) + b(t)\|v\|_0^\alpha v + \sum_{j=2}^{3m} q_j(t) f^j(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{0.1}$$

$$\nabla\cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{0.2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{0.3}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{0.4}$$

$$v(x_i,t) = \psi^i(t), \quad i=1,\ldots,m, \quad t\in[0,T]. \tag{0.5}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T>0$, $m\in\mathbb{N}$. Параметр $\chi\in\mathbb{R}$ характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu\in\mathbb{R}_+$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v=(v_1,v_2,v_3)$ (вектор скорости жидкости), $r=(r_1,r_2,r_3)$ (градиент давления) и функции $q_j=q_j(t)$, $j=1,2,\ldots,3m$, неизвестны. Вектор-функция $\tilde{v}=(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\tilde{v}_3)$, $\tilde{v}_k=\tilde{v}_k(x)$, $k=1,2,3$, задана и означает стационарное решение исходной системы. Также заданы функция $b=b(t)$, вектор-функции $f^j=(f_1^j,f_2^j,f_3^j)$, характеризующие объемные силы, $f^j=f^j(x,t)$, $j=2,\ldots,3m$, вектор-функции $\psi^i=(\psi_1^i,\psi_2^i,\psi_3^i)$, $\psi_k^i=\psi_k^i(t)$, $k=1,2,3$, $i=1,\ldots,m$. Все точки $x_i\in\Omega$, $i=1,\ldots,m$, различны, $\|v\|_0=\|v\|_{(L_2(\Omega))^3}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

При $b\equiv 0$, $q_j\equiv 0$, $j=1,2,\ldots,3m$, эта система является моделью в линейном приближении течения вязкоупругой несжимаемой жидкости [1] в окрестности стационарного решения $\tilde{v}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Министерства образования и науки Челябинской области (грант 10-01-96007-р_урал_а).

Такие задачи возникают в приложениях, когда известен общий вид математической модели процесса, некоторые определяющие процесс параметры неизвестны и недоступны для непосредственного измерения, но могут быть воостановлены с помощью доступных для измерителя данных — условий переопределения (0.5).

Задача (0.1)–(0.5) будет исследована в данной работе в рамках абстрактной нелинейной обратной задачи для операторно-дифференциального уравнения, не разрешимого относительно производной — уравнения соболевского типа. Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линеен и непрерывен), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линеен, замкнут и плотно определен), $N : [0,T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, заданы $\Psi : [0,T] \to \mathcal{Y}$, $u_0 \in \mathcal{U}$. Рассмотрим соотношения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t,u(t),q(t)), \quad t \in [0,T], \tag{0.6}$$

$$u(0) = u_0, \tag{0.7}$$

$$Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{0.8}$$

Эволюционной обратной задачей будем называть задачу отыскания из соотношений (0.6)–(0.8) пары функций $u \in C([0,T];\mathcal{U})$ и $q \in C([0,T];\mathcal{Y})$ (слабое решение) либо $u \in C^1([0,T];\mathcal{U}) \cap C([0,T];D(M))$ и $q \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$ (гладкое решение).

Обратные задачи для уравнений соболевского типа в другой постановке, а также для других неклассических уравнений математической физики исследовались ранее в работах [2–8].

В данной работе так же, как и в работе [9], касающейся линейной эволюционной обратной задачи для уравнений соболевского типа, с помощью методов теории вырожденных полугрупп операторов [10] исходная обратная задача редуцирована к системе обратной задачи для уравнения, разрешенного относительно производной по времени, и прямой задачи для уравнения с нильпотентным оператором при производной. При исследовании нелинейной обратной задачи для невырожденного уравнения используются результаты монографии [11].

Помимо условия Коши (0.7) в данной работе используется также обобщенное условие Шоуолтера, которое позволяет отказаться от условия согласования начального значения с другими данными задачи.

1. Прямая задача для вырожденного уравнения

Через $\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{U}$ в банахово пространство $\mathcal{F}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathcal{U}$, действующих в $\mathcal{F}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Если $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, то обозначения сократятся до $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{C}l(\mathcal{U})$ соответственно.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным,* если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;
(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leqslant \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$, такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1} f\|_{\mathcal{F}} \leqslant \frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$;
(iv) для любого $\mu \in (a, +\infty)$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leqslant \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Эквивалентность этого, более простого определения сильной (L, p)-радиальности, и того, которое было использовано в [10], доказана в [12].

Обозначим через $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) ядро $\ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$ ($\ker(L^L_\mu(M))^{p+1}$), а через $\mathcal{U}^1$ ($\mathcal{F}^1$) — замыкание линеала $\mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ ($\mathrm{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}$) в норме пространства $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $D(M_k) = \mathcal{U}^k \cap D(M)$ ($\mathcal{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. [10] *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален. Тогда*
(i) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$;
(ii) *проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ на $\mathcal{U}^1$ (вдоль $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}^1$) имеет вид*

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1});$$

(iii) $QL = LP$, $QMu = MPu$ *для всех* $u \in D(M)$;
(iv) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$;
(v) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$;
(vi) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;
(vii) *существует сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $L\dot{u}(t) = Mu(t)$;
(viii) *оператор* $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$ *является инфинитезимальным генератором* C_0*-непрерывной полугруппы* $\{U_1(t) = U(t)|_{\mathcal{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

Теорема 1 обобщает теорему Хилле–Иосиды [13] о порождении C_0-непрерывных полугрупп операторов (см. [10]).

Снабдим область определения $D(M)$ оператора $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ нормой его графика $\|\cdot\|_{D(M)} = \|\cdot\|_{\mathcal{U}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{F}}$. В силу замкнутости оператора M полученное таким образом нормированное пространство является банаховым.

Теорема 2. [10] *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален, $u_0 \in D(M)$, функция $g : [0, T] \to \mathcal{F}$ такова, что $Qg \in C^1([0, T]; \mathcal{F}^1)$, $(I - Q)g \in C^{p+1}([0, T]; \mathcal{F}^0)$,*

$$(I - P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I - Q)g)^{(k)}(0). \tag{1.1}$$

Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathcal{U}) \cap C([0,T];D(M))$ *задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{1.2}$$

для уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

При этом

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(s)L_1^{-1}Qg(t-s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)g)^{(k)}(t). \tag{1.4}$$

Теорема 3. [10] *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален,* $u_0 \in D(M_1)$*, функция* $g : [0,T] \to \mathcal{F}$ *такова, что* $Qg \in C^1([0,T];\mathcal{F}^1)$*,* $(I-Q)g \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{F}^0)$*. Тогда существует единственное решение* $u \in C^1([0,T];\mathcal{U}) \cap C([0,T];D(M))$ *обобщенной задачи Шоуолтера*

$$Pu(0) = u_0 \tag{1.5}$$

для уравнения (1.3)*. При этом решение имеет вид* (1.4)*.*

Теоремы 2, 3 посвящены условиям существования классических решений задач Коши и Шоуолтера для неоднородного вырожденного уравнения (1.3). Понятие слабого решения уравнения, как известно, состоит в том, что таковым является функция, по форме соответствующая классическому решению, но, возможно, не дифференцируемая. Для уравнения (1.3) под слабым решением естественно понимать функцию $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, имеющую вид (1.4). Тогда разница между слабыми решениями задач (1.2), (1.3) и (1.3), (1.5) состоит лишь в том, что для слабого решения первой из них необходимо выполнение условия согласования (1.1), а для слабого решения второй — нет. Формализуем высказанные соображения.

Определение 2. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняется условие согласования (1.1). *Слабым решением* задачи (1.2), (1.3) называется функция $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, имеющая вид (1.4).

Определение 3. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. *Слабым решением* задачи (1.3), (1.5) называется функция $u \in C([0,T];\mathcal{U})$, имеющая вид (1.4).

Теорема 4. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален,* $u_0 \in \mathcal{U}$*, функция* $g : [0,T] \to \mathcal{F}$ *такова, что* $Qg \in C([0,T];\mathcal{F}^1)$*,* $(I-Q)g \in C^p([0,T];\mathcal{F}^0)$*,*

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)g)^{(k)}(0).$$

Тогда существует единственное слабое решение $u \in C([0,T];\mathcal{U})$ *задачи* (1.2), (1.3).

