



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Плаксин, Об одном вопросе Хуа Ло Кена,
Матем. заметки, 1990, том 47, выпуск 3, 78–90

<https://www.mathnet.ru/mzm3198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

14 мая 2025 г., 08:08:01



ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ХУА ЛО КЕНА

В. А. Плаксин

§ 1. Введение. Монтгомери и Вон [1] установили степенную оценку для количества четных чисел $N \leq X$, непредставимых суммой двух простых чисел. Цель настоящей работы — доказательство подобной оценки (вместо оценки $O(X \ln^{-\gamma} X)$ с $\gamma < k/(k+2)$ Хуа Л. К. [2]) в случае уравнений $N = p_1 + p_2^k$, $N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^k$ и др., где k — фиксированное целое число и p_j — простые числа.

ТЕОРЕМА 1. При $k \geq 2$ чисел $N \leq X$ с условием $(N-1, \prod_{\varphi(p) \mid k} p) = 1$, непредставимых в виде $N = p_1 + p_2^k$, меньше $\ll X^\gamma$; где $\gamma < 1$ всегда и $\gamma < 1 - 1/137k^3 \ln k$ при k достаточно большим.

Пусть $\Phi(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ — примитивная форма (т. е. $(a_0, b_0, c_0) = 1$) с дискриминантом Δ_0 , $\rho(q, N)$ означает число решений сравнения

$$\Phi(u, v) + w^k \equiv N \pmod{q}, \quad (uvw, q) = 1; \quad (1)$$

$k_0 = k$ при $2 \nmid k$ и $k_0 = 2k$ при $2 \mid k$, $p^{v_0} \parallel (\Delta_0, k_0)$ и $K = \prod p^{v_0+1}$, где $p \mid 30\Delta_0$ или $p \mid (N-1)$ и $\varphi(p) \mid k$.

ТЕОРЕМА 2. При $k \geq 2$ и $\Delta_0 \neq 0$ чисел $N \leq X$ с условием $\rho(K, N) > 0$, непредставимых в виде $N = \Phi(p_1, p_2) + p_3^k$, меньше $\ll X^\gamma$; где γ — постоянная из теоремы 1.

Все постоянные в теоремах эффективно вычислимы. Как и в работе [1] (случай $k=1$), мы ищем количество решений уравнения в среднем по N . Основу рассуждений составляют метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова [3] и эффект Линника — Дейринга — Хейлбронна [4]. Трудность изучения случая $k > 1$ связана с плохой сходимостью особых рядов уравнений и преодолевается соединением рассуждений [5, 2] с методом большого решета Ю. В. Линника [4] (подробнее см. § 4). Для родственных уравнений $N = p_1 + p_2^k$ и $N = p_1 p_2 + p_3^k$, как и в [1], для количества представлений большей части чисел $N \leq X$ мы получаем лишь слабую нижнюю оценку, зависящую от «зигелевского нуля». В остальных случаях теоремы 2 нижняя оценка близка к ожидае-

мой асимптотике. В отличии от [1] наши рассуждения вместе с результатом Мотохаша [6] (подробнее см. § 5) дают доказательство теорем 1 и 2, полностью не зависящее от плотностных методов теории L -функций Дирихле. Мы подробно рассмотрим доказательство теоремы 2 (§ 2—§ 8).

Замечания к доказательству теоремы 1 собраны в конце (§8).

Результаты настоящей работы автор анонсировал в [7, с. 203] и депонировал (см. РЖМ, 1985, 3А131 и 5А137). Независимо А. И. Виноградов [8], используя плотностные методы и тэта-функции, получил степенную оценку в случае $N = p + n^k$.

§ 2. Схема доказательства теоремы 2. Достаточно оценить количество исключительных чисел N на интервале $X/2 < N \leq X$. В дальнейшем $c_j > 0$ — постоянные числа, $\rho_0 = 1/17k^2 (2 \ln k + \ln \ln k + 2,8)$, параметры $\varepsilon \leq \rho_0/4$ и $\delta \leq 1/5$ определим в § 7; $X \geq X_0$ ($\Phi, k, \delta, \varepsilon$), $\mathcal{L} = \ln X$, $P^k = X$, $Q = X^{17\varepsilon}$, $\Delta X = Q$. ϑ и B — функции с условием $|\vartheta| \leq 1$ и $|B| \leq k^c$, равномерно по $k, \delta, \varepsilon, X$. Постоянные в знаках O и \ll могут зависеть от k, δ, ε .

Ради определенности пусть область $x, y > 0$, $\Phi(x, y) > 0$ непуста. Обозначим через $\Omega = \Omega(X)$ область $x, y > 0$, $\delta X < \Phi(x, y) \leq X$ без секторов в δ радиан, прилегающих к осям координат и (случай $\Delta_0 > 0$) асимптотам гиперболы $\Phi(x, y) = 1$. Считаем $\delta \leq \delta_0$, так что Ω — непусто, ω — интервал $z > 0$, $\delta X < z^k \leq X$, λ_n равно $\ln p$ при $n = p$ и 0 в противном случае. Мы применим метод И. М. Виноградова к

$$\kappa(N) = \sum_{\substack{\Omega, \omega \\ \Phi(x, y) + z^k = N}} \lambda_x \lambda_y \lambda_z.$$

Представим $\kappa(N)$ в виде интеграла от сумм ($e(\alpha) = \exp(2\pi i \alpha)$)

$$S_\Phi = \sum_{\Omega} e(\alpha \Phi(x, y)) \lambda_x \lambda_y, \quad S_k = \sum_{\omega} e(\alpha z^k) \lambda_z,$$

и разобьем интеграл на два: по множеству больших дуг $|\alpha - a/q| \leq \Delta$ с $q \leq Q$, $0 < a \leq q$, $(a, q) = 1$ и по множеству малых дуг. Отсюда

$$\kappa(N) = \kappa_1(N) + \kappa_2(N), \quad \kappa_2(N) = \int_m S_\Phi S_k e(-\alpha N) dz.$$

Интеграл по множеству больших дуг благодаря свойству ортогональности характеров Дирихле представим в виде

$$\kappa_1(N) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi} u(q, N, \bar{\chi}) I(N, \chi), \quad (2)$$