Теорема 5. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален,* $Pu_0 \in \mathcal{U}$*, функция* $g : [0,T] \to \mathcal{F}$ *такова, что* $Qg \in C([0,T];\mathcal{F}^1)$*,* $(I-Q)g \in C^p([0,T];\mathcal{F}^0)$*. Тогда существует единственное слабое решение* $u \in C([0,T];\mathcal{U})$ *задачи* (1.3), (1.5).

Доказательство. Действительно, в условиях теорем 4 и 5 функция (1.4) определена и непрерывна. □

2. Невырожденная нелинейная обратная задача

Рассмотрим нелинейную обратную задачу для уравнения, разрешенного относительно производной,

$$\dot{v}(t) = Av(t) + g(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \tag{2.1}$$

$$v(0) = v_0, \tag{2.2}$$

$$Bv(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.3}$$

Задача заключается в отыскании функций $v : [0, T] \to \mathcal{X}$, $q : [0, T] \to \mathcal{Y}$ из соотношений (2.1)–(2.3), где $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ — инфинитезимальный генератор C_0-непрерывной полугруппы операторов, $g : [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Сформулируем условия разрешимости этой задачи в смысле слабых и в смысле гладких решений, найденные в работе [11].

Далее предполагается, что отображение $g : [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ представимо в виде

$$g(t, v, q) = g_1(t, v) + g_2(t, v, q) \quad \forall (t, v, q) \in [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \tag{2.4}$$

Введем следующие обозначения

$$S_{\mathcal{X}}(a, R) = \{v \in \mathcal{X} : \ \|v - a\|_{\mathcal{X}} < R\}, \quad S_{\mathcal{X}}(a, R, T) = [0, T] \times S_{\mathcal{X}}(a, R).$$

Считая функцию Ψ дифференцируемой, определим значение

$$y_0 = \Psi'(0) - \overline{BA}v_0 - Bg_1(0, v_0)$$

и потребуем выполнения условий:

(A) уравнение $Bg_2(0, v_0, q) = y_0$ относительно q имеет единственное решение $q_0 \in \mathcal{Y}$;

(B) существует отображение $g_3 : [0, T] \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, такое, что

$$Bg_2(t, v, q) = g_3(t, Bv, q);$$

(C) существует число $R > 0$, такое, что для любых $t \in [0, T]$ отображение $y = g_3(t, \Psi(t), q)$ как функция от q в шаре $S_{\mathcal{Y}}(q_0, R)$ имеет обратное отображение $q = \Phi(t, y)$;

(D) существует число $R > 0$, такое, что отображение Φ непрерывно относительно (t, y) на множестве $S_{\mathcal{Y}}(y_0, R, T)$ и удовлетворяет условию Липшица относительно y;

(E) существует число $R > 0$, такое, что обе функции $g_1(t, v)$ и $g_2(t, v, q)$ являются непрерывными по совокупности всех переменных на $S_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}((v_0, q_0), R, T)$ и удовлетворяют условию Липшица относительно (v, q).

Определение 4. *Слабым решением* задачи (2.1)–(2.3) на отрезке $[0, T_1]$ называется такая пара функций $(v, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{X}) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$, что для всех $t \in [0, T_1]$ выполняется условие (2.3) и

$$v(t) = V(t)v_0 + \int\limits_0^t V(t-s)g(s, v(s), q(s))ds,$$

где $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ — C_0-непрерывная полугруппа, порождаемая оператором A.

Теорема 6. [11] *Пусть A — инфинитезимальный генератор C_0-непрерывной полугруппы в пространстве $\mathcal{X}$, $v_0 \in \mathcal{X}$, $B, \overline{BA} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\Psi \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$, $Bv_0 = \Psi(0)$, а также выполняются условия* (2.4), (A)–(E). *Тогда при некотором $T_1 \in (0, T]$ существует единственное слабое решение $(v, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{X}) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$ обратной задачи* (2.1)–(2.3) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Определение 5. *Гладким решением* задачи (2.1)–(2.3) на отрезке $[0, T_1]$ называется такая пара $(v, q) \in (C^1([0, T_1]; \mathcal{X}) \cap C([0, T_1]; D(A))) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$, для которой выполняется (2.2) и соотношения (2.1), (2.3) при всех $t \in [0, T_1]$.

Для получения достаточных условий существования гладкого решения рассматриваемой обратной задачи условия (D) и (E) требуется усилить, заменив их следующими условиями:

($\mathbf{D_1}$) существует число $R > 0$ такое, что отображение Φ дифференцируемо по Фреше на множестве $S_{\mathcal{Y}}(y_0, R, T)$ и его частные производные Φ_t, Φ_y непрерывны в операторной норме и удовлетворяют условию Липшица относительно y;

($\mathbf{E_1}$) существует число $R > 0$ такое, что обе функции $g_1(t, v)$ и $g_2(t, v, q)$ являются дифференцируемыми по Фреше на множестве $S_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}((v_0, q_0), R, T)$ и их частные производные g_{1t}, g_{1v}, g_{2t}, g_{2v}, g_{2q} непрерывны по операторной норме и удовлетворяют условию Липшица относительно (v, q).

Теорема 7. [11] *Пусть A — инфинитезимальный генератор C_0-непрерывной полугруппы в пространстве $\mathcal{X}$, $v_0 \in D(A)$, B, $\overline{BA} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$, $Bv_0 = \Psi(0)$, а также выполняются условия* (2.4), (A)–(C), (D_1), (E_1). *Тогда при некотором $T_1 \in (0, T]$ существует единственное гладкое решение $(v, q) \in (C^1([0, T_1]; \mathcal{X}) \cap C([0, T_1]; D(A))) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$ обратной задачи* (2.1)–(2.3) *на отрезке* $[0, T_1]$.

3. Нелинейная обратная задача для уравнения соболевского типа

Вернемся к обратной задаче для уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.2}$$

$$Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $N : [0,T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{F}$, $\Psi : [0,T] \to \mathcal{Y}$. Неизвестными являются функции $u : [0,T] \to \mathcal{U}$, $q : [0,T] \to \mathcal{Y}$.

Учитывая определение 2 слабого решения вырожденного уравнения, введем в рассмотрение следующее понятие слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 6. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. *Слабым решением* задачи (3.1)–(3.3) на отрезке $[0,T_1]$ называется такая пара функций $(u,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$, для которой выполняется условие (3.2), $(I-Q)N(\cdot,u(\cdot),q(\cdot)) \in C^p([0,T_1];\mathcal{F})$,

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} \frac{d^k}{dt^k}\bigg|_{t=0} (I-Q)N(t,u(t),q(t)),$$

при всех $t \in [0,T_1]$ выполняется условие (3.3) и

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)L_1^{-1}QN(s,u(s),q(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} \frac{d^k}{dt^k}(I-Q)N(t,u(t),q(t)).$$

Теорема 8. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален,* $\mathrm{im}N \subset \mathcal{F}^1$*,* $u_0 \in \mathcal{U}^1$*,* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$*,* $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$*,* $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$*,* $\Psi \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$*,* $Bu_0 = \Psi(0)$*, а также выполняются условия* (2.4), (A)–(E) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$*,* $g = L_1^{-1}N$*,* $A = L_1^{-1}M_1$*,* $v_0 = u_0$*. Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное слабое решение* $(u,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1)–(3.3) *на отрезке* $[0,T_1]$.

Доказательство. Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда функцию $u(t)$ можно представить в виде $u(t) = Pu(t) + (I-P)u(t)$. Обозначим $Pu(t) = v(t)$, $(I-P)u(t) = w(t)$. В силу теоремы 1 и вложения $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ задача (3.1)–(3.3) эквивалентна задаче нахождения функций v, w, q из соотношений

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}QN(t,v(t)+w(t),q(t)), \quad t \in [0,T], \tag{3.4}$$

$$v(0) = v_0 \equiv Pu_0 = u_0, \tag{3.5}$$

$$BPu(t) = Bv(t) = Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.6}$$

$$H\dot{w}(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)N(t,v(t)+w(t),q(t)), \quad t \in [0,T], \tag{3.7}$$

$$w(0) = w_0 \equiv (I-P)u_0. \tag{3.8}$$

Здесь оператор $H = M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени не больше p согласно утверждению теоремы 1 (vi).

Поскольку $\mathrm{im}N \subset \mathcal{F}^1$, то $QN = N$, $(I - Q)N = 0$. Тогда задача (3.4)–(3.8) принимает вид

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}N(t, v(t) + w(t), q(t)), \quad t \in [0, T],$$

$$v(0) = v_0, \tag{3.9}$$

$$Bv(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.10}$$

$$H\dot{w}(t) = w(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.11}$$

$$w(0) = (I - P)u_0. \tag{3.12}$$

Применим к задаче Коши (3.11), (3.12) теорему 6. Возьмем в качестве $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ подпространство $\mathcal{U}^0$, в качестве L и M — операторы H и I. Тогда при любом $\mu \in \mathbb{C}$ имеем

$$((\mu H - I)^{-1}H)^{p+1} = \left(\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^{k+1}\right)^{p+1} = 0, \quad (H(\mu H - I)^{-1})^{p+1} = 0,$$

поэтому оператор I сильно (H, p)-радиален. Тогда при $g \equiv 0$ по теореме 6 имеем единственное слабое решение задачи (3.11), (3.12) — функцию $w \equiv 0$, поскольку $(I - P)u_0 \equiv 0$.

Итак, задача (3.1)–(3.3) сведена к обратной задаче (3.9), (3.10) для разрешенного относительно производной уравнения

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}N(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T].$$

Если положить $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}N : [0, T] \times \mathcal{U}^1 \times \mathcal{Y} \to \mathcal{U}^1$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = u_0$, то получится в точности задача (2.1)–(2.3). Условия теоремы 6 об однозначной локальной разрешимости этой задачи в данном случае выполняются. Тогда существует единственное слабое решение этой обратной задачи

$$v(t) = U_1(t)u_0 + \int_0^t U_1(t - s)L_1^{-1}QN(s, v(s), q(s))ds =$$

$$= U(t)u_0 + \int_0^t U(t - s)L_1^{-1}QN(s, u(s), q(s))ds,$$

поскольку $u(t) = v(t)$. Полученное выражение по определению 6 и есть слабое решение задачи (3.1)–(3.3) в силу того, что $(I - Q)N = 0$. □

В случае когда отображение N не зависит от переменной $(I - P)u$, при $p = 0$ можно отказаться от ограничения на образ $\mathrm{im}N$.

Теорема 9. *Пусть оператор M сильно $(L, 0)$-радиален, отображение $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ непрерывно по совокупности переменных (t, u, q), для всех $(t, u, q) \in [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ выполняется $N(t, u, q) = N(t, Pu, q)$, кроме того, $u_0 \in \mathcal{U}$, $q(0) \in \mathcal{Y}$,*

$$(I - P)u_0 = -M_0^{-1}(I - Q)N(0, Pu_0, q(0)), \tag{3.13}$$

$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$, $\Psi \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$, *а также выполняются условия* (2.4), (A)–(E) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}QN$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = Pu_0$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное слабое решение* $(u,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1)–(3.3) *на отрезке* $[0,T_1]$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 8, и используя сильную $(L,0)$-радиальность оператора M и условия на отображение N, сведем задачу (3.1)–(3.3) к задаче (3.9), (3.10), (3.12) для уравнений

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}QN(t,v(t),q(t)), \quad t \in [0,T], \tag{3.14}$$

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)N(t,v(t),q(t)), \quad t \in [0,T]. \tag{3.15}$$

Здесь оператор $H = 0$. По теореме 6 задача (3.9), (3.10), (3.14) при некотором $T_1 \in (0,T]$ имеет единственное слабое решение $(v,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}^1) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$. Тогда из уравнения (3.15) следует, что

$$w(t) = -M_0^{-1}(I-Q)N(t,v(t),q(t)), \quad t \in [0,T_1]. \tag{3.16}$$

Функция $w(t)$ является непрерывной в силу непрерывности отображения N. Из условия (3.12) в таком случае следует необходимость условия согласования (3.13). Тогда функция

$$u(t) = v(t) + w(t) = U_1(t)u_0 + \int\limits_0^t U_1(t-s)L_1^{-1}QN(s,v(s),q(s))ds -$$

$$-M_0^{-1}(I-Q)N(t,v(t),q(t))$$

является слабым решением задачи (3.1)–(3.3) по определению 6 в силу того, что $N(t,v(t),q(t)) \equiv N(t,u(t),q(t))$. □

Чтобы избавиться от необходимости выполнения неудобного для проверки условия согласования (3.13), которое к тому же дополнительно предполагает априорное знание величины $q(0)$, заменим начальное условие (3.2) в обратной задаче на так называемое обобщенное условие Шоуолтера [10]

$$Pu(0) = u_0. \tag{3.17}$$

При этом *слабым решением* задачи (3.1), (3.3), (3.17) на отрезке $[0,T_1]$ будем называть пару функций $(u,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$, для которой справедливо включение $(I-Q)N(\cdot,u(\cdot),q(\cdot)) \in C^p([0,T_1];\mathcal{F})$ и при всех $t \in [0,T_1]$ выполняется равенство (3.3) и

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)L_1^{-1}QN(s,u(s),q(s))ds -$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}\frac{d^k}{dt^k}(I-Q)N(t,u(t),q(t)).$$

Теорема 10. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален,* $\mathrm{im}N \subset \mathcal{F}^1$, $u_0 \in \mathcal{U}^1$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$, $\Psi \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$, *а также выполняются условия* (2.4), (A)–(E) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}N$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = u_0$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное слабое решение* $(u,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1), (3.3), (3.17) *на отрезке* $[0,T_1]$.

Теорема 11. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален, отображение* $N : [0,T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ *непрерывно по совокупности переменных* (t,u,q), *для всех* $(t,u,q) \in [0,T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ *выполняется* $N(t,u,q) = N(t,Pu,q)$, *кроме того,* $u_0 \in \mathcal{U}^1$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$, $\Psi \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$, *а также выполняются условия* (2.4), (A)–(E) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}QN$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = u_0$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное слабое решение* $(u,q) \in C([0,T_1];\mathcal{U}) \times C([0,T_1];\mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1), (3.3), (3.17) *на отрезке* $[0,T_1]$.

Доказательство. Задача (3.1), (3.3), (3.17) отличается от задачи (3.1)–(3.3) только отсутствием условия на $(I-P)u(0)$, которое при доказательстве теорем 8 и 9 лишь приводило к необходимости дополнительных условий согласования: $u_0 \in \mathcal{U}^1$ в теореме 8 и условие (3.13) в теореме 9. С другой стороны, условие (3.17) само по себе предполагает принадлежность $u_0 \in \mathcal{U}^1$. Поэтому условия теорем 8 и 10 одинаковы, а теорема 11 отличается от теоремы 9 только заменой условия (3.13) на включение $u_0 \in \mathcal{U}^1$. □

Определение 7. *Гладким решением задачи* (3.1)–(3.3) *на отрезке* $[0,T_1]$ *называется такая пара* $(u,q) \in (C^1([0,T_1];\mathcal{U}) \cap C([0,T_1];D(M))) \times C^1([0,T_1];\mathcal{Y})$, *для которой выполняется* (3.2) *и соотношения* (3.1), (3.3) *при всех* $t \in [0,T_1]$.

Теорема 12. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, при этом* $\mathrm{im}N \subset \mathcal{F}^1$, $u_0 \in D(M_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$, $\Psi \in C^2([0,T];\mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$, *а также выполняются условия* (2.4), (A)–(C), (D_1), (E_1) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}N$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = u_0$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0,T]$ *существует единственное гладкое решение* $(u,q) \in (C^1([0,T_1];\mathcal{U}) \cap C([0,T_1];D(M))) \times C^1([0,T_1];\mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1)–(3.3) *на отрезке* $[0,T_1]$.