где через χ обозначали тройку характеров $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \pmod q$,

$$\begin{aligned} \varphi^3(q) u(q, N, \chi) &= \\ &= \sum_{\substack{a, u, v, w=1 \\ (auv, q)=1}}^q \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(w) e\left(\frac{a(\Phi(u, v) + w^k - N)}{q}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

$I(N, \chi) = \int_{-\Delta}^{\Delta} V_\Phi V_k e(-\eta N) d\eta$ и суммы V_Φ, V_k равны

$$\sum_{\Omega} \chi_1(x) \chi_2(y) e(\eta \Phi(x, y)) \lambda_x \lambda_y, \quad \sum_{\omega} \chi_3(z) e(\eta z^k) \lambda_z. \quad (4)$$

Пусть $\xi_j \bmod r_j$ — примитивный характер, индуцирующий характер $\chi_j \bmod q$, и $q = mr$, где $(m, r) = 1$, $r_* \parallel [r_1, r_2, r_3] \mid r$ и $r_* = \prod_{p \mid r} p$. Переменные в суммах (4) — простые числа $> Q$ и $q \leq Q$, поэтому $I(N, \chi) = I(N, \xi)$. Сумма (3) мультипликативна: если характер $\chi_j \bmod q$ равен произведению $\chi'_j \bmod q'$ и $\chi''_j \bmod q''$ с $(q', q'') = 1$, то $u(q, N, \chi) = u(q', N, \chi') \cdot u(q'', N, \chi'')$. Пусть $\chi_0 \bmod q$ и $\xi_0 \bmod 1$ — главные характеры,

$$u(q, N) = u(q, N, \xi_0, \xi_0, \xi_0) \text{ и } A_r(N, x) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, r) = 1}}$$

Теперь из (2) вытекает формула

$$\kappa_1(N) = \sum_{r \leq Q} \sum_{\xi} u(r, N, \xi) I(N, \xi) A_r(N, Q/r), \quad (5)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_j \bmod r_j$ и $r_* \parallel [r_1, r_2, r_3] \mid r$.

Оценим $\kappa_2(N)$. Каждая точка \mathfrak{m} лежит в Δ/q окрестности некоторой несократимой дроби a/q с $Q < q \leq 1/\Delta$. Из [3] теоремы 7.1 при $\alpha \in \mathfrak{m}$, суммируя по частям, найдем

$$S_k \ll P^{1+\varepsilon} \max \{P^{-\rho_0}, Q^{-1/2k}\} \ll P^{1-3\varepsilon}.$$

Отсюда в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{N \leq X} |\kappa_2(N)|^2 \leq \int_{\mathfrak{m}} |S_{\Phi} S_k|^2 d\alpha \ll P^{2-6\varepsilon} \int_0^1 |S_{\Phi}|^2 d\alpha \ll X P^{2-5\varepsilon}.$$

Следовательно, $\kappa_2(N) \ll P^{1-2\varepsilon}$ для почти всех чисел N , за исключением $\ll X \cdot P^{-\varepsilon}$.

§ 3. Функции u и ρ . Пусть $\nabla_q(u, v, w)$ обозначает условие (1) и

$$\rho(q, N, \chi) = \sum_{\nabla_q(u, v, w)} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(w).$$

Функция ρ мультипликативна в том же смысле, что и функция u . Из теории сравнений (см., например, [9, § 4, 5в, § 5.4] и [10, лемма 2]) имеем лемму.

ЛЕММА 1. В сравнении (1) с $q = p^\alpha$ и $\alpha > \nu_0$ каждое решение имеет p^2 продолжений при переходе от $\bmod q$ к $\bmod qp$.

В случае $r = p^\alpha > 1$, $[r_1, r_2, r_3] = p^\rho \leq r$ и, например, $r_1 = = p^\rho$ из представления $\varphi^3(r)$ и (r, N, ξ) разностью

$$r \sum_{\nabla_r(u, v, w)} \xi_1(u) \xi_2(v) \xi_3(w) - \frac{r}{p} \sum_{\nabla_{r/p}(u, v, w)} \xi_1(u) \xi_2(v) \xi_3(w), \quad (6)$$

где $u, v, w \pmod r$ и $p \nmid uvw$ по лемме 1, вытекает

$$u(p^\alpha, N, \xi) = 0 \quad (7)$$

при $\alpha > \rho$ и $\alpha > \nu_0 + 1$. Если $\alpha = \rho$ и $u = U + tp^{\alpha-1}$, то вторая из сумм (6) имеет множитель

$$\sum_{u=1}^{p-1} \xi_1(u) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{t=0}^{p-1} \xi_1(U + tp^{\alpha-1}) = 0$$

соответственно в случаях $\alpha = 1$ или $\alpha > 1$; поэтому при $\alpha = \rho$ имеем

$$u(p^\alpha, N, \xi) = p^\alpha \rho(p^\alpha, N, \xi) / \varphi^3(p^\alpha). \quad (8)$$

Пусть G_r обозначает множество троек характеров ξ с условием $r_* || [r_1, r_2, r_3] || r || [r_1, r_2, r_3] \Delta_0$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 2. $u(p^\alpha, N) = 0$ при $\alpha > v_0 + 1$. В сумме (5) $u(r, N, \xi) = 0$ при $\xi \notin G_r$. Любая ξ принадлежит B -множеству G_r .

Из (6) и (7) также найдем при $n > v_0$

$$\pi_p(N) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} u(p^\alpha, N) = p^n \rho(p^n, N) / \varphi^3(p^n). \quad (9)$$

Пусть $l(m) = (\Delta_0/m)$ обозначает символ Лежандра—Якоби. В случае $p \nmid 2\Delta_0$ известно [10], что $R(p, M)$ — число решений сравнения $\Phi(x, y) \equiv M \pmod{p}$ с $p \nmid (x, y)$ равно $p - l(p)$ при $p \nmid M$ и $[p - l(p)][1 + l(p)]$ при $p \mid M$.

ЛЕММА 3. $\rho(p, N) \neq 0$ при $p \nmid K$.

Доказательство. Имеем $p \nmid 30\Delta_0$. При $\varphi(p) \nmid k$ хотя бы один из вычетов $N - w^k \pmod{p}$ (обозначим его M) взаимно прост с p . Решений сравнения $\Phi(u, v) \equiv M \pmod{p}$ с $p \nmid uv$ всего $R(p, M) = p - l(p)$ без общего числа решений сравнений $\Phi(x, 0) \equiv M$ и $\Phi(0, y) \equiv M \pmod{p}$, т. е. $\geq p - l(p) - 4 > 0$, поскольку $p > 5$. В случае $\varphi(p) \mid k$ имеем $w^k \equiv 1 \pmod{p}$ и можно взять $M = N - 1$, так как $p \nmid K$. Лемма доказана.

Через $r(m, M)$ обозначим число решений сравнения $w^k \equiv M \pmod{m}$, $(w, m) = 1$; g — бесквадратное число и \mathcal{Y}_g множество всех примитивных характеров по $\text{mod } g$ степени k . Имеем $\# \mathcal{Y}_p = (k, \varphi(p)) - 1 = k_1$,

$$r(p, M) = \sum_{\substack{\chi \pmod{p} \\ \chi^k = \chi_0}} \chi(M) = \chi_0(M) + \sum_{\chi \in \mathcal{Y}_p} \chi(M) \quad (10)$$

и $\# \mathcal{Y}_g \leq k^{\omega(g)}$, где $\omega(n)$ — число различных простых делителей n . В дальнейшем $(g, 2\Delta_0) = 1$.

ЛЕММА 4. При $p \nmid 2\Delta_0$ имеем

$$\rho(p, N) = p^2 - 3p + pl(p)[r(p, N) - 1] + B \sqrt{p(p, N)}.$$

Доказательство. Решений сравнения имеется

$$\begin{aligned} & \sum_{w=1}^{p-1} R(p, N - w^k) + 2r(p, N) = \\ & = [p - l(p)] \cdot [\varphi(p) - r(p, N)] + [p - l(p)][1 + l(p)] \cdot r(p, N) + B = \\ & = p\varphi(p) + pl(p)[r(p, N) - 1] + B \end{aligned}$$

без общего числа решений сравнений $\Phi(0, y) + u^k \equiv N$ и $\Phi(x, 0) + v^k \equiv N \pmod{p}$ с $p \nmid uv$. У последних двух сравнений по $p + B\sqrt{p(p, N)}$ решений в силу (10) и свойств сумм Гаусса.

ЛЕММА 5. *Найдется мультипликативная функция $f_N(n)$ с условием $f_N(n) \ll B^{\omega(n)} n^{-1} \sqrt{(n, N)/n}$ и такая, что*

$$u(m, N) = \sum_{\substack{m=ng \\ (n, g)=1}} f_N(n) \cdot l(g) g^{-1} \sum_{\chi \in \mathcal{Y}_g} \chi(N).$$

Доказательство. Ввиду мультипликативности обеих частей формулы пусть $m = p^\alpha$. При $p \mid 2\Delta_0$ или $p \nmid 2\Delta_0$ и $\alpha > 1$, согласно определению g , формула имеет вид $u(m, N) = f_N(m)$. Оценка $f_N(m)$ вытекает из леммы 2. Для $p \nmid 2\Delta_0$ из представления (6) и леммы 4 найдем

$$u(p, N) = p\rho(p, N)/\varphi^3(p) - 1 = l(p)p^{-1}[r(p, N) - 1] + \\ + B\sqrt{p(p, N)}p^{-2} = Bp^{-1}\sqrt{(p, N)/p} + l(p)p^{-1}\sum_{\chi \in \mathcal{Y}_p} \chi(N).$$

Лемма доказана.

Пусть далее $A(N) = A_1(N, Q)$, $Y = X^{1/\varepsilon \ln \ln X}$ и

$$\sigma(N) = \prod_{p \leq Y} \pi_p(N), \quad \pi_r(N) = \prod_{p \mid r} \pi_p(N).$$

Из лемм 2 — 5 вытекают оценки:

$$u(m, N) \ll B^{\omega(m)} m^{-1}, \quad \pi_p(N) = 1 + \theta k_1 p^{-1} + Bp^{-1} \sqrt{(p, N)/p}. \quad (11)$$

Следствие. $A_r(N, Q/r) \pi_r(N) \ll \mathcal{L}^k$ при любом $r \leq Q$, $\sigma(N) = 0$ при $\rho(K, N) = 0$ и $\mathcal{L}^{-k} \ll \sigma(N) \ll \mathcal{L}^k$ в противном случае.

ЛЕММА 6. Пусть $\rho(K, N) > 0$ и $\xi \in G_r$. Тогда $u(r, N, \xi)/\pi_r(N) = B$ и $B(r, N)r^{-0,33}$ всегда и $B^{\omega(r)}\sqrt{(r, N)/r}$ для бесквадратных чисел r .

Доказательство. Опять достаточно рассмотреть случай $r = p^\alpha$ и $[r_1, r_2, r_3] = p^\rho \leq r$. Имеем $\pi_r(N) \asymp 1$ в силу леммы 3, (9) и (11). Первая оценка при $\alpha \leq v_0$ тривиальна, а при $\alpha > v_0$ вытекает из (7) или следствия формул (8) и (9): при $\alpha > v_0$ и $\alpha = \rho$ имеем

$$u(r, N, \xi)/\pi_r(N) = \rho(r, N, \xi)/\rho(r, N). \quad (12)$$

Оценим $u(p, N, \xi)$. Пусть $a \equiv \mu^{x+2ky} \equiv zt^{2k} \pmod{p}$, где μ — первообразный корень, $k_2 = (2k, \varphi(p))$, $1 \leq x \leq k_2$ и $1 \leq t < p$. При изменении z, t каждое a повторится k_2 раз. В сумме $u(p, N, \xi)$ новая переменная t определяет лишь знаки $\bar{\xi}_1^k \bar{\xi}_2^k(t)$ и $\bar{\xi}_3^2(t)$ сумм по u, v и w , равных соответственно $Bp^{3/2}$ и $Bp^{1/2}$. Сумма по t равна $B\sqrt{p(p, N)}$. Отсюда

$$u(p, N, \xi) = \varphi^{-3}(p) k_2^{-1} \sum_x Bp^{3/2} Bp^{1/2} B\sqrt{p(p, N)} = B\sqrt{(p, N)/p},$$

что равносильно третьей оценке.