Теорема 13. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален и выполняются следующие условия:*

(i) *для всех* $(t,u,q) \in [0,T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ *выполняется* $N(t,u,q) = N(t,Pu,q)$;

(ii) $u_0 \in D(M)$, $q(0) \in \mathcal{Y}$, $(I-P)u_0 = -M_0^{-1}(I-Q)N(0,Pu_0,q(0))$;

(iii) $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$, $\Psi \in C^2([0,T];\mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$;

(iv) *выполняются условия* (2.4), (A)–(C), (D_1), (E_1) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}QN$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = Pu_0$;

(v) *на множестве* $S_{\mathcal{U}\times\mathcal{Y}}((u_0,q_0),R,T)$ *отображение* $N : [0,T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ *дифференцируемо по Фреше, а его частные производные* N_t, N_u, N_q *непрерывны по совокупности переменных* (t,u,q) *в сильной топологии.*

Тогда при некотором $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* $(u, q) \in (C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M))) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1)–(3.3) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Определение 8. *Гладким решением* задачи (3.1), (3.3), (3.17) на отрезке $[0, T_1]$ называется такая пара $(u, q) \in (C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M))) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$, для которой выполняется (3.17) и соотношения (3.1), (3.3) при всех $t \in [0, T_1]$.

Теорема 14. *Пусть оператор* M *сильно* (L, p)*-радиален, при этом* $\mathrm{im}N \subset \mathcal{F}^1$, $u_0 \in D(M_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$, $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$, *а также выполняются условия* (2.4), (A)–(C), (D_1), (E_1) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}N$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = u_0$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* $(u, q) \in (C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M))) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1), (3.3), (3.17) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Теорема 15. *Пусть оператор* M *сильно* $(L, 0)$*-радиален и выполняются следующие условия:*

(i) *для всех* $(t, u, q) \in [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ *выполняется* $N(t, u, q) = N(t, Pu, q)$;

(ii) $u_0 \in D(M_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{Y})$, $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$, $Bu_0 = \Psi(0)$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$;

(iii) *выполняются условия* (2.4), (A)–(C), (D_1), (E_1) *при* $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$, $g = L_1^{-1}QN$, $A = L_1^{-1}M_1$, $v_0 = u_0$;

(iv) *на множестве* $S_{\mathcal{U}\times\mathcal{Y}}((u_0, q_0), R, T)$ *отображение* $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ *дифференцируемо по Фреше, а его частные производные* N_t, N_u, N_q *непрерывны по совокупности переменных* (t, u, q) *в сильной топологии.*

Тогда при некотором $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* $(u, q) \in (C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M))) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$ *обратной задачи* (3.1), (3.3), (3.17) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. При доказательстве теорем 8–11 исходная задача сводилась к задаче для невырожденного уравнения. Для нее в теореме 7 доказано, что дополнительная гладкость функции Ψ, принадлежность v_0 линеалу $D(A)$ и выполнение условий (D_1), (E_1) в условиях теоремы 6 приводят к существованию гладкого решения обратной задачи. Используя это наблюдение и рассуждая, как при доказательстве теорем 8 и 10, получим доказательства теорем 12 и 14. Надо при этом заметить, что непрерывность решения относительно нормы графика оператора $A = L_1^{-1}M_1$ в силу гомеоморфности оператора L_1 равносильна непрерывности в норме графика оператора M_1, а поскольку в условиях теорем 12 и 14 $u(t) = Pu(t)$, то это равносильно непрерывности решения в норме графика оператора M.

В условиях теорем 13 и 15 воспроизведем доказательства теорем 9 и 11 и к сказанному выше добавим, что функция (3.16) непрерывно дифференцируема в силу непрерывной дифференцируемости ее аргументов и требований дополнительной гладкости отображения N. Например,

$$\|N_u(t, v(t), q(t))\dot{v}(t) - N_u(t_0, v(t_0), q(t_0))\dot{v}(t_0)\|_{\mathcal{F}} \leqslant$$

$$\leqslant \|N_u(t, v(t), q(t))(\dot{v}(t) - \dot{v}(t_0))\|_{\mathcal{F}} + \|(N_u(t, v(t), q(t)) - N_u(t_0, v(t_0), q(t_0)))\dot{v}(t_0)\|_{\mathcal{F}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|\dot v(t)-\dot v(t_0)\|_{\mathcal U}+\|(N_u(t,v(t),q(t))-N_u(t_0,v(t_0),q(t_0)))\dot v(t_0)\|_{\mathcal F}\to 0$$

при $t\to t_0$, поскольку из сильной непрерывности семейства операторов

$$\{N_u(t,v(t),q(t))\in\mathcal L(\mathcal U;\mathcal F):t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\}$$

по теореме Банаха–Штейнгауза следует его равномерная ограниченность при малом $\delta>0$.

При этом функция $Mw(t)=-(I-Q)N(t,v(t),q(t))$ также непрерывна, а значит, решение непрерывно относительно нормы графика оператора M. □

4. Нелинейная обратная задача для линеаризованной системы Осколкова

Редуцируем задачу (0.1)–(0.4) к задаче Шоуолтера (3.17) для уравнения (3.1). Для этого обозначим через

$$\mathbb L_2=(L_2(\Omega))^3,\ \mathbb H^1=(W_2^1(\Omega))^3,\ \mathbb H^2=(W_2^2(\Omega))^3$$

соболевские пространства вектор-функций $w=(w_1,w_2,w_3)$, определенных в области Ω. Замыкание множества $\mathcal L=\{v\in(C_0^\infty(\Omega))^3:\nabla\cdot v=0\}$ по норме $\mathbb L_2$ обозначим через $\mathbb H_\sigma$, а по норме $\mathbb H^1$ — через $\mathbb H_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb H_\sigma^2=\mathbb H_\sigma^1\cap\mathbb H^2$. Обозначим через $\mathbb H_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb H_\sigma$ в $\mathbb L_2$, через $\Sigma:\mathbb L_2\to\mathbb H_\sigma$, $\Pi=I-\Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

В пространстве $\mathcal L$ рассмотрим оператор $A=\Sigma\nabla^2$. Известно (см. [14]), что оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb H_\sigma$ с областью определения $\mathbb H_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая, как известно, образует базис в $\mathbb H_\sigma$.

Пусть $\tilde v\in\mathbb H^1$. Тогда формулой $Dw=\nu\nabla^2w-(\tilde v\cdot\nabla)w-(w\cdot\nabla)\tilde v$ зададим оператор $D\in\mathcal L(\mathbb H_\sigma^2;\mathbb L_2)$.

Учитывая уравнение несжимаемости (0.2), положим

$$\mathcal U=\mathbb H_\sigma^2\times\mathbb H_\pi,\quad \mathcal F=\mathbb L_2=\mathbb H_\sigma\times\mathbb H_\pi. \tag{4.1}$$

В данном случае элемент $u\in\mathcal U$ имеет вид $u=(v,r)$, а элемент $f\in\mathcal F$ — вид $f=(g,h)$, где $g=\Sigma f$, $h=\Pi f$. Тогда формулой

$$L=\begin{pmatrix} I-\chi A & \mathbb O\\ -\chi\Pi\nabla^2 & \mathbb O\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

определяется оператор $L\in\mathcal L(\mathcal U;\mathcal F)$. Если $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, то $\ker L=\{0\}\times\mathbb H_\pi$. При заданном $\tilde v\in\mathbb H^1$ формулой

$$M=\begin{pmatrix} \Sigma D & \mathbb O\\ \Pi D & -I\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

определяется оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

Теорема 16. *Пусть пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ определены в* (4.1), *а операторы L и M — в* (4.2) *и* (4.3) *соответственно, $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-радиален, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\nabla^2(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\nabla^2(I-\chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для любого $v \in \mathbb{H}_\sigma$ имеем

$$\|(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} = \left(\|(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma} + \|A(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}_\sigma}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_k^2)|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|1-\chi\lambda_k|^2} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v,\varphi_k\rangle|^2 = C_1\|v\|_{\mathbb{H}_\sigma},$$

поэтому $(I-\chi A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)$. Следовательно,

$$\|D(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{L}_2} \leqslant C_2\|(I-\chi A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} \leqslant C_3\|v\|_{\mathbb{H}_\sigma}$$

и $D(I-\chi A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{L}_2)$.

Таким образом, обратный оператор

$$(\mu(I-\chi A) - \Sigma D)^{-1} = \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\right)^{-1}$$

существует и непрерывно действует из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{H}^2_\sigma$ при

$$|\mu| > \|\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}$$

в силу того, что $\chi \neq 0$, $(I-\chi A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)$. При таких $\mu \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu(I-\chi A) - \Sigma D & \mathbb{O} \\ -\mu\chi\Pi\nabla^2 - \Pi D & I \end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu(I-\chi A) - \Sigma D)^{-1} & \mathbb{O} \\ (\mu\chi\Pi\nabla^2 + \Pi D)(\mu(I-\chi A) - \Sigma D)^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Непрерывность оператора $D(I-\chi A)^{-1}$ из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$ доказана выше, непрерывность оператора $\nabla^2(I-\chi A)^{-1}$ из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$ доказывается аналогично. Следовательно, оператор

$$(\mu\chi\Pi\nabla^2 + \Pi D)(\mu(I-\chi A) - \Sigma D)^{-1} =$$

$$= \left(\chi\Pi\nabla^2 + \frac{1}{\mu}\Pi D\right)(I-\chi A)^{-1}\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\right)^{-1}$$

непрерывно действует из $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{H}_\pi$. Из всего сказанного следует, что при достаточно больших $|\mu|$ оператор $(\mu L - M)^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ непрерывен.

Далее,

$$R^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} (\mu - (I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-1} & \mathbb{O} \\ (\mu\chi\Pi\nabla^2 + \Pi D)(\mu - (I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-1} - \chi\Pi\nabla^2 & \mathbb{O} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-1} & \mathbb{O} \\ (\chi\Pi\nabla^2\frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \frac{1}{\mu}\Pi D)(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Здесь использованы преобразования

$$\chi\Pi\nabla^2 \left(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^{-1} - \chi\Pi\nabla^2 =$$

$$= \chi\Pi\nabla^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^k}\left((I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^k - \chi\Pi\nabla^2 = \chi\Pi\nabla^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^k}\left((I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^k =$$

$$= \chi\Pi\nabla^2 \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^k}\left((I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^k =$$

$$= \chi\Pi\nabla^2 \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D \left(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^{-1}.$$

У оператора $R^L_\mu(M)(\mu L - M)^{-1}$ второй столбец также нулевой, а первый имеет вид

$$\begin{array}{c} \frac{1}{\mu^2}(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-2}(I-\chi A)^{-1} \\ \left(\chi\Pi\nabla^2\frac{1}{\mu^2}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \frac{1}{\mu^2}\Pi D\right)(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-2}(I-\chi A)^{-1} \end{array},$$

поэтому для $f \in \mathbb{L}_2$

$$M(\mu L - M)^{-1}L^L_\mu(M)f = \begin{pmatrix} \Sigma D\frac{1}{\mu^2}(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-2}(I-\chi A)^{-1}\Sigma f \\ \Pi D\frac{1}{\mu^2}(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-2}(I-\chi A)^{-1}\Sigma f \end{pmatrix},$$

$$L^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi A)^{-1})^{-1} & \mathbb{O} \\ -\frac{1}{\mu}\chi\Pi\nabla^2(I-\chi A)^{-1}(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi A)^{-1})^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Из непрерывности оператора $\Sigma D : \mathbb{H}^2_\sigma \to \mathbb{H}_\sigma$ следует, что $(I-\chi A)^{-1}\Sigma D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)$. Поэтому при $\mu > a_1 = \|(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}$

$$\|(\mu - (I-\chi A)^{-1}\Sigma D)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)} \leqslant \frac{1}{\mu - a_1},$$

непрерывен оператор

$$\left(\chi\Pi\nabla^2\frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \frac{1}{\mu}\Pi D\right)\left(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^{-1} : \mathbb{H}^2_\sigma \to \mathbb{H}_\pi,$$

$$\left\|\left(\chi\Pi\nabla^2\frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D + \frac{1}{\mu}\Pi D\right)\left(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma;\mathbb{H}_\pi)} \leqslant \frac{C_4}{\mu - a_1}.$$

Далее,

$$\left\|\frac{1}{\mu^2}\left(I - \frac{1}{\mu}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^{-2}(I-\chi A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}^2_\sigma)} \leqslant \frac{C_5}{(\mu - a_1)^2}.$$

Аналогично оценивается второй элемент первого столбца рассматриваемой операторной матрицы $R^L_\mu(\mu L - M)^{-1}$ по норме в $\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}_\pi)$. Кроме того, при $f \in \mathbb{L}_2$

$$\|M(\mu L - M)^{-1}L^L_\mu(M)f\|_{\mathbb{L}_2} =$$

$$= \left\| D\frac{1}{\mu^2}\left(I - \mu^{-1}(I-\chi A)^{-1}\Sigma D\right)^{-2}(I-\chi A)^{-1}\Sigma f\right\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant \frac{C_6\|f\|_{\mathbb{L}_2}}{(\mu - a_1)^2}.$$

Наконец, заметим, что $\Sigma D(I-\chi A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$, и при выбранном значении параметра $\mu > a_2 = \|\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}$ выполняется

$$\left\|\frac{1}{\mu}\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} \leqslant \frac{1}{\mu - a_2},$$

$$\left\|-\frac{1}{\mu}\chi\Pi\nabla^2(I-\chi A)^{-1}\left(I - \frac{1}{\mu}\Sigma D(I-\chi A)^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma;\mathbb{H}_\pi)} \leqslant \frac{C_7}{\mu - a_2}.$$

Таким образом, оператор M сильно $(L,0)$-радиален. Формулы для проекторов нетрудно найти по формулам из теоремы 1 (ii). □

При $t \in [0,T]$ зададим матрицу размера $(3m)\times(3m)$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \psi^1_1(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^2)_1(x_1,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_1(x_1,t) \\ \psi^1_2(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^2)_2(x_1,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_2(x_1,t) \\ \psi^1_3(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^2)_3(x_1,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_3(x_1,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi^m_1(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^2)_1(x_m,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_1(x_m,t) \\ \psi^m_2(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^2)_2(x_m,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_2(x_m,t) \\ \psi^m_3(t) & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^2)_3(x_m,t) & \dots & ((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^{3m})_3(x_m,t) \end{pmatrix},$$

где $((I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j)_k$ — k-я компонента вектор-функции $(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j$, $k = 1,2,3$, $j = 2,\dots,3m$.

Теорема 17. *Пусть $n < 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $v_0 \neq 0$ при $\alpha < 1$, $b \in C([0,T];\mathbb{R})$, $f^j \in C([0,T];\mathbb{L}_2)$, $j = 2,\dots,3m$, $\psi^i \in C^1([0,T];\mathbb{R}^3)$, $i = 1,\dots,m$, $\det\Lambda(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,T]$, выполняются условия согласования $v_0(x_i) = \psi^i(0)$, $i = 1,\dots,m$. Тогда при некотором $T_1 \in (0,T]$ слабое решение $v \in C([0,T_1];\mathbb{H}_\sigma)$, $r \in C([0,T_1];\mathbb{H}_\pi)$, $q_j \in C([0,T_1];\mathbb{R})$, $j = 1,2,\dots,3m$, обратной задачи* (0.1)–(0.5) *на отрезке* $[0,T_1]$ *существует и единственно.*

Доказательство. Сразу заметим, учитывая вид проектора P в утверждении теоремы 16, что задача (0.4) для системы (0.1)–(0.3) является обобщенной задачей Шоуолтера. При этом $\mathcal{F}^0 = \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{F}^1 = \mathbb{H}_\sigma$, $\mathcal{U}^0 = \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{U}^1$ изоморфно $\mathbb{H}^2_\sigma$. Отсюда следует требование $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma = D(M_1)$. Поэтому, опять же в силу теоремы 16, доказательство можно свести к проверке условий теоремы 11.