Ввиду установленного проверим вторую оценку лишь в случае $\alpha > v_0$ и $\alpha = \rho > 1$. Оценим правую часть (12). Не ограничивая общности, считаем $p > 2$. Пусть q наименьший делитель r с условием $r \mid q^2$ и $n = r/q$. Тогда $n \geq r^{1/3}$ и $q \leq r^{2/3}$. В новых переменных

$u \equiv U + qxU, v \equiv V + qyV, w \equiv W + qzW \pmod r$ условие $\nabla_r(u, v, w)$ распадается на $\nabla_q(U, V, W)$ и линейное сравнение $\Delta_n(x, y, z)$ вида

$$\begin{aligned} \Phi_1(U, V)Ux + \Phi_2(U, V)Vy + kW^kz &\equiv \\ &\equiv [N - \Phi(U, V) - W^k]q^{-1} \pmod n, \end{aligned}$$

где Φ_j — частная производная Φ по j -й переменной. Отсюда

$$\begin{aligned} \rho(r, N, \xi) = \sum_{\nabla_q(U, V, W)} \theta \sum_{\Delta_n(x, y, z)} \xi_1(1 + qx) \cdot \\ \cdot \xi_2(1 + yq) \xi_3(1 + qz). \end{aligned}$$

Оценим внутреннюю сумму. Пусть $\xi_j(a) = e(m_j \text{ind } a/\varphi(r))$. Так как $\alpha = \rho$, имеем $p \nmid (m_1, m_2, m_3)$. Слагаемые этой суммы равны $e((m_1bx + m_2by + m_3bz)/n)$, где $p \nmid b$, в силу $\text{ind}(1 + qx) \equiv \varphi(q)bx \pmod{\varphi(r)}$, см. [11, § 8.1]. Запишем условие Δ_n через тригонометрическую сумму и просуммируем по $x, y, z \pmod n$; получим $|\rho(r, N, \xi)| \leq n^2T$. Здесь T — число решений $U, V, W \pmod q, a \pmod n$ системы сравнений $\nabla_q(U, V, W)$ и

$$a\Phi_1(U, V)U \equiv m_1b, \quad a\Phi_2(U, V)V \equiv m_2b, \quad akW^k \equiv m_3b \pmod n. \quad (13)$$

Оценим T . $p \nmid a$ в силу $p \nmid b(m_1, m_2, m_3)$. Из линейной комбинации всех сравнений вытекает $2kNa \equiv k(m_1 + m_2)b + 2m_3 \pmod n$. Поэтому различных a всего $\leq (2kN, n) = B(n, N)$. Оценим число возможных троек U, V, W при фиксированном a . Пусть сначала $a_0c_0 \neq 0$. Обозначим d степень p и $d \parallel (m_1, m_2)$, например, $d \parallel m_1; m_1 = dm, dm\bar{m} \equiv d \pmod n$ и $\tau = (d, n)$. В силу (13) при $\tau > 1$ однородная система $\Phi_1(U, V) \equiv \Phi_2(U, V) \equiv 0 \pmod \tau$ с детерминантом Δ_0 имеет ненулевое решение; поэтому $\tau \mid \Delta_0$. При $V \equiv \eta U \pmod n$ из (13) вытекает $\Phi_1(1, \eta)\bar{m}m_2d^{-1} \equiv \Phi_2(1, \eta)\eta \pmod n$. Сравнение имеет B решений. Отсюда пар U, V всего $B(q/n)^2$, так как τ ограничено. Вычетов W с условием $\nabla_q(U, V, W)$ всего B . Таким образом, $T = B(n, N)(q/n)^2$. В случае $a_0 \neq 0$ и $c_0 = 0$ при $\Delta_0 \neq 0$ имеем $b_0 \neq 0$. Перейдем к $\eta \equiv U^2, \xi \equiv UV \pmod n$. Оценка T сохраняется. Наконец, при $a_0 = c_0 = 0$ (случай $\Phi(x, y) = xy$) имеем $T = B(n, N)(q/n)\varphi(q)$. Следовательно,

$$\rho(r, N, \xi) = \theta n^2T = Bn^2(n, N)(q/n)q = B(r, N)r^{5/3}.$$

Из лемм 1 и 4 вытекает $\rho(r, N) \asymp r^2$. Лемма доказана.

§ 4. Особый ряд. Для каждого r в сумме (5) будем заменять, следуя [2, 5], $A_r(N, Q/r)$ в среднем по N произведением $\sigma(N)/\pi_r(N)$. Дополнительно, чтобы увеличить точность замены, мы используем способ оценки коротких сумм характеров Линника [4, с. 327]. Подобные рассуждения с $r = 1$ и сложнее, чем в § 4, при изучении особого ряда уравнения $N = x^2 + y^3 + z^5$ реализовал Вон [12].

ЛЕММА 7. Пусть $Q^{0,7} \leq x \leq Q/r$. Тогда $A(N) - A_r(N, x)\pi_r(N) \ll Q^{-0,1}$ для почти всех $N \leq X$, за исключением

$\ll XQ^{-0,4}$ (множество исключительных чисел зависит от пары x, r).

Доказательство. Обозначим разность $H(N)$. Ввиду (9) и леммы 2 имеем $H(N) = \sum_{x < q \ll Q} \alpha_{qu}(q, N)$ с $\alpha_q = \emptyset$. Покажем, что

$$D = \sum_{N \leq X} H^2(N) \ll XQ^{-0,6}.$$

По лемме 5 и неравенству Коши слагаемые в D меньше

$$\left(\sum_{n \ll Q} B^{\omega(n)} \frac{(n, N)}{n} \right) \left(\sum_n \left| \sum_{\substack{x < ng \ll Q \\ (n, g)=1}} \alpha_{ng} \frac{l(g)}{ng} \sum_{\chi \in \mathcal{F}_g} \chi(N) \right|^2 \right).$$

Первый множитель $\ll Q^e$. Соберем оценки в D , раскроем квадрат и сумму по N сделаем внутренней. Для неравных примитивных характеров χ и χ_1 характер $\chi\bar{\chi}_1$ неглавный. Поэтому оценка И. М. Виноградова для суммы характеров влечет

$$D \ll Q^e \left(\sum_{x < a} \frac{\tau(a)}{a^2} k^{\omega(a)} X + \sum_{a, b \ll Q} \frac{\tau(a)\tau(b)}{ab} k^{\omega(a)} k^{\omega(b)} \sqrt{ab} \ln(ab) \right) \ll Q^{2e} X x^{-1} \ll XQ^{-0,6}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $c > 0$. Тогда $A(N) - \sigma(N) \ll \mathcal{L}^{-c}$ для почти всех чисел $N \leq X$, за исключением $\ll X^{0,6}$.

Доказательство. Обозначим через a натуральные числа без простых делителей $> Y$ и $\lambda = \ln(\ln Q / \ln Y) / \ln Y$. Ввиду (9) и (11) часть суммы $\sigma(N) = \sum_a u(a, N)$ с $a > Q$ меньше

$$\begin{aligned} &\ll Q^{-\lambda} \sum_a B^{\omega(a)} a^{\lambda-1} \ll Q^{-\lambda} \exp \left\{ B \sum_{p \leq Y} \left(\frac{1}{p} + \frac{p^\lambda - 1}{p} \right) \right\} \ll \\ &\ll Q^{-\lambda} \exp \left\{ B \sum_{p \leq Y} \left(\frac{1}{p} + \frac{Y^\lambda}{\ln Y} \cdot \frac{\ln p}{p} \right) \right\} \ll \mathcal{L}^{-c}. \end{aligned}$$

Осталось изучить разность

$$h(N) = A(N) - \sum_{a \leq Q} u(a, N) = \sum_{Y < q \leq Q} \beta_q u(q, N),$$

$$\beta_q = \emptyset.$$

Опять применим лемму 5. Вклад в $h(N)$ слагаемых с $n > y = \exp(\mathcal{L}^{2/3})$ меньше $\ll y^{-1/2} \sum_{ng \leq Q} B^{\omega(n)} n^{-1} (n, N)^{1/2} k^{\omega(g)} g^{-1} \ll \ll \mathcal{L}^{-c}$. Точками $U = Y \cdot 2^j$ разобьем оставшуюся часть $h(N)$ на $\ll \mathcal{L}$ коротких сумм, получим

$$h(N) = \sum_U h(N, U) + O(\mathcal{L}^{-c}), \quad U_1 \leq 2U, \quad (14)$$

$$h(N, U) \ll \sum_{n \leq y} B^{\omega(n)} \left| \sum_{\substack{U < ng \leq U_1 \\ (n, g)=1}} \beta_{ng} \frac{l(g)}{ng} \sum_{\chi \in \mathcal{F}_g} \chi(N) \right|. \quad (15)$$

Пусть s — наименьшее целое число с условием $\sqrt{X}/Q < U^s \leq \leq \sqrt{X}$. $s \leq (\varepsilon/2) \ln \ln X$, согласно выбору Y . Пусть $\sum_q \sum_{\chi} b(q, \chi, n) \chi(N) = H(N, U, n)$ — обозначает s -ю степень суммы по g в оценке (15). Здесь $\chi \bmod q$ — произведение s характеров $\chi_j \in \in \mathcal{J}_{g_j}^s$, поэтому $\chi^k = \chi_0$ и q — бесквадратное число $\leq U_1^s$. Ввиду $k^{\omega(s)} \leq U^\varepsilon$, $q < X$ и $\omega(q) < 2\mathcal{L}/\ln \mathcal{L}$ слагаемых внутренней суммы меньше $\leq k^{\omega(q)} \leq X^\varepsilon$ и

$$b(q, \chi, n) \leq \sum_{[g_1, \dots, g_s]=q} U^{-s} U^{\varepsilon s} \leq 2^{s\omega(q)} U^{-s} X^\varepsilon \leq X^{2\varepsilon} U^{-s}.$$

По неравенству Гёльдера и (15) в сумме

$$D(U) = \sum_{N \leq X} |h(N, U)|^{2s}$$

слагаемые меньше

$$\left(\sum_{n \leq y} B^{\omega(n)2s/(2s-1)} \right)^{2s-1} \left(\sum_{n \leq y} |H(N, U, n)|^2 \right).$$

Подставим эту оценку в $D(U)$, раскроем квадрат и сумму по N сделаем внутренней. Если $\chi \bar{\chi}'$ — главный характер по бесквадратному модулю $G = [q, q'] = [g_1, \dots, g_s, g'_1, \dots, g'_s]$ равен произведению примитивных характеров по модулям g_1, \dots, g'_s , то каждый простой делитель числа $g_1 \dots g'_s$ имеет показатель > 1 и $G^2 \leq \leq g_1 \dots g'_s$. Отсюда, как и раньше, найдем

$$D(U) \leq y^{3s} y \left\{ \sum_{q, q' \leq U_1^s} X^{2\varepsilon} (X^{2\varepsilon} U^{-s})^2 \sqrt{qq'} \ln(qq') + \right. \\ \left. + \sum_{G \leq U_1^s} \sum_{[q, q']=G} X^{2\varepsilon} (X^{2\varepsilon} U^{-s})^2 X \right\}.$$

Уравнение $[q, q'] = G$ имеет $3^{\omega(G)}$ решений, поэтому

$$D(U) \leq (U^s + XU^{-s}) X^{7\varepsilon} \leq X^{1/2+24\varepsilon}.$$

Чисел N , для которых оценка $|h(N, U)| \leq U^{-\varepsilon}$ неверна хотя бы при одном значении U , меньше $\sum_U D(U) U^{2s} \leq \leq \mathcal{L} X^{1/2+25\varepsilon} \leq \leq X^{0,6}$. Для остальных N в силу (14) найдем $h(N) \leq \leq \mathcal{L}^{-c}$. Лемма доказана.

§ 5. Сумма W_j . Далее $Z = Q^s$. Известно (см. например, [13, § 14]), что $L(s, \xi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s \geq 1 - c_1/\ln Z$, $|\operatorname{Im} s| \leq Z$ и некотором c_1 для всех примитивных характеров $\xi \bmod r$ и $r \leq Z$, кроме, возможно, одного (действительного) характера $\psi \bmod f$; (единственный) исключительный нуль β функции $L(s, \psi)$ действительный и $c_2/\sqrt{f} \ln^2 f \leq 1 - \beta \leq c_1/\ln Z$ при некотором c_2 . Отсюда $f \geq \mathcal{L}$. Согласно [13, § 5], число $f/(f, 4)$ бесквадратное и в разложении ψ нечетным простым делителем модуля f соответствующих символы Лежандра.