Положим $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{3m}$, тогда для $q = (q_1,q_2,\dots,q_{3m})$

$$N(t,v,r,q) = q_1(1-\chi\nabla^2)v + b\|v\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}v + \sum_{j=2}^{3m} q_j f^j(\cdot,t) = N(t,v,q) = N(t,Pu,q) \in \mathcal{F},$$

поскольку $f^j(\cdot,t)\in\mathbb{L}_2$.

Так как

$$Bu=B(v,r)=\begin{pmatrix} v(x_1)\\ \dots\\ v(x_m)\end{pmatrix}\in\mathcal{Y},$$

а при размерности области $n<4$ имеет место вложение $W_2^2(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$, то

$$\|v(x_i)\|_{\mathbb{R}^3}\leqslant\max_{x\in\overline{\Omega}}\|v(x)\|_{\mathbb{R}^3}=\|v\|_{C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)}\leqslant C\|v\|_{(W_2^2(\Omega))^3},$$

и поэтому $B\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$. Имеем $B(0,r)=0$, следовательно, $\mathcal{U}^0\subset\ker B$. Так как $M\in\mathcal{L}(\mathcal{U})$, то автоматически выполняется условие $\overline{BL_1^{-1}M_1}\in\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{Y})$. Осталось проверить условия (2.4), (A)–(D).

Отметим, что $L_1^{-1}=(I-\chi A)^{-1}$. В условии (2.4) возьмем

$$g_2(t,v,q)=L_1^{-1}Q\left(q_1(1-\chi\nabla^2)v+\sum_{j=2}^{3m}q_jf^j(\cdot,t)\right)=q_1v+\sum_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(\cdot,t),$$

$$g_1(t,v)=b(t)\|v\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}(I-\chi A)^{-1}v.$$

Тогда уравнение

$$\begin{pmatrix} q_1v_0(x_1)+\sum\limits_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(x_1,0)\\ \dots\\ q_1v_0(x_m)+\sum\limits_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(x_m,0)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (\psi^1)'(0)-(I-\chi A)^{-1}\Sigma Dv_0(x_1)-b(0)\|v_0\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}(I-\chi A)^{-1}v(x_1)\\ \dots\\ (\psi^m)'(0)-(I-\chi A)^{-1}\Sigma Dv_0(x_m)-b(0)\|v_0\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}(I-\chi A)^{-1}v(x_m)\end{pmatrix}$$

относительно вектора $q\in\mathcal{Y}$ имеет единственное решение в силу условия $\det\Lambda(0)\neq0$, поэтому выполняется условие (A).

Далее,

$$Bg_2(t,v,q)=\begin{pmatrix} q_1v(x_1)+\sum\limits_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(x_1,t)\\ \dots\\ q_1v(x_m)+\sum\limits_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(x_m,t)\end{pmatrix}=g_3(t,Bv,q).$$

Следовательно, условие (B) выполняется.

Из равенства

$$y=g_3(t,\Psi(t),q)=\begin{pmatrix} q_1\psi^1(t)+\sum\limits_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(x_1,t)\\ \dots\\ q_1\psi^m(t)+\sum\limits_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(x_m,t)\end{pmatrix}$$

следует, что в условии (C) $q = \Phi(t,y) = \Lambda(t)^{-1}y$ при всех $t \in [0,T]$, $y, q \in \mathcal{Y}$. Из того, что $f^j \in C([0,T];\mathbb{L}_2)$, следует включение $(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j \in C([0,T];\mathbb{H}^2)$ и поэтому по теореме вложения Соболева все элементы матрицы Λ, а значит, и $\det\Lambda$, непрерывны по t на $[0,T]$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса $|\det\Lambda|$ достигает своего минимума на этом отрезке. Этот минимум больше нуля, поскольку $\det\Lambda$ не обращается в ноль на отрезке $[0,T]$. Поэтому Φ — непрерывное по (t,y) отображение на $[0,T]\times\mathcal{Y}$. Кроме того, из сказанного следует, что элементы обратной матрицы Λ^{-1} также непрерывны по t на $[0,T]$ и для всех $t \in [0,T]$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|\Phi(t,y_1) - \Phi(t,y_2)| \leqslant \max_{t\in[0,T]} \|\Lambda(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{3m})} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^{3m}}.$$

Это означает выполнение условия (D).

При любом $R > 0$ для всех (t, v^1, q^1), $(t, v^2, q^2) \in S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$ выполняется

$$\begin{gathered}
\|g_2(t,v^1,q^1) - g_2(t,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant \\
\leqslant \left\| q_1^1 v^1 - q_1^2 v^2 + \sum_{j=2}^{3m} \left(q_j^1 - q_j^2\right)(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(\cdot,t) \right\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant \\
\leqslant (\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + R)\cdot|q_1^1 - q_1^2| + (\|q_0\|_{\mathbb{R}^{3m}} + R)\cdot\|v^1 - v^2\|_{\mathbb{H}^2} + \\
+ C_1 \sum_{j=2}^{3m} \left|q_j^1 - q_j^2\right| \max_{s\in[0,T]} \left\|f^j(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C_2\left(\|q^1 - q^2\|_{\mathbb{R}^{3m}} + \|v^1 - v^2\|_{\mathbb{H}^2}\right),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\|g_1(t,v^1) - g_1(t,v^2)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant |b(t)| \left\| \|v^1\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v^1 - \|v^2\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v^2 \right\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant \\
\leqslant b_0\|v^1\|^\alpha_{\mathbb{L}_2} \left\|(I-\chi A)^{-1}(v^1 - v^2)\right\|_{\mathbb{H}^2} + b_0\left\|(I-\chi A)^{-1}v^2\right\|_{\mathbb{H}^2} \left| \|v^1\|^\alpha_{\mathbb{L}_2} - \|v^2\|^\alpha_{\mathbb{L}_2} \right| \leqslant \\
\leqslant C_3(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + R)^\alpha \left\|v^1 - v^2\right\|_{\mathbb{L}_2} + C_4(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + R)\left| \|v^1\|_{\mathbb{L}_2} - \|v^2\|_{\mathbb{L}_2} \right| \leqslant C_5\left\|v^1 - v^2\right\|_{\mathbb{H}^2},
\end{gathered}$$

где $b_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} |b(t)|$. При $\alpha < 1$ для справедливости предпоследнего неравенства требуется выполнение условий $v_0 \neq 0$, $R < \|v_0\|_{\mathbb{H}^2}$, поскольку используется ограниченность в шаре с центром в v_0 выражения $\|v\|^{\alpha-1}_{\mathbb{H}^2}$. Здесь использовано вытекающее из формулы Лагранжа неравенство

$$|x_1^\alpha - x_2^\alpha| \leqslant |\alpha| x_3^{\alpha-1}|x_1 - x_2|,$$

где $0 \leqslant x_1 = \|v^1\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant x_2 = \|v^2\|_{\mathbb{L}_2}$, $x_3 \in [x_1, x_2]$.

Тем самым доказана липшицевость отображений g_1, g_2 на множестве $S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$. Докажем непрерывность их по совокупности переменных. Для всех троек (t,v^1,q^1), $(s,v^2,q^2) \in S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$ также выполняется

$$\begin{gathered}
\|g_2(t,v^1,q^1) - g_2(s,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant \\
\leqslant \|g_2(t,v^1,q^1) - g_2(t,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2} + \|g_2(t,v^2,q^2) - g_2(s,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant \\
\leqslant C_1\left(\|q^1 - q^2\|_{\mathbb{R}^{3m}} + \|v^1 - v^2\|_{\mathbb{H}^2}\right) + C_2 \sum_{j=2}^{3m} \left|q_j^2\right| \left\|f^j(\cdot,t) - f^j(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}_2},
\end{gathered}$$

$$\|g_1(t,v^1)-g_1(s,v^2)\|_{\mathbb{H}^2}\leqslant\|g_1(t,v^1)-g_1(t,v^2)\|_{\mathbb{H}^2}+\|g_1(t,v^2)-g_1(s,v^2)\|_{\mathbb{H}^2}\leqslant$$
$$\leqslant C_3\|v^1-v^2\|_{\mathbb{H}^2}+C_4|b(t)-b(s)|\left|\|v^2\|_{\mathbb{H}^2}^{\alpha+1}\right..$$

Из полученных неравенств в силу непрерывности b и непрерывности по переменной t функций f^j, $j=2,3,\dots,3m$, в пространстве $\mathbb{L}_2$ следует непрерывность отображений g_1, g_2 на множестве $S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$ по совокупности переменных. Отсюда следует выполнение условия (E).