Пусть $E(n, \xi)$ равно 1 при $\xi = \xi_0$, $-n^{\beta-1}$ при $\xi = \psi$ и 0 в остальных случаях; X_1 — наименьшее ($\geq X$) число с условием $\Omega \subset (0, \sqrt{X_1}] \times (0, \sqrt{X_1}]$; $W_j = \sum_{r \leq Z} \sum_{\xi} w_j(\xi)$, где $N_j = X_1^{1/j}$,

$$h_j = N_j/Z \text{ и}$$

$$w_j(\xi) = \max_{x > N_j} |h_j^{-1} \sum_{x < n \leq x+h_j} \{\xi(n) \lambda_n - E(n, \xi)\}|.$$

Ввиду [1, 6, 14] справедлива

ЛЕММА 9. При некоторых c_3 и c_4 для любых $\varepsilon \leq c_3/k$ и $1 \leq j \leq k$ сумма W_j равна $B \exp(-c_4/k\varepsilon)$ всегда и $B \exp(-c_4/k\varepsilon) (1 - \beta) \ln Z$, если есть исключительный нуль.

З а м е ч а н и е. Вес λ_n , использованный в [1, 14] и настоящей работе, несущественно отличается от $\Lambda(n)$ в [6]. Введение \max вместо $x = N_j$ в определении $w_j(\xi)$ влечет замену в доказательстве теоремы в [6] множителя $\exp(-c \ln N_j / \ln Z)$ (см. оценку ядра Дирихле в формуле Перрона на с. 176) на $\max_{x > N_j} \exp(-c \ln x / \ln Z) = B \exp(-c_4/j\varepsilon)$ (ср. с [1, с. 357]). Таким образом, в силу [6] доказательство леммы 9 использует лишь метод большого решета и метод решета А. Сельберга.

§ 6. Интегралы I и J . Для изучения $I(N, \xi) = I, I(N, \xi_0, \xi_0, \xi_0) = I(N)$ и $I(N, \psi, \psi, \psi^k) = I_\psi(N)$ применим лемму Галлахера и метод исчерпывания. Пусть s_Φ обозначает площадь $\Omega(1)$ и

$$v_j(\xi) = \max_{x > N_j} |h_j^{-1} \sum_{x < n \leq x+h_j} \xi(n) \lambda_n|.$$

При $j \leq k$ имеем $v_j(\xi) = B$.

Оценим I . Пусть $\Omega_t = \Omega \cap \{t < \Phi(x, y) \leq t + H\}$, $\omega_t = \omega \cap \{t < z^k \leq t + H\}$ и I_Φ, I_k — интегралы

$$\int_{\delta X - H}^X \left| \frac{1}{H} \sum_{\Omega_t} \xi_1(m) \xi_2(n) \lambda_m \lambda_n \right|^2 dt,$$

$$\int_{\delta X - H}^X \left| \frac{1}{H} \sum_{\omega_t} \xi_3(r) \lambda_r \right|^2 dt.$$

По неравенству Коши и [14, лемма 1] при $H = 1/2\Delta$ найдем

$$|I|^2 \leq \left| \int_{-\Delta}^{\Delta} |V_\Phi|^2 d\eta \int_{-\Delta}^{\Delta} |V_k|^2 d\eta \right| \leq (\pi/2)^2 I_\Phi I_k.$$

Оценим I_Φ . Область Ω гомотетична $\Omega(1)$, поэтому у области Ω_t площадь $\leq s_\Phi H$ и длина границы $\ll \sqrt{X}$. Разбивая Ω_t на квадраты со стороной h_2 , подинтегральную сумму оценим величиной

$$(s_\Phi H / h_2^2) v_2(\xi_1) v_2(\xi_2) h_2^2 + O((\sqrt{X}/h_2) h_2^2) \leq \leq s_\Phi H v_2(\xi_1) v_2(\xi_2) + O(HQ^{-7}).$$

Отсюда $I_\Phi \leq X \{s_\Phi v_2(\xi_1) v_2(\xi_2) + O(Q^{-7})\}^2$. Разбивая интервал ω_t (длины $\leq \sqrt[k]{t+H} - \sqrt[k]{t} < HP/\delta X$) на интервалы длины h_k , также найдем $I_k \leq X (P/X)^2 \{v_k(\xi_3)/\delta + O(Q^{-7})\}^2$. Следовательно,

$$|I| \leq s_\Phi \delta^{-1} P v_2(\xi_1) v_2(\xi_2) v_k(\xi_3) + O(PQ^{-7}). \quad (16)$$

Пусть $T_\Phi = \sum_{\Omega} e(\eta\Phi(m, n)), \quad T_k = \sum_{\Omega} e(\eta r^k), \quad J =$
 $= \int_{-\Delta}^{\Delta} T_\Phi T_k e(-\eta N) d\eta$. Способ изучения I и равенство $\lambda_m \lambda_n -$
 $- 1 = (\lambda_m - 1) \lambda_n + (\lambda_n - 1)$ влекут

$$I(N) - J = Bs_\Phi \delta^{-1} P \{w_2(\xi_0) + w_k(\xi_0)\} + O(PQ^{-7}).$$

Введем также обозначения $s'_\Phi = s_\Phi / (1 - \delta)$,

$$J(N) = s'_\Phi \Sigma 1/kn^{1-1/k}$$

и

$$J_\beta(N) = s'_\Phi \Sigma m^{\beta-1} E(n^{1/k}, \psi^k) / kn^{1-1/k},$$

где $\delta X < m, n \leq X$ и $m + n = N$. При $X/2 < N \leq X$ и $5\delta \leq 1$ имеем

$$J(N) = s_\Phi (N^{1/k} + B\delta^{1/k} P)$$

и

$$J(N) + \vartheta J_\beta(N) > c_5 s_\Phi P (1 - \beta) \ln Z, \quad (17)$$

так как $m > \delta X > Z$ и $1 + \vartheta m^{\beta-1} E(n^{1/k}, \psi^k) > 1 - Z^{\beta-1} \geq$
 $\geq c_6 (1 - \beta) \ln Z$, где c_6 зависит от c_1 . Для $|\eta| \leq \Delta$ сумма T_Φ
с погрешностью $\ll \sqrt{X}$ равна

$$\iint_{\Omega} e(\eta\Phi(x, y)) dx dy = s'_\Phi \int_{\delta X}^X e(\eta t) dt;$$

s'_Φ определяется отсюда при $\eta = 0$ и $X = 1$. Поэтому стандартные рассуждения [3] дают $J = J(N) + O(\Delta^{-1/k})$. Следовательно,

$$I(N) = J(N) + Bs_\Phi \delta^{-1} P \{w_2(\xi_0) + w_k(\xi_0)\} + O(P^{1-3\epsilon}). \quad (18)$$