Осталось доказать непрерывность по совокупности переменных отображения N. Имеем

$$\|N(t+s,v+w,q+\delta)-N(t,v,q)\|_{\mathbb{L}_2}\leqslant|q_1+\delta_1|\|(I-\chi\nabla^2)w\|_{\mathbb{L}_2}+|\delta_1|\|(I-\chi\nabla^2)v\|_{\mathbb{L}_2}+$$
$$+\left\|b(t+s)\|v+w\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}(v+w)-b(t)\|v\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}v\right\|_{\mathbb{L}_2}+$$
$$+\sum_{j=2}^{3m}|q_j+\delta_j|\left\|f^j(\cdot,t+s)-f^j(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}_2}+\sum_{j=2}^{3m}|\delta_j|\left\|f^j(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}_2}\leqslant$$
$$\leqslant C_1|q_1+\delta_1|\|w\|_{\mathbb{H}^2}+C_1|\delta_1|\|v\|_{\mathbb{H}^2}+$$
$$+|b(t+s)-b(t)|\|v+w\|^{\alpha+1}_{\mathbb{L}_2}+|b(t)|\left|\|v+w\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}-\|v\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}\right|\|v\|_{\mathbb{L}_2}+|b(t)|\|v\|^\alpha_{\mathbb{L}_2}\|w\|_{\mathbb{L}_2}+$$
$$+\sum_{j=2}^{3m}|q_j+\delta_j|\left\|f^j(\cdot,t+s)-f^j(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}_2}+\sum_{j=2}^{3m}|\delta_j|\left\|f^j(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}_2}\to 0$$

при $s\to 0$, $\|w\|_{\mathbb{L}_2}\to 0$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_{3m})\to 0$.

Теперь воспользуемся теоремой 11 и получим требуемое. □

Теорема 18. *Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$, $v_0\in\mathbb{H}^2_\sigma$, $v_0\neq 0$ при $\alpha<3$, $b\in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $f^j\in C^1([0,T];\mathbb{L}_2)$, $j=2,\dots,3m$, $\psi^i\in C^2([0,T];\mathbb{R}^3)$, $i=1,\dots,m$, $\det\Lambda(t)\neq 0$ для всех $t\in[0,T]$, выполняются условия согласования $v_0(x_i)=\psi^i(0)$, $i=1,\dots,m$. Тогда при некотором $T_1\in(0,T]$ гладкое решение $v\in C^1([0,T_1];\mathbb{H}_\sigma)$, $r\in C^1([0,T_1];\mathbb{H}_\pi)$, $q_j\in C^1([0,T_1];\mathbb{R})$, $j=1,2,\dots,3m$, обратной задачи (0.1)–(0.5) на отрезке $[0,T_1]$ существует и единственно.*

Доказательство. С учетом предыдущей теоремы остается доказать выполнение условий (D_1), (E_1) при $\mathcal{X}=\mathcal{U}^1$, $g=L_1^{-1}QN$, $A=L_1^{-1}M_1$, $v_0=u_0$ и сослаться на теорему 15.

Отображение $q=\Phi(t,y)=\Lambda(t)^{-1}y$ двух переменных дифференцируемо,

$$\Phi_t(t,y)=-\Lambda(t)^{-1}\Lambda'(t)\Lambda(t)^{-1}y.$$

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать по t тождество $\Lambda(t)\Lambda(t)^{-1}y\equiv y$:

$$\Lambda'(t)\Lambda(t)^{-1}y+\Lambda(t)\left(\Lambda(t)^{-1}y\right)'_t=0.$$

Непрерывность Φ_t по (t,y) очевидна в силу непрерывности $\Lambda(t)^{-1}$ (см. доказательство предыдущей теоремы) и непрерывной дифференцируемости $\Lambda(t)$. При этом

$$\|\Phi_t(t,y^1)-\Phi_t(t,y^2)\|_{\mathbb{H}^2}\leqslant\max_{t\in[0,T]}\|\Lambda(t)^{-1}\Lambda'(t)\Lambda(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{3m})}\|y^1-y^2\|_{\mathbb{R}^{3m}},$$

где максимум существует по теореме Вейерштрасса.

Кроме того, производная $\Phi_y(t,y)=\Lambda(t)^{-1}$ непрерывна по (t,y) и липшицева по y.

Производная $g_{1t}(t,v)=b'(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v$ непрерывна в норме $\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2_\sigma$ по совокупности переменных (t,v). При этом для всех $(t,v^1,q^1),(t,v^2,q^2)\in S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$

$$\|g_{1t}(t,v^1)-g_{1t}(t,v^2)\|_{\mathbb{H}^2}\leqslant C_1|b'(t)|\left(\|v^1\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}-\|v^2\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}\right)\|v^1\|_{\mathbb{H}^2}+$$

$$+C_1|b'(t)|\|v^2\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}\left(\|v^1\|_{\mathbb{H}^2}-\|v^2\|_{\mathbb{H}^2}\right)\leqslant C_2\|v^1-v^2\|_{\mathbb{H}^2}.$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, в случае $\alpha<1$ потребуем чтобы $v_0\neq 0$, при этом возьмем $R<\|v_0\|_{\mathbb{H}^2}$.

Для $(t,v,q^1),(t,v+h,q^2)\in S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$

$$g_1(t,v+h)-g_1(t,v)=b(t)\|v+h\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+h)-b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v=$$

$$b(t)\langle v+h,v+h\rangle^{\frac{\alpha}{2}}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+h)-b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+h)+b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h=$$

$$=b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}\left(1+2\|v\|^{-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v,h\rangle_{\mathbb{L}_2}+\|v\|^{-2}_{\mathbb{L}_2}\|h\|^2_{\mathbb{L}_2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}(I-\chi A)^{-1}(v+h)-$$

$$-b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+h)+b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h=$$

$$=\alpha b(t)\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v+b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h+o\left(\|h\|_{\mathbb{L}_2}\right).$$

Таким образом,

$$g_{1v}(t,v)h=\alpha b(t)\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v+b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h,$$

поэтому при $(t,v,q^1),(t+s,v+w,q^2)\in S_{\mathbb{H}^2_\sigma\times\mathbb{R}^{3m}}((v_0,q_0),R,T)$

$$\|g_{1v}(t+s,v+w)-g_{1v}(t,v)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma)}=$$

$$=\sup_{\|h\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}=1}\Big\|\alpha b(t+s)\|v+w\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v+w,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+w)+$$

$$+b(t+s)\|v+w\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h-$$

$$-\alpha b(t)\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}v-b(t)\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h\Big\|_{\mathbb{H}^2}=$$

$$=\sup_{\|h\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}=1}\Big\|\alpha(b(t+s)-b(t))\|v+w\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v+w,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+w)+$$

$$+\alpha b(t)\left(\|v+w\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}-\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\right)\langle v+w,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+w)+$$

$$+\alpha b(t)\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle w,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}(v+w)+\alpha b(t)\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\langle v,h\rangle_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}w+$$

$$+(b(t+s)-b(t))\|v+w\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}(I-\chi A)^{-1}h+$$

$$+b(t)\left(\|v+w\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}-\|v\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}\right)(I-\chi A)^{-1}h\Big\|_{\mathbb{H}^2}\leqslant$$

$$\leqslant C_1|b(t+s)-b(t)|\|v+w\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_2}+C_1|b(t)|\left|\|v+w\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}-\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\right|\|v+w\|^2_{\mathbb{L}_2}+$$

$$+C_1|b(t)|\|v\|^{\alpha-2}_{\mathbb{L}_2}\|w\|_{\mathbb{L}_2}\|v+w\|_{\mathbb{L}_2}+C_1|b(t)|\|v\|^{\alpha-1}_{\mathbb{L}_2}\|w\|_{\mathbb{L}_2}+$$

$$+C_2|b(t+s)-b(t)|\|v+w\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}+C_2|b(t)|\left|\|v+w\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}-\|v\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}\right|.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $s \to 0$, $\|w\|_{\mathbb{H}^2} \to 0$, что означает непрерывность в операторной норме производной g_{1v} по совокупности переменных.

Возьмем $s=0$, $v+w=v^1$, $v=v^2$, тогда

$$\|g_{1v}(t,v^1)-g_{1v}(t,v^2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1|b(t)|\left|\|v^1\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha-2}-\|v^2\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha-2}\right|\|v^1\|_{\mathbb{L}_2}^{2}+C_1|b(t)|\|v^2\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha-2}\|v^1-v^2\|_{\mathbb{L}_2}\|v^1\|_{\mathbb{L}_2}+$$

$$+C_1|b(t)|\|v^2\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha-1}\|v^1-v^2\|_{\mathbb{L}_2}+C_2|b(t)|\left|\|v^1\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}-\|v^2\|_{\mathbb{L}_2}^{\alpha}\right| \leqslant C_3\|v^1-v^2\|_{\mathbb{H}^2}.$$

При $\alpha<3$ считаем, что $v_0\neq 0$, $R<\|v_0\|_{\mathbb{H}^2}$.

Наконец, непосредственно вычисляются соотношения

$$g_{2t}(t,v,q)=\sum_{j=2}^{3m}q_j(I-\chi A)^{-1}\Sigma\frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t}, \quad g_{2v}(t,v,q)h=q_1h,$$

$$g_{2q_1}(t,v,q)=v, \quad g_{2q_j}(t,v,q)=(I-\chi A)^{-1}\Sigma f^j(\cdot,t),\ j=2,\ldots,3m,$$

$$\|g_{2t}(t+s,v+w,q+\delta)-g_{2t}(t,v,q)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{j=2}^{3m}|q_j+\delta_j|\left\|\frac{\partial f^j(\cdot,t+s)}{\partial t}-\frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}_2}+C_1\sum_{j=2}^{3m}|\delta_j|\left\|\frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}_2}\to 0$$

при $s\to 0$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{3m})\to 0$,

$$\|g_{2t}(t,v^1,q^1)-g_{2t}(t,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant C_1\sum_{j=2}^{3m}|q_j^1-q_j^2|\left\|\frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C_2\|q^1-q^2\|_{\mathbb{R}^{3m}},$$

$$\|g_{2v}(t+s,v+w,q+\delta)-g_{2v}(t,v,q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2)}=\sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_\sigma^2}=1}\|\delta_1 h\|_{\mathbb{H}^2}=|\delta_1|\to 0$$

при $\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{3m})\to 0$,

$$\|g_{2v}(t,v^1,q^1)-g_{2v}(t,v^2,q^2)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2)} \leqslant \|q^1-q^2\|_{\mathbb{R}^{3m}},$$

$$\|g_{2q_1}(t+s,v+w,q+\delta)-g_{2q_1}(t,v,q)\|_{\mathbb{H}^2}=\|w\|_{\mathbb{H}^2}\to 0$$

при $\|w\|_{\mathbb{H}^2}\to 0$,

$$\|g_{2q_1}(t,v^1,q^1)-g_{2q_1}(t,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2}=\|v^1-v^2\|_{\mathbb{H}^2},$$

$$\|g_{2q_j}(t+s,v+w,q+\delta)-g_{2q_j}(t,v,q)\|_{\mathbb{H}^2} \leqslant C_1\|f^j(\cdot,t+s)-f^j(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}_2}\to 0$$

при $s\to 0$,

$$\|g_{2q_j}(t,v^1,q^1)-g_{2q_j}(t,v^2,q^2)\|_{\mathbb{H}^2}=0.$$

Тем самым доказана непрерывность в операторной норме и липшицевость всех производных отображения $g_2 = L_1^{-1}QN$. Аналогично доказываются эти же свойства операторов

$$N_t(t,v,q) = \sum_{j=2}^{3m} q_j \frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t}, \quad N_v(t,v,q)h = q_1(I-\chi\nabla^2)h,$$

$$N_{q_1}(t,v,q) = (I-\chi\nabla^2)v, \quad N_{q_j}(t,v,q) = f^j(\cdot,t), \ j=2,\ldots,3m.$$

Действительно,

$$\|N_t(t+s,v+w,q+\delta) - N_t(t,v,q)\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=2}^{3m} |q_j+\delta_j| \left\| \frac{\partial f^j(\cdot,t+s)}{\partial t} - \frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}_2} + \sum_{j=2}^{3m} |\delta_j| \left\| \frac{\partial f^j(\cdot,t)}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}_2} \to 0$$

при $s \to 0$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{3m}) \to 0$,

$$\|N_v(t+s,v+w,q+\delta) - N_v(t,v,q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}^2;\mathbb{L}_2)} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}^2_\sigma}=1} \|\delta_1(I-\chi\nabla^2)h\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C_1|\delta_1| \to 0$$

при $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{3m}) \to 0$,

$$\|N_{q_1}(t+s,v+w,q+\delta) - N_{q_1}(t,v,q)\|_{\mathbb{L}_2} = \|(I-\chi\nabla^2)w\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C_2\|w\|_{\mathbb{H}^2} \to 0$$

при $\|w\|_{\mathbb{H}^2} \to 0$,

$$\|N_{q_j}(t+s,v+w,q+\delta) - N_{q_j}(t,v,q)\|_{\mathbb{L}_2} = \|f^j(\cdot,t+s) - f^j(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}_2} \to 0$$

при $s \to 0$. Тем самым выполнены все условия теоремы 15. □

Список литературы

1. **Осколков, А. П.** Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

2. **Kozhanov, A. I.** Composite Type Equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov / Utrecht : VSP, 1999.

3. **Abasheeva, N. L.** Determination of a right-hand side term in an operator-differential equation of mixed type / N. L. Abasheeva // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2002. — Vol. 10, № 6. — P. 547–560.

4. **Fedorov, V. E.** An inverse problem for linear Sobolev type equations / V. E. Fedorov, A. V. Urazaeva // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2004. — Vol. 12. — P. 387–396.

5. **Al Horani, M.** An identification problem for first-order degenerate differential equations / M. Al Horani, A. Favini // J. of Optimization Theory and Applications. — 2006. — Vol. 130. — P. 41–60.

6. **Аниконов, Ю. Е.** Обратные задачи для эволюционных уравнений [Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: «Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с приложением в математической физике и гравимагниторазведке»] / Ю. Е. Аниконов, Н. Л. Абашеева, Н. Б. Аюпова, А. И. Кожанов, М. В. Нещадим, И. Р. Валитов // Сиб. электрон. мат. изв. — 2008. — Вып.5. — С. 549–580.
7. **Уразаева, А. В.** Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Фёдоров // Дифференц. уравнения. — 2008. — Вып. 44. — С. 1111–1119.
8. **Уразаева, А. В.** О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений / А. В. Уразаева, В. Е. Фёдоров // Мат. заметки. — 2009. — Т. 85, вып. 3. — С. 440–450.
9. **Фёдоров, В. Е.** Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа / В. Е. Фёдоров, А. В. Уразаева // Неклассические уравнения математической физики : сб. науч. работ. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики. — 2010. — С. 293–310.
10. **Фёдоров, В. Е.** Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Фёдоров // Алгебра и анализ. — 2000. — № 12. — С. 173–200.
11. **Prilepko, A. I.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — N. Y. ; Basel : Marcel Dekker Inc., 2000.
12. **Фёдоров, В. Е.** Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов / В. Е. Фёдоров // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2009. — № 20 (158). Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. — С. 12–19.
13. **Хилле, Э.** Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : Иностр. лит., 1962.
14. **Ладыженская, О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М. : Физматлит, 1961.