Для случая $\Phi(x, y) = xy$, ввиду монотонности $t^{\beta-1}$, также найдем

$$I_\psi(N) = J_\beta(N) + Bs_\Phi \delta^{-1} P \{w_2(\psi) + w_k(\psi^k)\} + O(P^{1-3\epsilon}). \quad (19)$$

§ 7. Случай $\Phi(x, y) \neq xy$. Главный член асимптотики $\kappa(N)$ содержит слагаемое суммы (5) с $r = 1$. Ввиду следствия и леммы 8 для почти всех N , за исключением $\ll X^{0,6}$, имеем $A(N) \ll \ll \mathcal{L}^{-c}$ (c — любое) при $\rho(K, N) = 0$ и $\mathcal{L}^{-k} \ll A(N) \ll \mathcal{L}^k$ в противном случае. Поэтому будем рассматривать лишь числа N с $\rho(K, N) \neq 0$ и $\mathcal{L}^{-k} \ll A(N) \ll \mathcal{L}^k$.

Преобразуем $\kappa_1(N)$. Далее $\epsilon \leq c_3/k$ и $R = Q^{0,3}$. Вклад в сумму (5) слагаемых с $r > R$ по леммам 2, 6, следствию и (16) меньше

$$\ll \sum_{r \leq Q} \sum_{\xi \in G_r}^1 (r, N) R^{-0,33} P \{v_2(\xi_1) v_2(\xi_2) v_k(\xi_3) + Q^{-7}\} \mathcal{L}^k. \quad (20)$$

Среднее значение этой оценки по N ввиду лемм 2 и 9 меньше $\ll PR^{-0,3}$. Отсюда чисел N , для которых (20) больше $PR^{-0,2}$, всего $\ll XR^{-0,1}$. В слагаемых суммы (5) с $r \leq R$ заменим $A_r(N)$,

Q/r) на $A(N)/\pi_r(N)$ с общей погрешностью $\ll PQ^{-0,1}$, пользуясь (16), первой оценкой леммы 6 и леммами 2 и 9. Теперь в силу § 2 для почти всех N , за исключением $\ll R \cdot XQ^{-0,4} + XR^{-0,1} + XP^{-\varepsilon} \ll XP^{-\varepsilon}$, найдем

$$\kappa(N) = A(N) \sum_{r \leq R} \sum_{\xi \in G_r} u(r, N, \xi) \pi_r^{-1}(N) I(N, \xi) + E, \quad (21)$$

где остаток $E \ll PQ^{-0,1} + PR^{-0,2} + P^{1-2\varepsilon} \ll P^{1-2\varepsilon}$. Слагаемое с $r = 1$ преобразуем по формуле (18). Вклад в сумму (21) остатка из (18) и слагаемых, где хотя бы один характер в ξ отличен от ξ_0 и ψ , ввиду (16) и леммы 6 меньше

$$A(N) PBs_{\Phi} \delta^{-1} (W_2^2 W_k + W_2 W_k + W_2 + W_k) + O(\mathcal{L}^k P^{1-3\varepsilon} + \mathcal{L}^k PR^6 Q^{-7}) \quad (22)$$

и оценивается по лемме 9. Пусть F_r — множество остальных $\xi \in G_r$ и

$$F(N) = \sum_{r \leq R} \sum_{\xi \in F_r} |u(r, N, \xi) / \pi_r(N)|. \quad (23)$$

Здесь $\xi_j = \xi_0$ или ψ и $f \mid r \mid f \Delta_0$, согласно определению G_r . Отсюда последняя часть суммы (21) меньше $F(N) PBs_{\Phi} \delta^{-1} A(N)$ и

$$\kappa(N) = A(N) \{J(N) + BP s_{\Phi} \delta^{-1} F(N) + BP s_{\Phi} \delta^{-1} \exp(-c_4/k\varepsilon)\} + O(P^{1-2\varepsilon}). \quad (24)$$

ЛЕММА 10. $F(N) = o(1)$ при $\Phi(x, y) \neq xy$.

Доказательство. По определению F_r и лемме 2 в сумме (23) B слагаемых. Поскольку $f \mid r \mid f \Delta_0$, $f / (f, 4)$ — бесквадратное число и $f \gg \mathcal{L}$, теперь достаточно третью оценку леммы 6 заменить $B^{o(r)} \sqrt{(r, N)}/r$. Искомая оценка вытекает из доказательства леммы 6, если сумму по u, v из $u(r, N, \xi)$ при $r = f = p$ и $p \nmid 2a$ оценить величиной Bp . При $\xi_1 = \xi_2 = \psi$ подстановка $v = \eta u$ влечет

$$\sum_{u, v=1}^{p-1} \left(\frac{uv}{p}\right) e\left(\frac{a\Phi(u, v)}{p}\right) = \sum_{\eta=1}^{p-1} \left(\frac{a\eta\Phi(1, \eta)}{p}\right) \sum_{x=1}^p e\left(\frac{x^2}{p}\right) = Bp$$

ввиду свойств сумм Гаусса и теоремы Хассе (см., например, [15, гл. 10]), так как $\Phi(1, \eta) \neq \eta$. Если ξ_1 или ξ_2 равно ξ_0 , то оценка устанавливается просто. Лемма доказана.

Фигурная скобка в (24) по лемме 10 и (17) равна

$$s_{\Phi} N^{1/k} \{1 + B\delta^{1/k} + B\delta^{-1} \exp(-c_4/k\varepsilon) + o(1)\} > 0,5s_{\Phi} P$$

для некоторых $\delta = \delta_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$ с условиями $5\delta < 1$, $s_{\Phi} > 0$ и $4\varepsilon \leq \rho_0$, $k\varepsilon \leq c_3$. Отсюда чисел N с $\rho(K, N) \neq 0$ и $\kappa(N) = 0$ всего $\ll X^{0,6} + XP^{-\varepsilon} \ll XY$, где $\gamma = 1 - \varepsilon_0/k$. Согласно определению B , при достаточно большом k можно взять $\varepsilon_0 = \rho_0/4$ и $\gamma < 1 - 1/137k^3 \ln k$. Случай $\Phi(x, y) \neq xy$ изучен полностью.

§ 8. Случай $\Phi(x, y) = xy$. Уравнение $N = p_1 + \frac{p_2^2}{p_1}$. Пусть сначала $f > P^{3\varepsilon}$. Тогда чисел N с $(f, N) > \sqrt{f}$ меньше

$\sum_{N \leq x} (f, N)/\sqrt{f} \ll X \cdot P^{-\varepsilon}$. Для остальных N оценка леммы 10 вытекает из леммы 6 и рассуждения § 7 сохраняются.

ЛЕММА 11. Пусть $\Phi(x, y) = xy$ и хотя бы один нечетный простой делитель N делит f . Тогда $u(f, N, \psi, \psi, \psi^k)/\pi_f(N) = \vartheta$ и $u(r, N, \xi) = 0$ для остальных $\xi \in F_r$.

Доказательство. Имеем $r = f$, так как $\Delta_0 = 1$ и $f \mid r \mid f\Delta_0$. Первая оценка вытекает из (12). Ввиду мультипликативности суммы (3) и разложения f осталось проверить второе утверждение леммы, когда $r = f$ — нечетный простой делитель N . В этом случае правая часть (12), где $uv = -w^k \pmod{f}$, $\rho(f, N) = \varphi^2(f)$ и $\xi_j = \xi_0$ или ψ , равна

$$\varphi^{-2}(f) \sum_{r, w=1}^{f-1} \xi_1(-1) \xi_2 \xi_1(v) \xi_3 \xi_1^k(w)$$

и отлична от нуля (равна $\psi(-1)$) лишь на $\xi = (\xi_1, \xi_1, \xi_1^k) = (\psi, \psi, \psi^k)$. Лемма доказана.

Пусть, наконец, $f \leq P^{3\varepsilon}$. Для чисел N с $(N, f) \mid 8$, как и раньше, $F(N) = o(1)$ и рассуждения § 7 сохраняются. Для остальных N вклад в сумму (21) слагаемых с $\xi \in F_r$ по лемме 11 равен $\vartheta A(N) I_\psi(N)$. Теперь, согласно (17) — (19), (22) и лемме 9, $\kappa(N)$ равно

$$A(N) \{J(N) + \vartheta J_\beta(N) + BP s_\Phi \delta^{-1} \exp(-c_4/k\varepsilon) (1 - \beta) \ln Z\} + O(P^{1-2\varepsilon}) \geq s_\Phi A(N) N^{1/k} \{c_5 + B\delta^{1/k} + B\delta^{-1} \exp(-c_4/k\varepsilon)\} (1 - \beta) \ln Z + O(P^{1-2\varepsilon}) \quad (25)$$

и положительно, поскольку $(1 - \beta) \ln Z \geq c_2/\sqrt{f} \ln^2 f \gg P^{-1,6\varepsilon}$. Рассуждения конца § 7 сохраняются. Теорема 2 доказана полностью.

Исключительное множество уравнения $N = p_1 + p_2^k$ изучается так же, как случай $\Phi(x, y) = xy$ теоремы 2. Поэтому, естественно изменяя (вместо $\Phi(x, y)$ теперь x) содержание старых обозначений, мы ограничимся лишь следующими замечаниями. По малой теореме Ферма конгруэнциальное условие теоремы 1 эквивалентно разрешимости (линейного) сравнения $u + v^k \equiv N \pmod{q}$ с $(uv, q) = 1$ при любом q . Аналогом леммы 5 будет разложение

$$u(m, N) = \sum_{\substack{m=nq \\ (n, g)=1}} f_N(n) \cdot \mu(g) g^{-1} \sum_{\chi \equiv \chi_g} \chi(N)$$

с $f_N(n) \ll B^{\omega(n)}(n, N)/n^2$. Наконец, формуле (25) соответствует представление $\kappa(N) + O(P^{1-2\varepsilon})$ в виде

$$A(N) \left\{ J(N) + \frac{\rho(f, N, \psi, \psi^k)}{\rho(f, N)} J_\beta(N) + BP\delta^{-1}(W_1 W_k + W_1 + W_k) \right\},$$

где применимы формулы (17) с $s_\Phi = 1 - \delta$ (ср. с (6.11) из [8]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem // *Acta Arith.* 1975. V. 27. P. 353—370.
- [2] Hua Loo Keng. Some results in the additive prime number theory // *Quart. J. Math.* 1938. V. 9. P. 68—80.
- [3] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.
- [4] Линник Ю. В. Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L -функции. Л.: Наука, 1979.
- [5] Davenport H., Heilbronn H. Note on a result in the additive theory of numbers // *Proc. London Math. Soc. Ser. 2.* 1937. V. 43. P. 142—151.
- [6] Motohashi Y. Primes in arithmetic progressions // *Invent. Math.* 1978. V. 44. P. 163—178.
- [7] Тезисы докладов всесоюзной конференции «Теория чисел и ее приложения». Тбилиси: Тбилисский университет, 1985.
- [8] Виноградов А. И. О бинарной проблеме Харди—Литлвуда // *Acta Arithm.* 1985. V. 46. P. 33—56.
- [9] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
- [10] Плаксин В. А. Асимптотическая формула для количества представлений натурального числа парой квадратичных форм, аргументы одной из которых являются простыми числами // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1984. Т. 48, № 6. С. 1245—1265.
- [11] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
- [12] Vaughan R. C. A ternary additive problem // *Proc. London Math. Soc.* 1980. V. 41. P. 516—532.
- [13] Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.
- [14] Gallagher P. X. On large sieve density estimate near $\sigma = 1$ // *Invent. Math.* 1970. V. 11. P. 329—353.
- [15] Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962.